A 1. 7.
Math 834
Math
907

Georg Freyherrn von Vega,

Landes-Mitstands des Herzogthums Krains, Ritters des militär. M. Th. Ordens, Oberst-Lieutenants des k. k. vierten Feldartillerie-Regiments, Mitgliedes der gelehrten Gesellschaften der Wissenschaften zu Berlin, Erfurt, Göttingen und Prag,

Vorlesungen

über die

Mathematik

sowohl

überhaupt zur mehrerer Verbreitung mathematischer Kenntnisse in den k. k. Staaten, als auch ins Besondere zum Gebrauche des k. k. Artillerie-Corps.

K. K. MILITÄR-BIBLIOTHEK DER STADT AUGSBURG

Zweyter Band,

die

theoretische und practische Geometrie, die geradlinige und sphärische Trigonometrie, die höhere Geometrie, und die Infinitesimal-Rechnung enthaltend.

Fünfte verbesserte Auflage.

Mit XVI. Kupfertafeln.

Wien, 1817.

Bey Joseph Tendler und Sohn, Buchhändlern am Graben im Trattnerhofe.

Mittheilungen

aus der

Sammlung mathematisch-physikalischer

Modelle

an der

Königlichen Technischen Hochschule zu Berlin.

Herausgegeben von

Prof. Dr. L. Burmester.

Heft XVI. Kinematik.

Berlin, 1897.

Inhalt.

Erstes Hauptstück.

Von den Eigenschaften der Linien.

I. Abschnitt. Vorläufige Einleitung in die Meßkunst. §. 341. S. 1.

II. Abschnitt. Von der verschiedenen Lage und Stellung der geraden Linien. §. 357. S. 11.

III. Abschnitt. Von den Vielecken. §. 377. S. 28.

IV. Abschnitt. Von den Proportional-Linien. §. 397. S. 45.

V. Abschnitt. Von einigen Aufgaben über die Proportional-Linien. §. 417. S. 64.

Zweytes Hauptstück.

Von den Eigenschaften der ebenen Flächen.

I. Abschnitt. Von der Bestimmung des Flächeninhaltes geradliniger Figuren. §. 432. Seite 84.

II. Abschnitt. Von der Vergleichung und Verwandlung geradliniger Figuren. §. 455. S. 114.

III. Abchnitt. Von der Lage und Stellung der Ebenen. §. 462. S. 126.

Drittes Hauptstück.

Von den Eigenschaften der Körper.

I. Abschnitt. Begriffe von den geometrischen Körpern, oder Einleitung in die Stereometrie. §. 477. S. 136.

II. Abschnitt. Von der Ausmessung der Oberflächen der Körper. §. 489. S. 146.

III. Abschnitt. Von der Ausmessung des Cubikinhaltes der Körper. §. 501. S. 155.

Inhalt.

Viertes Hauptstück.

Von der Trigonometrie.

I. Abschnitt. Von den trigonometrischen Functionen. §. 535. S. 189.

II. Abschnitt. Von der Auflösung geradliniger Dreyecke. §. 555. S. 221.

III. Abschnitt. Von der Auflösung der sphärischen Dreyecke. §. 565. S. 241.

IV. Abschnitt. Begriffe von der Erd- und Himmelskugel nebst Anwendung derselben auf einige der nützlichsten Aufgaben. §. 582. S. 276.

Fünftes Hauptstück.

Von den Anfangsgründen der prac. Meßkunst.

I. Abschnitt. Von der Auflösung der nothwendigsten Aufgaben durch die gebräuchlichsten Meß-Instrumente. §. 584. S. 309.

II. Abschnitt. Von dem Centriren der Winkel, von der Reduction der schief geneigten Winkel auf den Horizont, von der Verbesserung der Höhen- und Tiefenwinkel, und von dem Unterschiede des wahren und scheinbaren Horizontes. §. 605. S. 365.

III. Abschnitt. Vom Nivelliren. §. 611. S. 376.

IV. Abschnitt. Von dem Gebrauche des Barometers bey Höhenmessungen. §. 619. S. 393.

Sechstes Hauptstück.

Von einigen krummen Linien.

I. Abschnitt. Vorläufige Einleitung. §. 620. S. 407.

II. Abschnitt. Von den Kegelschnitts-Linien. §. 626. S. 414.

III. Abschnitt. Von einigen anderen krummen Linien. §. 671. S. 463.

Sie-

Inhalt.

Siebentes Hauptstück.

Von der Differenzial-Rechnung.

I. Abschnitt. Anfangsgründe der Differenzial-Rechnung. §. 675. S. 475.

II. Abschnitt. Von den höheren Differenzialen, und von der daraus fließenden Anwendung der Differenzial-Rechnung auf Function-Reihen. §. 687. S. 496.

III. Abschnitt. Anwendung der Differenzial-Rechnung auf die Bestimmung der Subtangenten, Tangenten, Normalen, Subnormalen, und Asymptoten der krummen Linien. §. 691. S. 505.

IV. Abschnitt. Anwendung der Differenzial-Rechnung auf die Bestimmung des Krümmungs-Halbmessers der krummen Linien. §. 697. S. 513.

V. Abschnitt. Anwendung der Differenzial-Rechnung auf die Bestimmung der größten und kleinsten Werthe der Functionen und des Werthes $\frac{0}{0}$. §. 702. S. 530.

Achtes Hauptstück.

Von der Integral-Rechnung.

I. Abschnitt. Anfangsgründe der Integral-Rechnung und die Entwickelung der Grundregeln derselben. §. 709. S. 549.

II. Abschnitt. Integrirung der Binomien durch natürliche Logarithmen und durch Kreisbogen. §. 721. S. 563.

III. Abschnitt. Integrirung der Trinomien und der rationalen Brüche und die davon abhangende vollständige Integration des Binomiums $x^m dx(a+bx^n)^p$. § 727. S. 583.

IV. Abschnitt. Verwandlung einiger sehr merkwürdigen irrationalen Differenzialen in eine rationale Gestalt. §. 733. S. 594.

V.

Inhalt.

V. Abschnitt. Integrirung der merkwürdigsten logarithmischen und trigonometrischen Differenzialen. §. 744. S. 600.

VI. Abschnitt. Einige Kunstgriffe, wodurch verschiedene Differenzialen von mehreren veränderlichen Größen, wie auch verschiedene höhere Differenzial-Gleichungen integriret werden. §. 751. S. 609.

VII. Abschnitt. Anwendung der Integral-Rechnung auf die Bestimmung des Flächeninhaltes krummliniger Figuren, auf die Rectification der krummen Linien, und auf die Berechnung der Oberfläche und des Cubikinhaltes der Körper. §. 758. S. 621.

Anhang,

enthaltend:

I. Ein Verzeichniß der merkwürdigsten Formeln aus der analytischen Trigonometrie. Seite 641.

II. Die analytische Darstellung der Sinus und Cosinus für jeden dritten Grad von 0° bis 90°. Seite 649.

III. Die Auflösung der geradlinigen und der sphärischen Dreyecke mit einer tabellarischen Uebersicht. Seite 651.

Erstes Hauptstück.

Von den Eigenschaften der Linien.

I. Abschnitt.

Vorläufige Einleitung in die Meßkunst.

§. 341.

Stätige Größen (quantitates continuae) werden diejenigen genannt, welche aus ununterbrochen aneinander hängenden Theilen bestehen. Die Wissenschaft, welche sich mit der Vergleichung und Ausmessung der stätigen Größen beschäftiget, heißt Geometrie oder auch Meßkunst. Die stätigen Größen werden in drey Hauptgattungen in Körper, Flächen, und Linien abgetheilet. Ein Körper (solidum) heißt im mathematischen Verstande eine begränzte Ausdehnung in die Länge, Breite und Tiefe oder Dicke. In Fig. 1. ist ein solcher Körper abgebildet, den man einen Würfel nennet. Die Gränzen eines Körpers heißen Flächen (superficies), und sind nichts anders, als blosse Ausdehnungen in die Länge und Breite ohne alle Tiefe oder Dicke; ABCD, CDEF, BCFG u. s. w. stellen uns also Flächen vor. Die Gränzen einer Fläche heißen Linien, und sind Ausdehnungen in die blosse Länge ohne alle Breite und Dicke; AB, DE, GF, u.s.w. stellen uns demnach Linien vor. Die Gränzen, nähmlich der Anfang oder das Ende einer Linie, heißen endlich Puncte, die gar keine Ausdehnung mehr haben; durch A, B, C, u. s. w. werden also Puncte abgebildet. Mathematische Puncte und

Fig. 1. Linien können niemahls unseren Sinnen genau vorgestellet werden. Man pflegt in der Ausübung einen Punct auf dem Papiere mit einem kleinen runden Tüpflein, auf dem Felde mit einem Pflocke, oder einem andern beliebigen Merkmahle, und eine Linie auf dem Papiere mit einem feinen Striche, auf dem Felde aber entweder durch eine ausgespannte Schnur, oder auch durch eine schmale und seichte Vertiefung zu bezeichnen.

§. 342.

Aus dem Begriffe des Punctes, daß er nähmlich ohne alle Ausdehnung ist (§. 341. *), folget, daß er durch seine Bewegung einen Weg, oder eine Länge ohne alle Breite und Dike, das ist, eine Linie beschreibet. Bewegt sich aber eine Linie AD anders als nach ihrer Richtung z. B. bis BC; so wird der Weg, den sie durchläuft, zwey Ausdehnungen haben, und folglich eine Fläche seyn. Bewegt sich endlich eine Fläche ABCD anders als nach ihrer Lage z. B. bis in HGFE; so wird der Weg, den sie zurückleget, drey Ausdehnungen haben, und folglich ein Körper seyn. Doch kann man aus diesem keineswegs folgern, daß eine Linie aus Puncten, eine Fläche aus Linien, und ein Körper aus Flächen zusammengesetzet sey; nur soviel ist aus dem bisher Angeführten abzunehmen, daß man in einer Linie überall in ihrer ganzen Ausdehnung nach Belieben Puncte annehmen könne, weil sich in einer Linie überall ihr Anfang oder ihr Ende gedenken läßt.

§. 343.

Bleibt die Richtung des Punctes während seiner Bewegung ungeändert; so wird er eine gerade Linie beschreiben, und von einem Orte zu dem andern auf dem kürzesten Wege gelangen. Wird hingegen die Richtung des Punctes während seiner Bewegung in jedem Augenblicke geändert; so wird er eine krumme Linie beschreiben. Eine Linie heißt nähmlich gerad oder eine Gerade, wenn alle ihre Theile überall die-

*) Die Zurückweisung auf die §§. sowohl des ersten Bandes der 3ten Auflage als auch dieses zweyten Bandes werden öfters bloß mit der Nummer derselben ohne das Zeichen §., bemerket werden.

dieselbe Richtung haben. Eine Linie aber, die keinen geraden Theil hat, heißt krumm oder eine Krumme. Fig.

§. 344.

Eine gerade Linie AB ist demnach die kürzeste Entfernung ihrer Endpuncte A und B. Durch zwey Puncte wird die Richtung, oder die Lage einer geraden Linie bestimmt; und durch zwey Puncte läßt sich nur Eine gerade Linie ziehen; weil alle die übrigen geraden Linien, wenn man sie auch in Gedanken ziehen wollte, mit der ersten übereinfallen, und mit derselben nur immer eine einzige gerade Linie ausmachen würden. Hingegen können durch dieselben zwey Puncte A und B unzählige krumme, oder auch aus Geraden zusammengesetzte Linien ADB, AEB, AFB, AGB u. s. w. gezogen werden; jedoch ist jede derselben größer oder länger als die Gerade AB. Auch ist es leicht einzusehen, daß zwey gerade Linien, die sich durchschneiden, nur einen einzigen Punct, und nicht einen Theil gemein haben. Haben hingegen zwey Geraden einen Theil, das ist ein gewisses Stück einer Geraden gemein; so liegen sie beyde nach einerley Richtung über einander und machen nur eine einzige Gerade aus. 2.

§. 345.

Eine Fläche, auf der sich durch was immer für zwey Puncte eine gerade Linie dergestalt ziehen läßt, daß sie nach ihrer ganzen Länge auf der Fläche liegt, heißt eine Ebene (planum). Alle Betrachtungen, die man in der Meßkunst vornimmt, beziehen sich auf eine und eben dieselbe Ebene, wenn man nicht das Gegentheil erinnert.

§. 346.

Drehet sich nun auf einer Ebene eine gerade Linie AC, um einen unbeweglichen Punct C, bis sie wieder in ihre vorige Lage kommt; so beschreibt der Punct A eine in sich selbst zurückkehrende krumme Linie ABDEFA, bey der jeder Punct A, B, D, F, von dem in der Mitte liegenden Puncte C gleich weit absteht. Die von dieser krummen Linie eingeschlos- 3.

Fig. 3. sene ebene Fläche heißt ein **Kreis** oder **Zirkel** (circulus); der Punct C dessen **Mittelpunct** (centrum), und die krumme Linie ABDEFA der **Umkreis** (peripheria). Jeder Theil AB, DE u. s. w. des Umkreises wird ein **Kreisbogen** (arcus), jede Gerade zwischen zwey Puncten des Umkreises z. B. NM ein Sehne (chorda), jede Sehne, welche durch den Mittelpunct geht, der **Durchmesser** (diameter), jede Gerade zwischen dem Mittelpuncte und dem Umkreise, der **Halbmesser** (radius), jeder Theil ACBA des Kreises zwischen zwey Halbmessern und einem Kreisbogen ein **Ausschnitt** (sector), und endlich jeder Theil EGFHE des Kreises zwischen der Sehne und dem Bogen wird ein **Kreisabschnitt** (segmentum) genannt.

§. 347.

Aus dieser Entstehungsart des Kreises folgt

I. Daß alle Halbmesser eines Kreises einander gleich sind; weil der Umfang des Kreises von dessen Mittelpuncte überall gleich weit entfernt ist.

II. Daß auch alle Durchmesser eines Kreises einander gleichen; weil jeder Durchmesser nichts anders ist, als die Summe von zwey gleichen Halbmessern.

III. Daß gleiche Sehnen in demselben Kreise auch gleiche Bogen, und umgekehrt, abschneiden. Es sey z. B. die Sehne EF = MN; so ist auch der Bogen EF = MN. Denn man bilde sich nur ein, daß der Abschnitt EF auf den Abschnitt MN dergestalt geleget werde, daß der Punct E auf M, und F auf N zu liegen komme; so werden die Sehnen, weil sie einander gleich sind, und auch die Bogen einander decken, weil alle ihre Puncte von dem Mittelpuncte gleich weit entfernt sind, und ihre Endpuncte über einander fallen; folglich müssen diese Bogen einander gleich seyn.

IV. Daß endlich jeder Durchmesser die Kreisfläche, und den Umkreis in zwey gleiche Theile zertheilet. Es sey z. B. AE ein Durchmesser; man lege in Gedanken den Theil ANFEA auf den andern Theil des Kreises ADEA: so werden sie einander decken, und folglich einander gleich seyn.

§. 348.

Diese Grundwahrheit: Größen, welche einander decken, sind vollkommen gleich; und umgekehrt, vollkommen gleiche Größen (die nicht anders als durch die Verschiedenheit des Ortes von einander unterschieden werden können, als z. B. gerade Linien von einerley Länge, Kreise von gleichen Durchmessern u. s. w.) decken einander, wenn sie gehörig auf einander geleget werden, nebst den zwey folgenden Forderungssätzen: I. Durch jede zwey gegebenen Puncte kann eine gerade Linie gezogen, und beyderseits nach Belieben verlängert werden. II. Aus jedem gegebenen Puncte kann mit einem beliebigen Halbmesser ein Kreis beschrieben werden, muß man zu den (12) angeführten Grundsätzen, hinzufügen, um daraus die meisten Wahrheiten in der Mathematik herzuleiten. Das erste, nähmlich der Zug und die Verlängerung einer geraden Linie geschehen, auf dem Papiere, oder auf einer andern kleinen ebenen Fläche durch Hülfe des Lineals, und auf dem Felde durch mehrere hinter einander gerade gepflanzte Pflöcke, oder Stangen, die man sodann nach Erforderniß mit einer Schnur verbindet, und längst derselben die gerade Linie mit einer seichten Vertiefung bezeichnet (traciret). Das zweyte hingegen wird auf dem Papiere durch Hülfe des bekannten Instrumentes, welches man einen Zirkel nennet, und auf dem Felde durch Hülfe einer Schnur verrichtet, von der man das eine Ende an einen in dem angenommenen Mittelpuncte stehenden Pflock befestiget, und sodann auf der Erde die Linie bezeichnet, die das andere Ende der Schnur während der Umdrehung beschreibet. Fig. 3.

§. 349.

Der Umkreis eines jeden großen oder kleinen Kreises wird in 360 gleiche Theile abgetheilet, die man Grade nennet. Jeder Grad wird in 60 gleiche Theile, die Minuten heißen, und jede Minute in 60 Secunden abgetheilet u. s. w. Die Grade, Minuten, Secunden, Terzen u. s. w.

wer-

Fig. 3. werden mit (°), (′), (″), (‴) bezeichnet; z. B. ein Bogen von 65°, 35′, 40″ wird also gelesen: Ein Bogen von 65 Graden, 35 Minuten, 40 Secunden. Diese Abtheilung des Umkreises ist bloß willkührlich; man hat die Zahl 360 angenommen, weil sie aus sehr vielen Factoren zusammengesetzet ist. Auch gibt uns die Anzahl der Grade eines Bogens noch nicht dessen wirkliche Länge, sondern nur dessen Verhältniß zu dem ganzen Umkreise an. Wenn z. B. der Bogen AB = 60° ist, so ist dieß also zu verstehen, daß sich seine Länge zu der Länge des ganzen Umkreises verhält, wie 60 zu 360; nähmlich daß der Bogen AB $= \frac{60.\text{ABEFA}}{360} =$ $\frac{1}{6}$ABEFA = dem sechsten Theile des ganzen Umkreises ist. *)

§. 350.

Die Neigung oder Oeffnung zweyer gerader Linien aC und bC, welche in einem Puncte C zusammenlaufen, heißt ein Winkel (angulus). Die Geraden aC und bC werden dessen Schenkel (crura), und der beyden Schenkeln gemeine Punct C dessen Scheitel (vertex) oder Spitze genannt. Man pflegt einen Winkel entweder durch drey Buchstaben, von denen der mittlere den Scheitel bezeichnet, oder auch nur durch einen in die Oeffnung geschriebenen Buchstaben auszudrucken; man sagt z. B. der Winkel ACB oder BCA oder aCb, oder auch der Winkel m.

§. 351.

Die Verlängerung der Schenkel verändert ihre Oeffnung beym Scheitel nicht; daher wird auch ein Winkel durch das Verlängern, oder Verkürzen seiner Schenkel weder größer noch kleiner; sondern ein Winkel wird größer, wenn sich seine Schenkel mehr öffnen, und kleiner, wenn sich diese mehr schließen. Bildet man sich nun ein, daß aus dem Scheitel C

*) Die neueren französischen Mathematiker zertheilen den ganzen Umkreis in vier gleiche Theile, in 4 Quadranten; jeden Quadranten in 100 Centesimal-Grade, jeden solchen Grad in 100 Centesimal-Minuten, und jede solche Minute in 100 Centesimal-Secunden.

C des Winkels aCb ein Kreisbogen ab beschrieben sey; so wird die Anzahl der Grade dieses Bogens das Maß des Winkels seyn. Denn wenn man sich vorstellet, daß der Schenkel bC sich um den Punct C drehe, und mit dem andern Schenkel aC einmahl eine kleinere, und einmahl eine größere Oeffnung mache; so wird auch der Bogen ab dadurch in demselben Verhältnisse einmahl kleiner, und einmahl größer werden: das ist, der Bogen ab wird 2,3,... nmahl kleiner oder größer werden, wenn die Oeffnung aCb 2, 3,... nmahl kleiner oder größer wird. Auch ist es gleichgültig, ob man den Kreisbogen mit einem kleinen Halbmesser aC, oder mit einem größeren AC beschreibet; weil ein Winkel nicht durch die wirkliche Länge des Bogens, sondern nur durch die Anzahl der Grade desselben, das ist durch dessen Verhältniß zu dem ganzen Umkreise gemessen wird, und weil über dieß alle zwischen den Schenkeln AC und BC aus dem Scheitel C beschriebenen Kreisbogen einerley Anzahl der Grade enthalten müssen, da sie zugleich erzeuget werden, wenn sich der eine Schenkel um den Scheitel drehet. Fig. 3.

§. 352.

Es folgt aus diesem, daß man auf einer Geraden ac aus dem Puncte c einen Winkel acb verzeichnen könne, der einem gegebenen Winkel ACB gleich ist, wenn man aus dem Scheitel C des gegebenen Winkels zwischen seinen Schenkeln mit einem beliebigen Halbmesser CA einen Bogen AB, und aus dem gegebenen Puncte c der Geraden ac mit eben demselben Halbmesser einen unbestimmten Bogen ab beschreibt; sodann die Sehne AB aus dem Puncte a auf den unbestimmten Bogen ab aufträgt, und endlich durch den auf diese Art gefundenen Punct b, und durch den gegebenen Punct c eine gerade Linie cb führet. Es kann dieses auch durch Hülfe des bekannten Instrumentes geschehen, welches ein Winkelmesser oder Transporteur genannt wird, und aus einem Halbkreise von Messing ungefähr 3 Zolle im Durchmesser besteht, dessen Rand in 180 Grade abgetheilet ist. Dieses Instrument dient nicht nur auf dem Papiere Winkel zu mes- 4.

Fig. sen, sondern auch Winkel von einer gebenen Anzahl der Grade zu verzeichnen.

§. 353.

Die Winkel werden in rechte, spitzige und stumpfe abgetheilet. Ein rechter Winkel ist derjenige, der den 4ten Theil des ganzen Umkreises, das ist 90° zwischen seinen Schenkeln enthält; hingegen heißt ein Winkel spitzig, wenn er weniger als 90, und stumpf wenn er mehr als 90 Grade enthält.

§. 354.

5. Wenn man die Schenkel AC und BC eines Winkels ACB verlängert; so heißen die zwey entgegengesetzten Winkel ACB und DCE, ingleichen ACD und ECB Scheitelwinkel (anguli verticales); die zwey Winkel ACD nnd DCE, oder auch DCE und ECB u. s. w. werden Nebenwinkel (anguli contigui) genannt. Wenn nähmlich eine Gerade DC eine andere Gerade AE in einem Puncte C schneidet; so heißen die dadurch auf dieser Geraden entstandenen Winkel ACD und DCE Nebenwinkel. Bildet man sich ein, daß aus dem gemeinschaftlichen Scheitel C der Nebenwinkel ACD und DCE mit einem beliebigen Halbmesser CA ein Bogen ADE auf der Linie AE beschrieben sey; so wird dieser Bogen ein halber Umkreis seyn, das ist, er wird 180 Grad enthalten, weil man die Gerade AE als einen Durchmesser ansehen kann (347. IV.). Nun ist der Bogen AD daß Maß des Winkels ACD, und der Bogen DE das Maß des Winkels DCE. nähmlich AD+DE, das ist, der halbe Umkreis oder 180 Grade sind daß Maß beyder Nebenwinkel zusammengenommen; folglich enthalten zwey Nebenwinkel auf einer geraden Linie zusammen 180 Grade. Auf eben dieselbe Art läßt sich erweisen, daß auch ACD + ACB = 180° ist.

Da nun ACD + DCE = 180°
und auch ACD + ACB = 180° ist;
so ist auch ACD + DCE = ACD + ACB
oder DCE = ACB

das

das ist, die Scheitelwinkel sind einander gleich. Man kann Fig. auf eben diese Art darthun, daß ACD = BCE ist u. s. w. 5.
Würde nun einer aus diesen vier Winkeln bekannt seyn, so sind alsogleich auch die drey übrigen bekannt: es sey z. B. ACB = 50°, so ist ACD = 180° — 50° = 130°, DCE = 50°, und ECB = 130°. Auch dieses wird man leicht einsehen, daß alle Winkel um einen Punct C. z. B. ACD, DCE, ECB, BCA, wenn es ihrer noch so viele sind, zusammen 360 Grade ausmachen.

§. 355.

Wenn man die Endpuncte A und B der Schenkel CA und CB eines Winkels ACB mit einer Geraden AB verbindet; so heißt die dadurch von drey Geraden eingeschlossene ebene Fläche ein Dreyeck (triangulum); und die Geraden CA, AB, BC werden dessen Seiten (latera) genannt. Sind nun die drey Seiten eines Dreyeckes von gleicher Länge, so heißt das Dreyeck gleichseitig (aequilaterum); sind nur zwey Seiten einander gleich, so wird das Dreyeck gleichschenkelig (aequicrurum aut isosceles), und endlich ungleichseitig (scalenum) genannt, wenn alle drey Seiten von ungleicher Länge sind. In Hinsicht auf die Winkel heißt ein Dreyeck rechtwinkelig, wenn es einen rechten, stumpfwinkelig, wenn es einen stumpfen Winkel enthält, und endlich spitzwinkelig, wenn alle drey Winkel spitzig sind. In einem rechtwinkeligen Dreyecke wird noch insbesondere die dem rechten Winkel gegenüber stehende Seite die Hypothenuse, und die zwey übrigen Seiten, die den rechten Winkel einschließen, werden die Katheten genannt. Wir müssen hier einige Haupteigenschaften der Dreyecke anführen, die zu der Bestimmung sehr wichtiger Sätze in der Folge unentbehrlich sind, und können die übrigen Eigenschaften weiter unten auseinander setzen, bis wir von den ebenen Figuren, das ist von den begrenzten Ebenen, ausführlich handeln. 6.

§. 356.

Diese Haupteigenschaften der Dreyecke sind folgende:

I.

Fig. 7. I. In jedem Dreyecke ist die Summe zweyer Seiten größer, als die dritte Seite; z. B. (AB + AC) > BC. Dieß erhellet aus (344), weil der gerade Weg von B bis C kürzer ist, als was immer für ein Umweg von B über A bis C.

II. Wenn in zwey Dreyecken ABC und abc zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel einander wechselsweise vollkommen gleich sind; so sind die ganzen Dreyecke einander vollkommen gleich. Z B. wenn BC = bc, BA = ba, und der Winkel B = b ist; so ist auch AC = ac, der Winkel A = a, und C = c. Um diese Gleichheit einzusehen, bilde man sich nur ein, daß das Dreyeck abc auf das Dreyeck ABC dergestalt geleget werde, daß der Scheitel b auf B, und die Seite bc auf BC zu liegen kommen; so werden die Winkel B und b, die Geraden BC und bc, und auch die Geraden BA und ba einander decken, weil sie vermöge der Voraussetzung einander gleich sind. Da nun die Seiten bc und BC, und auch ba und BA einander decken; so muß der Punct a auf A, und der Punct c auf C fallen, und die Seiten ac und AC müssen einander decken, weil ihre Endpuncte über einander fallen; folglich ist die Seite AC = ac. Aus demselben Grunde des Deckens ist auch der Winkel A = a, und C = c (348.)

III. Wenn in zwey Dreyecken ABC, abc zwey Winkel mit der eingeschlossener Seite einander wechselsweise gleich sind; so sind die ganzen Dreyecke einander vollkommen gleich; z. B. wenn B = b, C = c, und BC = bc ist; so ist auch BA = ba, CA = a, und A = a. Denn man lege nur das Dreyeck abc auf das Dreyeck ABC dergestalt, daß die gleichen Seiten bc und BC, die gleichen Winkel b und B, und endlich auch c und C einander decken; so wird die Seite ba auf BA, und ca auf CA liegen, und der beyden Seiten ba und ca gemeinschaftliche Punct a muß in den beyden Geraden BA und CA zugleich, nähmlich in ihrem Durchschnittspuncte oder Scheitel A anzutreffen seyn. Da nun der Punct a in dem Puncte A anzutreffen ist; so müssen die Seiten ba und BA, ca und CA, und auch die

Win-

Winkel a und A einander decken; folglich ist BA = ba, CA = ca, und A = a. Fig. 7.

IV. Wenn in zwey Dreyecken ABC, abc alle drey Seiten einander wechselsweise gleich sind; so sind auch die Winkel die den gleichen Seiten gegenüber stehen, einander gleich; nämlich wenn BC = bc, BA = ba, und CA = ca ist, so ist auch A = a, C = c, und B = b, das ist, die zwey Dreyecke sind einander vollkommen gleich. Um dieses deutlich einzusehen, bilde man sich ein, daß aus den Puncten B und b, ingleichen aus C und c mit den Halbmessern BA = ba, und CA = ca die Umkreise M, N, und m, n gezogen sind, die sich in den Puncten A und a durchschneiden. Nach diesem lege man in Gedanken das Dreyeck *bca mit* seinen Kreisen dergestalt auf BCA, daß die Seiten bc und BC einander decken, das ist, daß der Punct b auf B, und c auf C falle, der Punct a aber nach derjenigen Gegend hin zu liegen komme, nach der A liegt; so werden sowohl die zwey kleinen, als auch die zwey großen Kreise einander decken, weil sie gleiche Halbmesser haben, und ihre Mittelpuncte über einander fallen. Da nun der Punct a in den beyden Umkreisen m und n zugleich, nähmlich in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte sich befindet; so wird er ebenfalls nach dem Auflegen in den beyden Umkreisen M und N zugleich, nähmlich in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte A anzutreffen seyn; folglich werden die Seiten ba und BA, ca und CA, weil ihre Endpuncte übereinander fallen, und auch die Winkel a und A, b und B, c und C einander decken; es ist demnach der Winkel A = a, C = c, und B = b.

II. Abschnitt.

Von der verschiedenen Lage und Stellung der geraden Linien.

§. 357.

Wenn eine Gerade CE auf eine andere Gerade AB dergestalt gezogen ist, daß sie mit derselben gleiche Neben- 8.

win-

Fig. 8. winkel, nähmlich beyderseits rechte Winkel machet; so sagt man, daß CE auf AB senkrecht (perpendikulär) ist. Verlängert man nun CE, so ist der Winkel AEC = BED; weil sie Scheitelwinkel sind. Nun ist auch AEC = CEB; folglich auch CEB = BED, nähmlich diese zwey Nebenwinkel sind einander gleich, jeder derselben ist ein rechter Winkel, und BE ist senkrecht auf CD. Wenn demnach CD auf AB senkrecht ist; so ist auch AB auf CD senkrecht.

§. 358.

Die Eigenschaften der senkrechten Linien sind folgende:

I. Ist AE = EB, und CE senkrecht auf BA, so ist jeder Punct der Senkrechten CE von A eben so weit, wie von B entfernet, z. B. CA = CB, aA = aB u. s. w. Denn in den Dreyecken CEA und CEB sind zwey Seiten AE = EB, und EC = EC mit dem eingeschlossenen rechten Winkel AEC = CEB einander gleich; folglich sind die ganzen Dreyecke einander vollkommen gleich, und CA = CB (356. II.). Eben dieß läßt sich von einem jeden anderen Puncte erweisen.

Ingleichen wenn CE senkrecht auf AB, und CA = CB ist; so ist auch EA = EB, und auch aA = aB u. s. w. Um dieses einzusehen, verlängere man CE, mache ED = EC, und ziehe AD und BD; so ist AD = AC, BD = BC, weil ED = EC, und AB senkrecht auf CD vermöge des Vorhergehenden ist. Da nun BD = BC, nnd BC = CA = AD ist, so ist auch BD = AD. Es ist demnach in den Dreyecken BCD und DCA die Seite AD = BD, AC = BC, und DC = DC; folglich sind sie einander vollkommen gleich, und der Winkel ACD = BCD (356. IV.) Ferner ist in den Dreyecken AEC und CEB die Seite CA = CB, CE = CE, und der eingeschlossene Winkel ACD = BCD; folglich sind auch diese Dreyecke einander vollkommen gleich, und EA = EB. Eben dieses läßt sich von einem jeden anderen Punct erweisen. Wir ziehen hieraus folgenden Schluß; Wenn eine Gerade CD auf AB senkrecht steht, und ein Punct dieser Senkrechten von zwey Puncten A und B der Geraden AB gleichweit entfernt ist; so sind jede zwey

Ent-

Entfernungen was immer für eines Punctes der Senkrech- Fig.
ten CD von den zwey Puncten A und B der Geraden 8.
AB einander gleich.

II. Wenn zwey Puncte C vnd a der Geraden CD von zwey Puncten A und B der Geraden AB gleich weit entfernt, wenn nähmlich CA = CB, und auch aA = aB sind; so ist CD in dem Puncte E senkrecht auf AB. Denn die Dreyecke AaC und aCB sind einander vollkommen gleich, weil ihre Seiten einander wechselsweise gleich sind; folglich ist der Winkel ACa=aCB. Nun ist in den Dreyecken AEC und ECB die Seite CA=CB, CE=CE, und der eingeschlossene Winkel ACE=ECB; folglich sind auch diese Dreyecke einander vollkommen gleich, und der Winkel CEA=CEB. Es sind aber CEA und CEB Nebenwinkel; folglich ist jeder derselben ein rechter Winkel, und CE steht in dem Puncte E senkrecht auf AB. Aus demselben Grunde der Gleichheit der Dreyecke AEC und ECB ist EA=EB.

III. Aus allen Geraden AE, Aa, CA, AD u. s. w., die aus dem Puncte A auf CD gezogen werden können, ist die Senkrechte AE die kürzeste. Denn jede Gerade Aa oder AC, die nicht durch den Punct E gezogen wird, ist größer als AE, welches ich also erweise. Man verlängere die Senkrechte AE, mache EB=EA, und ziehe Ba, BC, BD u. s. w.; so ist Aa=aB, AC=CB, weil EA=EB und CD senkrecht auf AB ist. Nun ist $Aa + aB > AB$ (356. I.): es ist also auch $\frac{Aa+aB}{2} > \frac{AB}{2}$; nähmlich $Aa > AE$, weil $\frac{Aa+aB}{2} = Aa$ und $\frac{AB}{2} = AE$ ist. Eben dieses läßt sich von einer jeden anderen AC, AD. u. s. w. erweisen.

IV. Da nun aus allen diesen Geraden Aa, AE, AD, u. s. w. eine einzige die kürzeste seyn kann; so kann aus einem Puncte A auch nur eine einzige Senkrechte auf CD gezogen werden. Und umgekehrt wenn AE aus allen Geraden, die von dem Puncte A auf CD gezogen werden können, die kürzeste ist; so ist sie senkrecht auf CD. Denn wäre dieses nicht,

Fig. 8. so könnte eine andere Senkrechte z. B. Aa gezogen werden, welche auch die kürzeste wäre; und da wären zwey Geraden AE und Aa zugleich die kürzesten, die aus einerley Puncte A auf CD gezogen sind, welches nicht seyn kann. Nun pflegt man die Entfernung eines Punctes A von einer Geraden CD durch die kürzeste Linie anzugeben, die von A auf DC gezogen werden kann; folglich ist die Entfernung eines Punctes A von einer Geraden CD nichts anders als die Senkrechte AE.

§. 359.

Wir haben erwiesen (358. I.), daß EA = EB, der Winkel ACE = ECB, CAE = CBE ist, wenn CA = CB, und CE senkrecht auf AB ist. Nun aber sind AEC und BEC rechtwinkelige Dreyecke, in denen die Hypothenuse CA = CB, und die Kathete CE = CE ist; folglich können wir sagen, daß zwey rechtwinkelige Dreyecke einander gleich sind, wenn sie die Hypothenuse, und eine Kathete wechselsweise gleich haben.

§. 360.

Die (358.) angeführten Eigenschaften der senkrechten Linien setzen uns in den Stand folgende Aufgaben aufzulösen.

9. I. Eine gegebene gerade Linie DC in zwey gleiche Theile zu zertheilen. Dieses geschieht auf dem Papiere, wenn man aus den Endpuncten D und C mit einerley Halbmesser, der nicht viel kleiner als DC seyn muß, Kreisbogen beschreibet, die sich in F und G durchschneiden, und sodann die Gerade FG zieht, welche die gegebene DC in dem Puncte E in zwey gleiche Theile ED = EC theilet. Denn es ist DF = FC, DG = GC; folglich FG senkrecht auf AB, und ED = EC. Wäre kein Platz übrig den Durchschnitt F jenseits der Geraden DC zu bestimmen; so mache man mit dem Halbmesser DG = CG den Durchschnitt G, und mit einem anderen Halbmesser Df = Cf den Durchschnitt f, und ziehe die Gerade GfE, so ist ebenfalls ED = EC. Auf dem Felde hingegen wird eine gerade Linie in zwey gleiche

Thei-

Theile getheilet, wenn man die gerade Linie ausmißt (das ist, untersucht, wie oft sie eine bekannte Linie, z. B. eine Wiener-Klafter in sich enthalte) und sodann die Hälfte dieses Maßes von dem einen Endpuncte gegen den anderen aufträgt. Dieses Ausmessen einer geraden Linie auf dem Felde geschieht meistentheils mit der Meßkette, deren Länge zehen Klafter beträgt; zuweilen auch mit den Meßbalken, wenn die größte Genauigkeit erforderlich ist; und endlich mit bloßen Schritten, wenn man nur mit einem Beynahe zufrieden seyn kann. Nur ist es dazu erforderlich, daß man sich einen gleichförmigen Schritt angewöhne. Bey uns ist es vorgeschrieben die Schritte also einzurichten, daß 5 Schritte 2 Klaftern gleich seyn. Fig. 9.

II. Aus dem Puncte E der Geraden AB eine Senkrechte zu errichten. Auf dem Papiere schneide man EC = ED ab, beschreibe mit einerley Halbmesser zwey Kreisbogen, die sich in F oder G durchschneiden, und ziehe durch E und F, oder durch E und G die Gerade FG; so ist sie in dem Puncte E senkrecht auf AB. Denn es ist ED = EC, DF = CF; folglich EF senkrecht auf DC (358. II.). Auf dem Felde macht man ebenfalls ED = EC, bemerket die Puncte D, E, C mit Pflöcken, befestiget in D und C die Ende einer Schnur, deren, Mittelpunct F mit einem beliebigen Merkmahle bezeichnet ist, ergreifet diesen Mittelpunct F, bringet die zwey gleichen Theile DF = CF in eine solche Lage, daß sie beyde gerade ausgezogen, und gleich stark gespannt sind, bemerket den Punct F auf der Erde, und zieht sodann die Gerade FEG; so wird sie in dem Puncte E auf AB senkrecht seyn. Sollte aus dem Endpuncte E einer Geraden AE eine Senkrechte errichtet werden, so verlängere man AE um ein beliebiges Stück EC, und verfahre sodann wie zuvor.

III. Durch einen außer der Geraden AB gegebenen Punct G eine Senkrechte auf AB zu ziehen. Man beschreibe aus dem gegebenen Puncte G einen Kreisbogen, welcher die Gerade AB in zwey Puncten D und C schneidet; aus den Puncten D und C beschreibe man mit einem

Fig. 9. beliebigen Halbmesser zwey Kreisbogen, die sich auf dieser oder auf jener Seite der Geraden AB in F oder f durchschneiden, und ziehe sodann die Gerade FG; so wird sie senkrecht auf AB seyn. Denn es ist DG=CG, und Df=Cf, folglich FG senkrecht auf AB (358. H.). Auf dem Felde läßt sich diese Auflösung nicht jederzeit anwenden; wir werden daher weiter unten (364) eine andere Auflösung dieser Aufgabe anführen. Auch merken wir noch an, daß man in der Ausführung auf dem Papiere die Senkrechten gemeiniglich durch Hülfe eines hölzernen rechtwinkeligen Dreyeckes zu ziehen pflegt: nur kommt es darauf an, daß dieses Dreyeck genau rechtwinkelig sey. Man untersucht diese Richtigkeit, wenn man die eine Seite EC eines solchen Dreyeckes FEC an eine gerade Linie AB anlegt, und längst der anderen Seite eine Linie EF zieht; sodann wendet man das Dreyeck um, daß nähmlich die Seite EC in die Lage ED kommt, und zieht längst der andern Seite wieder eine Linie. Wenn nun die zwey gezogenen Linien einander decken, so ist das Dreyeck richtig. Schließen hingegen diese zwey gezogenen Linien einen Winkel ein; so ist das Dreyeck unrichtig, und muß verbessert werden.

§. 361.

10. Zwey gerade Linien AB und CD, die überall gleich weit von einander entfernt sind, heißen gleichlaufend oder parallel. Da nun die Entfernungen der Puncte einer Linie von einer anderen Geraden nichts anders sind, als die Senkrechten, welche von den Puncten der einen Linie auf die andere gezogen werden; so folget, daß bey den Parallelen AB und CD alle Senkrechten AC, DB, GF u. s. w. die aus was immer für Puncten der Linie AB auf CD, oder aus was immer für Puncten der Linie CD auf AB gezogen werden, einander gleich sind. Diese Gleichheit der Senkrechten gibt uns ferner zu erkennen, daß Parallelen niemahls zusammenstoßen oder sich durchschneiden, wenn sie auch in das Unendliche verlängert würden. Einige Meßkünst-

künstler haben dieses für die Erklärung der Parallelen angenommen, und die Gleichheit der Entfernungen daraus gezogen. Fig. 10.

§. 362.

Wenn zwey Parallelen AB und CD von einer Geraden EF geschnitten werden; so sind.

I. Die Wechselwinkel (anguli alterni) m und n, r und s einander gleich. Denn man ziehe nur FG senkrecht auf AB, und EH senkrecht auf CD; so ist in den rechtwinkeligen Dreyecken GFE und FEH die Hypothenuse EF = EF, und die Kathete FG = EH; folglich sind diese Dreyecke einander vollkommen gleich (359), und der Winkel $m = n$. Da über dieß $n + r = 180°$, und $m + s = 180°$ ist; so ist auch $n + r = m + s$, und $r = s$. Sollte nun der eine aus den Wechselwinkeln z. B. x (wenn die Parallelen AB und CD von der Geraden DB geschnitten werden) ein rechter Winkel seyn; so muß auch der andere y ein rechter Winkel seyn: folglich muß jede Gerade DB auch auf CD senkrecht seyn, wenn sie auf die Parallele AB senkrecht ist, das ist: wenn eine Gerade auf eine von zwey Parallelen senkrecht ist, so ist sie auch senkrecht auf die andere.

II. Auch der äußere und innere Winkel auf einerley Seite sind einander gleich; nähmlich $m = p$, $F = r$, $n = z$, u. s. w. Denn es ist $p = n$, und auch $m = n$; also auch $m = p$; ingleichen $F = s$, und $r = s$; also auch $F = r$; u. s. w.

III. Die zwey inneren Winkel auf der nähmlichen Seite enthalten zusammen 180°, oder sind zwey rechten Winkeln gleich; es ist nähmlich $m + r$, oder $n + s = 180°$. Denn es ist $n + r = 180°$; nun ist $n = m$; also auch $m + r = 180°$.

Eben so findet man, daß $p = z$, $E = F$, $E + z = 180°$ ist u. s. w. Alles dieses findet auch statt, wenn drey, vier oder mehr Parallelen von einer geraden Linie geschnitten werden.

§. 363.

Fig. 11. Und umgekehrt wenn zwey Geraden AB und CD von einer dritten EF dergestalt geschnitten werden; daß I. entweder die Wechselwinkel z. B. m = n; II. oder der äußere und innere Winkel auf einerley Seite einander gleich sind; III. oder endlich daß die zwey inneren Winkel zusammen 180° enthalten; so sind die zwey Geraden AB und CD parallel.

Es sey z. B. I. m = n, nähmlich AEF = m. Wäre nun AB nicht parallel zu CD; so könnte durch E eine andere Gerade ab zu CD parallel gezogen werden, und da wäre vermöge des Vorhergehenden aEF = m. Nun aber ist vermöge der Voraussetzung AEF = m; also ist auch AEF = aEF, das ist, der Theil AEF ist dem Ganzen aEF gleich, wenn nicht AB, sondern eine andere Gerade ab durch den Punct E parallel zu CD gezogen wäre, welches ungereimt, und nicht möglich ist. Es ist also auch nicht möglich, daß außer der Geraden AB was immer für eine andere ab zu CD parallel sey, wenn sie durch den Punct E gezogen ist. Wenn demnach m = n ist, so ist AB parallel zu CD. Auf eben diese Art läßt sich erweisen, daß AB zu CD parallel ist, wenn eine der zwey anderen Bedingungen statt findet. Dieses geschieht kürzlich auf folgende Art: Es sey II. m = x; so ist wegen x = n auch m = n; und folglich wegen I. AB parallel zu CD. Endlich sey III. n + CFE = 180°; so ist wegen m + CFE = 180° auch m = n; folglich ist wegen I. AB parallel zu CD. Auch können wir daraus folgern, daß zu einer Geraden CD durch einen gegebenen Punct E nur eine einzige Parallele gezogen werden könne.

§. 364.

Sowohl auf dem Papiere als auf dem Felde wird zu einer Geraden CD durch einen gegebenen Punct E eine Parallele gezogen, wenn man aus dem gegebenen Puncte E die Senkrechte EH auf CD zieht, sodann aus einem beliebigen

Punc-

Puncte C der Geraden CD ebenfalls eine Senkrechte CK errichtet, CA=EH abschneidet, und endlich durch die Puncte A und E die Gerade AB zieht. Diese Gerade AB wird nun parallel zu CD seyn. Denn die zwey inneren Winkel ACH und CAE enthalten zusammen 180 Grade. Die Lage der Geraden AB wird auch gefunden, wenn man durch den gegebenen Punct E eine Gerade EF dergestalt zieht, daß sie CD irgendwo in einem Puncte F durchschneidet, und sodann den Winkel pnq=rms, oder auch x=m verzeichnet (352). Denn die durch p und E, oder durch E und d gezogene Gerade AB wird parallel zu CD seyn, weil die Wechselwinkel m und n, oder der äußere und innere Winkel auf einerley Seite m und x einander gleich sind. In der Ausübung ist es sehr bequem auf dem Papiere die Parallelen durch Hülfe eines hölzernen rechtwinkeligen Dreyeckes zu ziehen Fig. 11.

Und nun können wir auf dem Felde aus einem gegebenen Puncte E eine Senkrechte auf eine Gerade CD ziehen, wenn wir durch Hülfe der Wechselwinkel die Lage der Parallelen AB bestimmen; und sodann in dem Puncte E die Senkrechte EH auf AB errichten (360. II.) Denn die Linie EH wird auch auf CD senkrecht seyn, weil sie auf die Parallele AB senkrecht ist.

§. 365.

Wenn man von einem Puncte des Umkreises mehrere Sehnen AB, AD, AE, AG zieht; so ist 12.

I. Die Sehne AB, welche durch den Mittelpunct geht, nähmlich der Durchmesser, größer, als jede andere Sehne AD oder AE. Denn wenn man die Halbmesser CD, CE zieht; so ist $AC + CD > AD$. Nun aber ist $AC + CD = AC + CB = AB$; es ist also auch $AB > AD$: eben so läßt sich erweisen, daß $AB > AE$ ist.

II. Die übrigen Sehnen sind desto kleiner, je mehr sie sich von dem Durchmesser entfernen; nähmlich $AE < AD$. Denn es ist CD oder $CE < CF + FD$; also auch $CE - CF < CF + FD - CF$; nähmlich $FE < FD$. Ferner ist $AE < AF + FE$; es ist also auch $AE < AF + FD$, wenn man FD statt FE substituiret; das ist $AE < AD$.

§. 366.

Fig. Wir folgern aus diesem, daß in einem halben Umkreise zu größeren Bogen auch größere Sehnen, zu kleineren Bogen auch kleinere Sehnen; und umgekehrt zu größeren Sehnen auch größere Bogen, zu kleineren Sehnen auch kleinere Bogen gehören. Jedoch folgt noch keinesweges daraus, daß zu einem zweyfachen, dreyfachen, nfachen Bogen auch eine 2fache, 3fache, nfache Sehne gehöre.

§. 367.

13 Wenn eine Sehne AB von einer Geraden GD geschnitten wird, und zwey von folgenden fünf Dingen statt finden; I. daß GD durch den Mittelpunct gehe, II. daß GD auf der Sehne AB senkrecht stehe; III. daß die Gerade GD die Sehne AB; IV. daß sie den Bogen ADB, oder endlich V. daß sie den Winkel ACB in zwey gleiche Theile zertheile; so sind jederzeit auch die übrigen drey Dinge richtig.

Denn es sey I. GD durch den Mittelpunct C auf AB senkrecht gezogen; so ist der Punct C der Senkrechten GD von A und B gleich weit entfernt; folglich ist jeder Punct derselben von A und B gleich weit entfernt (358. I.), nähmlich EA = EB, die Sehne DA = DB, der Bogen DA = DB (347. III.); und folglich auch der Winkel m = n (351.).

Es sey II. GD senkrecht auf AB, und EA = EB; so ist wie ehevor die Sehne DA = DB, CA = CB, der Bogen DA = DB, und der Winkel m = n. Ferner ist auch die Sehne GA = GB, und der Bogen GA = GB. Da nun der Bogen GA = GB, und AD = BD ist; so ist auch der Bogen GA + AD = GB + BD, nähmlich GAD = GBD = dem halben Umkreise; folglich ist GD ein Durchmesser, der durch den Mittelpunct geht.

Es sey III. GD durch den Mittelpunct C gezogen, und theile entweder die Sehne, oder den Bogen, oder endlich den Winkel in zwey gleiche Theile; so wird in jedem Falle CA = CB, EA = EB, oder DA = DB; und folglich GD senkrecht auf AB seyn (358. II.) u. s. w.

§. 368.

§. 368.

Diese Eigenschaften setzen uns in den Stand folgende Aufgaben aufzulösen. Fig. 14.

I. Durch drey Puncte, A, B, D, die nicht in einer geraden Linie liegen, und folglich ein Dreyeck ADB bestimmen, einen Kreis zu führen. Dieses geschieht auf folgende Art Man verbinde die Puncte A, B, D durch die Geraden AB und BD, theile jede derselben durch die Senkrechten EF und GH in zwey gleiche Theile; so wird ihr gemeinschaftlicher Durschnittspunct C der Mittelpunct des gesuchten Kreises seyn, der durch die drey Puncte A, B, D zu ziehen ist Denn AB und BD sind Sehnen, welche durch die Senkrechten EF und GH in zwey gleiche Theile getheilet sind; folglich gehen beyde Senkrechten durch den Mittelpunct (367.). Nun aber ist nur der Punct C also beschaffen, daß beyde Senkrechten EF und GH durch denselben gehen; folglich ist dieser Punct C der Mittelpunct des gesuchten Kreises.

Sollten hingegen die drey Puncte A, B, D in einer geraden Linie liegen; so ist es für sich klar, daß sich die Senkrechten niemahls durchschneiden können, weil sie mit einander parallel laufen. Man stellt sich in diesem Falle vor, daß der Durchschnittspunct der Senkrechten sich unendlich weit entferne; und in diesem Verstande kann man eine jede gerade Linie als einen Kreisbogen ansehen, dessen Halbmesser unendlich groß ist.

II. Den Mittelpunct eines Kreisbogens oder auch eines ganzen Umkreises zu finden. Man nehme drey Puncte in dem Bogen an, verbinde sie mit zwey Sehnen, theile jede derselben durch eine Senkrechte in zwey gleiche Theile; so wird dadurch der Mittelpunct, wie im vorigen Falle bestimmet werden. Zu einem ganzen Umkreise kann der Mittelpunct auch auf folgende Art gefunden werden. Man ziehe eine Sehne, theile sie durch eine Senkrechte in zwey gleiche Theile; so wird diese Senkrechte der Durchmesser seyn, welchen man demnach nur noch in zwey gleiche Theile zu zertheilen hat, um den Mittelpunct des gegebenen Kreises zu bestimmen.

Fig. 15. III. Einen Winkel ACB in zwey gleiche Theile zu zertheilen. Man beschreibe mit einem beliebigen Halbmesser den Bogen ADB, aus den Puncten A und B beschreibe man zwey Kreisbogen, die sich in E oder F durchschneiden, und ziehe die Gerade CF; so wird diese den Winkel ACB in zwey gleiche Theile zertheilen, weil sie durch den Mittelpunct C geht, und auf der Sehne AB senkrecht steht. Der Bogen AB hingegen wird in zwey gleiche Theile getheilet, wenn man seine Sehne AB durch die Senkrechte EF in zwey gleiche Theile zertheilet. Da der Winkel DCB oder der Bogen DB wieder auf diese Weise in zwey gleiche Theile getheilet werden kann; so folgt, daß man jeden Winkel oder jeden gegebenen Kreisbogen in 2, 4, 8, 16, 32 gleiche Theile zertheilen könne. Sollte hingegen ein Bogen in 3, 5, 7 .. gleiche Theile zu theilen seyn; so kann es nach den bisher gegebenen Gründen nicht anders als durch das Versuchen (tentando) geschehen.

§. 369.

16. Eine Gerade AB, die in der Ebene des Kreises einem Umkreise in einem einzigen Puncte D begegnet, und übrigens beyderseits gänzlich außer der Kreisfläche liegt, wird eine Tangente (Berührungslinie), und der Punct D der Berührungspunct genannt.

Wenn man an den Berührungspunct D einen Halbmesser CD zieht; so steht er senkrecht auf der Tangente. Denn dieser Halbmesser ist die kürzeste Linie, die aus dem Puncte C auf die Gerade AB gezogen werden kann; folglich steht er in dem Puncte D senkrecht auf AB (358. III.). Und umgekehrt, wenn die Gerade AB auf dem äußersten Puncte des Halbmessers senkrecht steht; so ist sie eine Tangente des Umkreises. Denn diese Senkrechte AB begegnet dem Umkreise in dem einzigen Puncte D, und liegt übrigens gänzlich außer der Kreisfläche, weil ein jeder anderer Punkt derselben z. B. A oder B weiter als D von dem Mittelpuncte C entfernet ist. Es kann demnach bey einer schon gezogenen Tangente der Berührungspunct gefunden

den werden, wenn man aus dem Mittelpuncte eine Fig. Senkrechte auf die Tangente zieht. Und durch einen gegebenen Punct des Umkreises kann eine Tangente gezogen werden, wenn man am Ende des Halbmessers eine Senkrechte errichtet.

Sollte hingegen durch einen gegebenen Punct A 17.
eine Tangente zu einem gegebenen Kreise gezogen werden; so beschreibe man aus A mit einem Halbmesser = AC einen Kreisbogen CD, und aus C mit einem Halbmesser = GF = CE = 2CB einen Kreisbogen ED; durch den Mittelpunct C, und durch den Durchschnittspunct D ziehe man die Gerade CD; und endlich ziehe man durch den auf diese Art gefundenen Durchschnittspunct B des Umkreises, und durch den gegebenen Punct A die Gerade AB: so wird diese in dem Puncte B den gegebenen Kreis berühren. Denn AB ist in dem äußersten Puncte des Halbmessers senkrecht auf CD oder auf CB, weil AC = AD, und BC = BD = $\frac{1}{2}$DC = $\frac{1}{2}$GF = $\frac{1}{2}$CE ist (358. H.).

§. 370.

Wenn sich zwey Kreise berühren, es mag nun der 18.
kleinere Kreis innerhalb des größeren, oder der eine Kreis außerhalb des anderen liegen; so müssen die Mittelpuncte dieser beyden Kreise und der Berührungspunct derselben in einer geraden Linie liegen.

Denn wenn diese beyden Kreise sich außerhalb berühren sollen; so kann, da sie nur einen Punct mit einander gemein haben, die Entfernung der Mittelpuncte von einander nicht kleiner seyn als die Summe der beyden Halbmesser, weil sonst die beyden Kreise in einander greifen, also sich schneiden müßten. Der Berührungspunct ist aber von einem jeden Mittelpuncte um den Halbmesser des Kreises entfernt; also können die Verbindungslinien des Berührungspunctes mit den beyden Mittelpuncten, und die Verbindung der Mittelpuncte selbst, nicht ein Dreyeck einschließen; weil, wenn

Fig. 18. ein Dreyeck entstehen sollte, zwey Seiten zusammen genommen, gleich oder kleiner als die Dritte seyn müßten. Es muß daher der Berührungspunct M in der Verbindungslinie der beyden Mittelpuncte liegen.

Wenn sich aber die beyden Kreise innerhalb berühren; so kann die Entfernung der beyden Mittelpuncte von einander nicht größer seyn als der Unterschied der beyden Halbmesser, weil sonst ein Theil des kleineren Kreises außerhalb des größeren fallen würde, also die beyden Kreise sich schneiden müßten; die Entfernung der Mittelpuncte kann aber auch nicht kleiner seyn als dieser Unterschied, weil dann die beyden Kreise, nicht einen Punct mit einander gemein haben könnten; also ist die Entfernung der beyden Mittelpuncte dem Unterschiede der Halbmesser gleich. Würden die Mittelpuncte und der Berührungspunct nicht in einer geraden Linie liegen; so müßten diese drey Puncte ein Dreyeck bilden, in welchen die Summe zweyer Seiten so groß als die dritte Seite wäre, welches unmöglich ist.

Aus diesem Satze folgt, daß wenn sich mehrere Kreise in einem gemeinschaftlichen Puncte M berühren, die Mittelpuncte B, A, C, D u. s. w. dieser Kreise in einer Geraden liegen müssen, und daß die in M auf diese Gerade errichtete Senkrechte ET eine gemeinschaftliche Tangente dieser Kreise ist.

§. 371.

19. Der Winkel m, nähmlich ATB, welchen die Tangente AT und die Sehne TB in dem Berührungspuncte einschließen, hat zu seinem Maße die Hälfte des Bogens TDB, welchen die Sehne abschneidet; nähmlich $m = \frac{1}{2}$ TDB.

Um dieses einzusehen ziehe man die Durchmesser Ee parallel, und Dd senkrecht auf BT, und dann auch an den Berührungspunct T den Halbmesser CT. Und nun ist $m + x = 90°$, und auch $n + y = 90°$; folglich $m + x = n + y$; es ist aber $x = y$ (362. I.); folglich auch $m = n$. Ferner ist $n = DT$; es ist also auch $m = DT$; und endlich ist DT $= \frac{1}{2}$TDB

$= \frac{1}{2}$ TDB (367.); folglich auch $m = \frac{1}{2}$ TDB. Eben so leicht ist es zu begreifen, daß der Winkel $aTB = \frac{1}{2}TdB$ ist; denn es ist $ATB + aTB = 180° = \frac{1}{2}TBdT = \frac{1}{2}TDB + \frac{1}{2}TdB$; nun aber ist $ATB = \frac{1}{2}TDB$.; es ist also auch $aTB = \frac{1}{2}TdB$. Fig. 19.

§. 372.

Der Winkel x am Umkreise, den zwey Sehnen TB und TD einschließen, hat zu seinem Maße die Hälfte des Bogens, auf welchem seine Schenkel stehen, nähmlich $x = \frac{1}{2}BD$. 20.

Denn man ziehe nur die Tangente ATa; so ist $m + x + n = 180° = \frac{1}{2}TBDET = \frac{1}{2}TFB + \frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}DET$. Nun aber ist $m = \frac{1}{2}TFB$, und $n = \frac{1}{2}DET$; folglich $x = \frac{1}{2}BD$.

Wir ziehen aus diesem folgende Schlüsse.

I. Der Winkel am Umkreise ist die Hälfte des Mittelpunctswinkels, nähmlich $x = \frac{1}{2}BCD$. Denn es ist $BCD = BD$; also auch $\frac{1}{2}BCD = \frac{1}{2}BD$; nun aber ist $x = \frac{1}{2}BD$; es ist also auch $x = \frac{1}{2}BCD$.

II. Alle Winkel am Umkreise E, F, G, H, die auf einem und demselben Bogen ADB oder auf eben derselben Sehne AB stehen, sind einander gleich. Denn jeder derselben hat zu seinem Maße die Hälfte des Bogens ADB. 21.

III. Jeder Winkel am Umkreise, der mit seinen Schenkeln auf den Endpuncten des Durchmessers steht, ist ein rechter Winkel. Denn er hat zu seinem Maße die Hälfte des halben Umkreises, nähmlich $\frac{1}{2}$ von $180° = 90°$. 22.

IV. In einem jeden Vierecke, welches in einem Kreise eingeschrieben ist, enthalten jede zwey gegenüber stehenden Winkel zusammen 180°; nähmlich $x + y = 180°$, und auch $m + n = 180°$. Denn es ist $x = \frac{1}{2}MNB$, und $y = \frac{1}{2}MAGB$; folglich $x + y = \frac{1}{2}MNB + \frac{1}{2}MAGB = \frac{1}{2}MAGNM = 180°$. 23.

V. Zwey parallele Sehnen schließen gleiche Bogen ein; nähmlich $DB = CA$. Denn man ziehe nur die Gerade CB: so ist $a = c$ (362. I.); nun aber ist $a = \frac{1}{2}BD$, und $c = \frac{1}{2}AC$; es ist also auch $\frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AC$, oder $BD = CA$.

Und

Fig. 23. Und umgekehrt, wenn die eingeschlossenen Bogen DB und CA gleich sind: so sind die Sehnen AB und CD parallel; weil in diesem Falle die Wechselwinkel a und c einander gleichen. Auf eben diese Art kann man erweisen, daß die Tangente und eine parallele Sehne gleiche Bogen einschließen; und umgekehrt, daß sie mit einander parallel laufen, wenn die eingeschlossenen Bogen einander gleich sind.

§. 373.

24. Und nun sind wir im Stande an dem Endpuncte B einer Geraden AB eine Senkrechte GD zu errichten, wenn auch die Verlängerung der Geraden AB unmöglich wäre; und zwar auf folgende Art. Man schneide von B gegen A ein beliebiges Stück BE ab; aus B und E beschreibe man mit einerley Halbmesser zwey Kreisbogen, die sich in C durchschneiden; dann ziehe man ECF, mache CF $=$ CE, und führe durch F und B eine Gerade DG; so wird diese in dem Puncte B senkrecht auf AB seyn, weil ABD ein rechter Winkel ist. Denn man bilde sich nur ein, daß aus dem Mittelpuncte C mit dem Halbmesser CE $=$ CB $=$ CF durch die Puncte E, B, F ein Kreis beschrieben ist; so wird man alsogleich einsehen, daß der Winkel EBF $=$ ABD am Umkreise mit seinen Schenkeln auf den Endepuncten des Durchmessers EF stehe, und folglich ein rechter Winkel sey.

§. 374.

25. Ein Winkel FGC am Umkreise, den eine Sehne GF, und eine andere Gerade GC einschließen, deren Verlängerung GD dem Umkreise wieder in einem anderen Puncte D begegnet, hat zu seinem Maße die halbe Summe der Bogen GHF und GED; es ist nähmlich CGF $= \frac{1}{2}$ GHF $+ \frac{1}{2}$ GED.

Denn es ist CGF $+$ FGD $= 180° = \frac{1}{2}$GFDEG $=$ $\frac{1}{2}$ GHF $+ \frac{1}{2}$ GED $+ \frac{1}{2}$ DBF; nun aber ist FGD $= \frac{1}{2}$DBF: folglich ist CGF $= \frac{1}{2}$ GHF $+ \frac{1}{2}$ GED.

§. 375.

§. 375.

Ein Winkel m innerhalb des Umkreises hat zu sei- Fig.
nem Maße die halbe Summe der Bogen DB und EG, 25.
welche seine Schenkel beyderseits einschließen; nähmlich
$m = \frac{1}{2} DB + \frac{1}{2} EG$.

Denn man ziehe nur GF parallel zu AB; so ist $n = \frac{1}{2} DBF = \frac{1}{2} DB + \frac{1}{2} BF = \frac{1}{2} DB + \frac{1}{2} EG$, weil $BF = EG$, oder $\frac{1}{2} BF = \frac{1}{2} EG$ ist. Nun aber ist $n = m$; es ist also auch $m = \frac{1}{2} DB + \frac{1}{2} EG$. Eben so leicht ist es zu erweisen, daß $EAD = \frac{1}{2} ED + \frac{1}{2} GHB$ ist.

§. 376.

Ein Winkel $BAD = n$ außerhalb des Umkreises, 26.
den zwey Geraden AB und AD einschließen, welche ver-
längert die Kreisfläche durchschneiden (ein Winkel zwischen
zwey Secanten) hat zu seinem Maße die halbe Differenz der
eingeschlossenen Bogen nähmlich $n = \frac{1}{2} BD - \frac{1}{2} CE$.

Denn man ziehe nur die parallele Sehne CF; so ist

$$m = \frac{1}{2} BF = \frac{BD - FD}{2} = \frac{1}{2} BD - \frac{1}{2} FD = \frac{1}{2} BD - \frac{1}{2} CE,$$

weil $FD = CE$, oder $\frac{1}{2} FD = \frac{1}{2} CE$ ist; nun aber ist $n = m$; es ist also auch $n = \frac{1}{2} BD - \frac{1}{2} CE$.

Eben so leicht ist es zu erweisen, daß $MAB = \frac{1}{2} BM - \frac{1}{2} MC$, ingleichen daß $MAN = \frac{1}{2} MDN - \frac{1}{2} MEN$ ist. Soll nun MAN ein rechter Winkel seyn; so muß der Bogen MEN $= 90°$ seyn. Denn es sey $MEN = x$; so ist $MBDN = 360 - x$; nun muß $\frac{360 - x}{2} - \frac{x}{2} = 90°$, folglich auch $x = 90°$ seyn.

III. Abschnitt.

Von den Vielecken.

§. 377.

Fig. Eine ebene Fläche von geraden Linien eingeschlossen heißt ein Vieleck (polygonum); eine jede einschließende Linie heißt eine Seite; und alle Seiten zusammen werden der Umfang (perimeter) des Vieleckes genannt. Es gibt auch Flächen, die entweder bloß von krummen, oder theils von krummen, theils von geraden Linien eingeschlossen sind; allein wir handeln dermahlen nur von den Vielecken oder vielmehr nur von dem Umfange solcher Vielecke, die von geraden Linien umgeben sind. Ein Vieleck heißt ins Besondere ein Dreyeck, wenn es von drey, ein Viereck, wenn es von vier, ein Fünfeck, wenn es von fünf Seiten eingeschlossen ist, u. s. w. nähmlich Sechseck, Siebeneck, Achteck.....nEck. Einige Schriftsteller nennen diejenigen ebenen Flächen Vielecke, welche von mehr als vier geraden Linien eingeschlossen sind. Eine begrenzte Ebene aber nennen sie überhaupt eine ebene Figur. Von den Dreyecken haben wir die Benennungen schon gegeben, und merken hier nur noch an, daß zwey oder mehr Dreyecke einander ähnlich heißen, wenn die Winkel des einen den Winkeln des anderen Dreyeckes wechselsweise gleich sind, weil solche Dreyecke vollkommen auf eine gleiche Art bestimmet sind, und nur bloß vermöge ihrer wirklichen Größe von einander können unterschieden werden; nnd daß in einem Dreyecke die Senkrechte von der Spitze eines Winkels auf die gegenüber stehende Seite gezogen die Höhe, und die Seite, auf welche die Senkrechte gezogen wird, die Grundlinie (basis) des Dreyeckes genennet wird. Bey den Vierecken aber kommen folgende Benennungen vor. Ein Viereck heißt ein Parallelogramm, wenn jede zwey gegenüber stehenden Seiten
27. parallel sind (Fig. 27 ... 30.). Ein Parallelogramm von gleichen Seiten und Winkeln wird ein Quadrat (Fig. 27); ein
28. Parallelogramm von gleichen Winkeln und ungleichen Seiten ein Rechteck (ABCD Fig. 28.), ein Parallelogramm von

glei-

gleichen Seiten und ungleichen Winkeln einen Rhombus oder eine Raute (Fig. 29.); und endlich ein Parallelogramm von ungleichen Seiten und Winkeln ein Rhomboides oder eine längliche Raute (Fig. 30.) genannt. Die Senkrechte, welche von der einen auf die gegenüber stehende Seite eines Parallelogramms gezogen wird, heißt die Höhe, und eine jede dieser zwey Seiten die Grundlinie des Parallelogramms. Ein Viereck in welchem nur zwey gegenüber stehende Seiten parallel sind, heißt ein Trapezium (Fig. 31); läuft hingegen in einem Vierecke keine einzige Seite mit der anderen parallel; so heißt es ein Trapezoides (Fig. 32.). Ueberhaupt werden die Vielecke in unregelmäßige, wenn weder die Seiten noch die Winkel am Umfange einander gleich sind; in symmetrische, wenn sie von einer geraden Anzahl der Seiten umgeben werden, deren jede zwey gegenüber stehende einander gleich und parallel sind (Fig. 27..30..33.); und endlich in regelmäßige abgetheilet, in denen alle Seiten und Winkel einander gleich sind (Fig. 27. 34.). Der Winkel am Umfange eines Vieleckes von zwey Seiten eingeschlossen heißt der Vieleckswinkel oder Polygon-Winkel (angulus polygoni); er ist ausgehend wie m, oder eingehend wie n Fig. 33.). Eine Gerade von einem Vieleckswinkel zu einem andern über die Fläche des Vieleckes gezogen, heißt eine Diagonale als AB Fig. 31. AC, AD, AE, AB Fig. 34. ingleichen AD, BE, CF Fig. 33.

29. 30. 31. 32. 33. 34.

§. 378.

In einem jeden Dreyecke ABC enthalten alle drey Winkel zusammen 180°, oder sie sind zwey rechten Winkeln gleich; nähmlich $m + x + z = 180°$. 35.

Denn man ziehe nur durch den Scheitel C eines Winkels z zu der gegenüber stehenden Seite AB eine Parallele EF; so ist $n + z + y = 180°$. Nun aber ist $y = x$, und $n = m$; es ist also auch $m + z + x = 180°$.

Wir ziehen aus diesem folgende Schlüsse.

I. In einem Dreyecke ist nicht mehr als nur Ein rechter, und um so mehr auch nur ein einziger stumpfer

pfer Winkel möglich, und in einem solchen Falle müs-
Fig. 35. sen die zwey übrigen beyde spitzig seyn.

II. In einem rechtwinkeligen Dreyecke müssen die zwey spitzigen Winkel zusammen 90° enthalten; sollte demnach der eine bekannt z. B. = 50° seyn; so ist auch der zweyte bekannt, und = 90 — 50 = 40°.

III. Wenn zwey Winkel in einem Dreyecke gegeben sind; so ist dadurch auch der dritte Winkel bestimmet. Es sey z. B. m = 60; x = 40; so ist z = 180° — (m + x) = 180° — 100° = 80°.

40. IV. Wenn zwey Winkel eines Dreyeckes zwey Winkeln eines andern Dreyeckes wechselsweise gleich sind; so ist auch der dritte Winkel dem dritten gleich, und die Dreyecke sind einander ähnlich. Sollte in diesem Falle auch noch eine Seite des ersten der gleichnahmigen Seite des zweyten Dreyeckes gleich seyn; so sind die Dreyecke einander vollkommen gleich. Man bezeichne z. B. in einem Dreyecke die drey Winkel mit A, B, C, und in dem andern mit a, b, c; und es sey dabey A = a, B = b; so ist C = c. Denn weil A + B + C = 180°, und a + b + c = 180° ist; so ist auch A + B + C = a + b + c; und beyderseits A = a, B = b, nähmlich A + B = a + b, abgezogen bleibt C = c. Wenn nun dabey auch noch eine Seite des ersten der gleichnahmigen Seite des zweyten Dreyeckes gleich ist; so erhellet, daß die Dreyecke einander vollkommen gleich sind. (356. III.).

35. V. Wenn zwey Geraden AD und BG einer Dritten AB dergestalt begegnen, daß die Winkel m + x < 180° sind; so stoßen die Geraden AD und BG auf dieser Seite zusammen, wenn sie genugsam verlängert werden; und entfernen sich auf der entgegengesetzten Seite der Geraden AB immer mehr von einander, wenn die Winkel DAB + GBA > 180° sind. Denn wenn m + x < 180° ist; so entsteht durch die Verlängerung der Geraden AD und BG ein Winkel, der sich angeben läßt, und mit den vorigen zweyen m und x zusammengenommen in dem so entstandenen Dreyecke 180° oder zwey rechten Winkeln gleich ist. Wenn nun aber die Winkel DAB + GBA > 180° sind; so

sind

sind deren Nebenwinkel $m + x < 180°$; folglich stoßen diese zwey Geraden DA, GB gegen C verlängert zusammen, und entfernen sich daher auf dieser Seite von einander, wo die Winkel $DAB + GBA > 180°$ sind. Daß die Nebenwinkel $m + x < 180°$ seyn müssen, wenn $DAB + GBA > 180°$ sind, erhellet aus Folgendem: es ist $DAB + m = 180°$, und $GBA + x = 180°$; also $DAB + m + GBA + x = 360°$; und hiervon $DAB + GBA > 180°$ abgezogen, bleibt $m + x < 180°$. Fig. 35.

VI. Wenn man aus der Spitze eines Winkels C in einem Dreyecke ABC auf die gegenüber stehende Seite AB eine Senkrechte CD zieht; so fällt sie in das Dreyeck, wenn die anliegenden Winkel m, n spitzig sind; hingegen liegt die Senkrechte BE gänzlich außer dem Dreyecke, wenn p ein stumpfer Winkel ist. Denn würde die Senkrechte in das Dreyeck fallen, und die Lage Be haben; so müßte das Dreyeck BeC einen rechten BeC und einen stumpfen Winkel BCe haben, welches nicht seyn kann. Eben so kann man erweisen, daß die Senkrechte CD in dem Dreyecke liegen müsse. 36.

§. 379.

Wenn man die Seite AC eines Dreyeckes ACB verlängert; so ist der äußere Winkel $BCE = q$ des Dreyeckes der Summe der zwey gegenüber stehenden Winkel gleich, nähmlich $q = m + n$. Denn es ist $m + n + p = 180°$, und auch $p + q = 180°$; folglich auch $p + q = m + n + p$, und endlich $q = m + n$.

§. 380.

Aus diesem folget, daß ein Winkel ABC zwischen zwey Parallelen der Summe der Winkel gleich ist, die seine Schenkel mit den Parallelen einschließen, nähmlich $q = m + n$. 37.

Denn man verlängere nur AB bis in D; so ist $q = p + r$; nun aber ist $p = m$, und $r = n$; folglich auch $q = m + n$.

Hingegen ist ein Winkel ABC außer zwey Parallelen der Differenz der zwey Winkel gleich, welche seine Schen- 38.

Fig. 38. Schenkel mit den Parallelen einschließen, nähmlich $q = n - m$. Denn es ist $p = q + r$, oder $q = p - r$; nun aber ist $p = n$, und $r = m$; folglich auch $q = n - m$.

§. 381.

39. In einem jeden Dreyecke stehet einem größeren Winkel auch eine größere Seite, einem kleineren Winkel auch eine kleinere Seite, und umgekehrt, entgegen.

Denn man bilde sich nur ein, daß um das Dreyeck ABC ein Kreis beschrieben sey (368.), und es sey $A > C$; so ist auch $\frac{1}{2}BaC > \frac{1}{2}BcA$, weil $A = \frac{1}{2}BaC$ und $C = \frac{1}{2}AcB$ (vermöge 372), oder $BaC > BcA$ ist; es ist also auch die Sehne, oder die Seite $BC > BA$ (366). Ingleichen wenn $BC > BA$ ist; so ist auch der Bogen $BaC > BcA$; folglich auch $\frac{1}{2}BaC > \frac{1}{2}BcA$, und endlich $A > C$, u. s. w.

§. 382.

Wir ziehen aus diesem folgende Schlüsse.

I. In einem jeden Dreyecke sind gleichen Winkeln auch gleiche Seiten, und umgekehrt, entgegengesetzet.

II. Ein gleichseitiges Dreyeck ist auch gleichwinkelig und folglich regelmäßig; jeder Winkel desselben enthält $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$

Es kann demnach auf einer gegebenen Geraden ein regelmäßiges oder gleichseitiges Dreyeck verzeichnet werden, wenn man aus den Endpuncten der gegebenen Linie mit einem Halbmesser der dieser Geraden gleich ist, zwey Kreisbogen beschreibet, und deren Durchschnittspunct mit den Endpuncten der gegebenen Linie durch zwey Geraden verbindet.

III. In einem gleichschenkeligen Dreyecke sind die den gleichen Schenkeln gegenüber stehenden Winkel einander gleich, und beyde spitzig. Und umgekehrt, wenn in einem Dreyecke zwey Winkel einander gleichen, so ist es gleichschenkelig.

IV. Wenn in einem gleichschenkeligen Dreyecke nur ein Winkel bekannt ist, so sind alsogleich auch die zwey übrigen bekannt.

V. Wenn in einem gleichschenkeligen Dreyecke aus der Spitze des Winkels, den die gleichen Schenkel einschließen, auf die gegenüber stehende Seite eine Gerade gezogen wird, und eines von folgenden drey Dingen statt findet: I. daß der Winkel, II. daß die gegenüber stehende Seite in zwey gleiche Theile getheilet sey, III. daß diese Gerade auf der gegenüber stehenden Seite senkrecht stehe; so müssen jederzeit auch die zwey übrigen richtig seyn: und umgekehrt, wenn zwey aus diesen drey Dingen statt finden; so ist das Dreyeck gleichschenkelig. Fig. 39.

§. 383.

I. Wenn bey zwey Dreyecken ABC und abc die Seiten des einen mit den Seiten des anderen Dreyeckes wechselsweise parallel laufen; so sind diese Dreyecke einander ähnlich; das ist die Winkel des einen sind den Winkeln des anderen Dreyeckes wechselsweise gleich; nähmlich $C = c$, $A = a$, $B = b$. 40.

Denn man verlängere nur eine Seite des ersten, und zwey Seiten des anderen Dreyeckes, bis sie einander durchschneiden; so ist $m = c$, und auch $m = C$, folglich $C = c$. Ingleichen ist $n = a$, und auch $n = A$; also auch $A = a$. Da nun $C = c$, und $A = a$ ist; so ist auch $B = b$.

II. Wenn bey zwey Dreyecken ABC und abc die Seiten des einen Dreyeckes, oder deren Verlängerungen, auf den Seiten des anderen Dreyeckes, oder auf deren Verlängerungen wechselsweise senkrecht stehen; so sind diese Dreyecke einander ähnlich. 94.

Denn es sey die Seite ab auf der Seite AB, die Seite ac auf AC, und die Verlängerung bD der Seite bc auf BC senkrecht; so ist vermöge dieser Voraussetzung $p + q = 90°$. Es ist aber in dem rechtwinkeligen Dreyecke AEa, wegen des rechten Winkels bey E, und (378.) $t + p = 90°$, folglich $p + q = t + p$, und $q = t$.

Ferner ist in den zwey Dreyecken BaD und abD (378.) die Summe aller Winkel, nähmlich $m + s + v + u = 2.180° = 360°$; es ist aber vermöge der Voraussetzung $v = 90°$, und $u = 90°$, diese beyden Winkel abgezogen,

Fig. 94. gibt $m + s = 180°$. Nun ist auch (354.) $s + r = 180°$; folglich $m + s = s + r$, und $m = r$.

Da nun die zwey Winkel t und q, m und r einander wechselsweise gleich sind; so ist auch der dritte Winkel C des einen Dreyeckes dem dritten Winkel c des anderen Dreyeckes gleich; und folglich sind die beyden Dreyecke ABC und abc einander ähnlich.

§. 384.

41. **Wenn ein Dreyeck abc auf ein ähnliches und grösseres ABC dergestalt geleget wird, daß der gleiche Winkel b auf B, die Seite ba auf BA, und die Seite bc auf BC zu liegen komme; so wird die dritte Seite ac mit AC parallel laufen.**

Denn es ist $a = A$, oder $C = c$. Nun sind a und A, oder c und C der äußere und innere Winkel auf einer und derselben Seite; folglich ist ac parallel zu AC (363.). Eben so könnte man erweisen, daß die Seite ab mit AB parallel laufen müßte, wenn c auf C, und ca auf CA gelegt würde; u. s. w.

§. 385.

42. **Alle Polygon-Winkel (Vieleckswinkel) eines jeden Vieleckes, welches keine eingehenden Winkel hat, enthalten zusammen so vielmahl 180°, als es Seiten oder Winkel gibt, weniger 360°.**

Bey den Dreyecken ist dieser Satz einleuchtend, weil $180° = 3 \cdot 180° - 360°$ ist; aber er ist auch bey den übrigen Vielecken eben so richtig. Denn man bilde sich nur ein, daß aus einem inner dem Vielecke nach Belieben angenommenen Puncte P in alle Vieleckswinkel gerade Linien gezogen sind; so wird das Vieleck dadurch in so viele Dreyecke getheilet, als es Seiten oder Winkel hat. Nun enthält ein jedes Dreyeck 180°; folglich enthalten alle Dreyecke zusammen so vielmahl 180° als es Seiten oder Vieleckswinkel gibt. Es sind aber die Winkel dieser Dreyecke, weniger die Winkel um den Punct P, allen Vieleckswinkeln zusammen genommen gleich, und die Winkel um den Punct P sind $= 360°$ (354.); folglich sind

al-

alle Polygon-Winkel eines Vieleckes, welches keine eingehenden Winkel hat, so vielmahl 180° als es Seiten oder Winkel hat, weniger 360° gleich. Fig. 42.

Z. B. $A + B + C + D + E = 5.180° - 360° = 900° - 360° = 540°$; denn es ist $b + m + c + d + n + e + f + p + g + h + q + i + k + l + a = 5 . 180°$; es ist also auch $a + b + c + d + e + f + g + h + i + k = 5 . 180° - (m + n + p + q + P)$; nun ist aber $(m + n + p + q + P) = 360°$, und $(a + b + c + d + \ldots\ldots) = A + B + C + D + E$; folglich $A + B + C + D + E = 5 . 180° - 360° = 540°$.

Es folgt aus diesem I. daß an einem Vielecke, welches keinen eingehenden Winkel hat, alle äußeren Winkel, welche durch die Verlängerung der Seiten entstehen, zusammen 360° enthalten. Denn es sey die Anzahl der Seiten oder Vielecks-winkel $= n$, die Summe aller inneren Winkel oder aller Vielecks-winkel $= s$, und die Summe aller äußeren Winkel $= x$; so ist $x + s = n . 180°$. Nun aber ist $s = n . 180° - 360$; folglich $x + n . 180° - 360° = n . 180°$, oder $x = 360°$.

II. Jeder Winkel in einem Quadrate und auch in dem Rechtecke ist ein rechter Winkel. Denn die vier einander gleichen Winkel enthalten zusammen 360°; folglich ist ein jeder derselben $= 90°$. Es kann demnach auf einer gegebenen Linie ein Quadrat oder ein regelmäßiges Viereck verzeichnet werden, wenn man an den Endpuncten der gegebenen Linie senkrechte Linien errichtet, jede derselben der gegebenen Geraden gleich macht, und endlich die dadurch bestimmten Puncte mit einer Geraden verbindet. Eben so kann aus zwey gegebenen Geraden ein Rechteck verzeichnet werden, wenn man an den Endpuncten der ersten senkrechte Linien errichtet, jede derselben der zweyten gegebenen Geraden gleich machet, und endlich die auf diese Art bestimmten zwey Puncte mit einer Geraden verbindet.

III. Jeder Polygon-Winkel eines regelmäßigen Fünfecks enthält $\frac{5 . 180 - 360}{5} = 180 - 72 = 108°$. Man kann

Fig. demnach auf einer gegebenen Geraden ein regelmäßiges Fünfeck verzeichnen, wenn man an den Endpuncten der gegebenen Linie durch Hülfe des Transporteurs Winkel von 108° errichtet; jeden Schenkel dieser zwey Winkel der gegebenen Geraden gleich machet, und endlich wieder an den Endpuncten dieser Schenkel Winkel von 108° verzeichnet. Jedoch dieses Verzeichniß ist nur mechanisch oder handwerksmäßig, und nicht geometrisch; wir werden weiter unten Gelegenheit haben die geometrische Verzeichnung eines regelmäßigen Fünfeckes zu zeigen.

IV. Ueberhaupt jeder Polygon-Winkel eines regelmäßigen n Eckes enthält $\frac{n.180-360}{n} = 180 - \frac{360°}{n}$. Z. B. der Polygon-Winkel bey einem regelmäßigen Sechsecke ist $= 120°$, beym Siebenecke $= 128\frac{4°}{7}$, Achtecke $= 135°$, Neunecke $= 140°$, Zehnecke $144°$, Eilfecke $= 147\frac{3}{11}°$, Zwölfecke $= 150°$, u. s. w.

§. 386.

43. Wenn in einem Vierecke jede zwey gegenüber stehenden Seiten mit einander parallel laufen; so sind sie auch einander gleich. Denn man ziehe nur die Diagonale CB; so ist $m = n$, $p = q$, und $BC = BC$, also auch $CD = AB$, und $DB = AC$ (356. III.).

Und umgekehrt, wenn jede zwey gegenüber stehenden Seiten einander gleich sind; so sind sie auch parallel. Denn da $AB = CD$, $AC = BD$, und $BC = BC$ ist; so ist auch $m = n$, und $p = q$; folglich AB parallel zu CD und AC parallel zu BD (303.).

Und endlich wenn nur zwey entgegengesetzte Seiten gleich und parallel sind; so sind auch die anderen zwey gleich und parallel. Denn es sey AB gleich und parallel zu CD; so ist in den Dreyecken CAB und CDB die Seite $AB = CD$, $BC = BC$, und der Winkel $n = m$; folglich auch $AC = BD$, der Winkel $p = q$, und AC parallel zu BD.

§. 387.

§. 387.

Bey den Parallelogrammen sind auch nachstehende Sätze zu merken. Fig. 43.

I. Jedes Parallelogramm wird durch die Diagonale BC in zwey vollkommen gleiche Dreyecke getheilet Und deßwegen ist ein jedes Dreyeck ABC nichts anders als die Hälfte eines Parallelogramms ABDC, welches zwey Seiten und den eingeschlossenen Winkel mit denselben gleich hat. Dieses erhellet aus der Gleichheit der Dreyecke ACB und CBD.

II. Jede der zwey Diagonalen AD und CB in einem Parallelogramme wird in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte M wegen der Gleichheit der Dreyecke CMA und DMB in zwey gleiche Theile getheilet. Sollte nun das Parallelogramm ein Rechteck seyn wie ABCD (Fig 28); so ist MA = MB = MC = MD. Es kann demnach auf einer viereckigen Fläche z. B. auf einem Bogen Papier abcd gar leicht ein Rechteck verzeichnet werden, wenn man die Diagonalen ac und bd zieht, sodann MA = MB = MC = MD machet, und endlich die Puncte A, B, C, D mit geraden Linien verbindet. 28.

III. Jede durch den Durchschnittspunct M der Diagonalen AD und BC gezogene Gerade PQ theilet sowohl das Parallelogramm, als auch sich selbst in zwey gleiche Theile. Dieses erhellet aus der Gleichheit der Dreyecke CMQ und PMB. Es ist demnach in einem jeden Parallelogramme der Durchschnittspunct der Diagonalen zugleich der Mittelpunct der Größe des Parallelogramms. Denn derjenige Punct in einer ebenen Figur, durch den eine jede Gerade von was immer für einem Puncte des Umfanges zu einem anderen gezogen sowohl die Fläche als auch sich selbst in zwey gleiche Theile theilet, heißt der Mittelpunct der Größe dieser nähmlichen Figur. 43.

§. 388.

Nicht das Parallelogramm allein, sondern jedes symmetrische Vieleck hat einen Mittelpunct der Größe.

Denn

Fig. 33. Denn man ziehe nur die gerade entgegengesetzten Winkel durch Diagonalen AD, BE, CF zusammen; so wird man sehen, daß wegen der vollkommenen Gleichheit jeder zwey gerade entgegengesetzten Dreyecke AMB und DME, BMC und EMF u. s. w. jede Diagonale in dem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte M in zwey gleiche Theile getheilet ist; und daß nicht nur jede Diagonale, sondern auch jede andere Gerade PQ sowohl sich selbst, als auch die Fläche des symmetrischen Vieleckes in zwey gleiche Theile theilet. Daß hingegen die unsymmetrischen Vielecke, wenn sie auch regelmäßig sind, keinen Mittelpunct der Größe haben, wird ein jeder selbst einsehen können.

§. 389.

44. Zwey Parallelogramme ABDC und ECDF auf einerley Grundlinie CD sind einander am Flächeninhalte gleich, wenn sie gleiche Höhen haben, oder zwischen zwey Parallelen stehen.

Denn es ist das Dreyeck.....ACE = BDF. Man subtrahire beyderseits BGE; so ist ACGB = EGDF, und addire beyderseits CGD; so ist ACDB = ECDF.

§. 390.

Wir schließen aus diesem

45. I. Daß auch zwey Dreyecke, die auf eben derselben Grundlinie zwischen zwey Parallelen stehen, einander am Flächeninhalte gleich sind, nähmlich ACD = ECD. Denn es ist ACDB = ECDF; also auch $\frac{1}{2}$ ACDB = $\frac{1}{2}$ ECDF, nähmlich es ist am Flächeninhalte das Dreyeck ADC = ECD. Eben so leicht ist es einzusehen, daß am Flächeninhalte das Dreyeck ADE dem Dreyecke ACE gleich ist, wenn man zu ED und EC aus dem Puncte A Parallelen führet.

46. II Daß auch Parallelogramme ABDC und EGHF, oder Dreyecke BCD und EGH zwischen zwey Parallelen, wenn sie gleiche Grundlinien CD = GH haben, einander am Flächeninhalte gleich sind, obschon sie nicht auf eben derselben Grundlinie stehen. Denn man ziehe

nur

nur CE und DF; so ist ACDB = ECDF, und auch EGHF Fig.
= ECDF; folglich auch ACDB = EGHF, und $\frac{1}{2}$ACDB 46.
= $\frac{1}{2}$ EGHF, es ist nähmlich das Dreyeck BCD = EGH. Da nun Parallelogramme und Dreyecke zwischen zwey Parallelen gleiche Höhen BM = EN haben; so können wir sagen: daß Parallelogramme und Dreyecke, die gleiche Grundlinien und Höhen haben, einander am Flächeninhalte gleich sind.

III. Daß Parallelogramme von einerley Höhe sich 47.
am Flächeninhalte gegen einander verhalten, wie ihre Grundlinien, ADCB : EHGF = AD : EH, wenn diese zwey Parallelogramme einerley Höhe haben Zur Ueberzeugung übertrage man die Grundlinie des kleineren Parallelogramms auf die Grundlinie des größeren z. B bis N, so daß EN = AD wird, theile die Grundlinie EH des größeren Parallelogramms in eine so große Anzahl gleicher Theile, daß der Punct N mit einem Theilungspuncte über einander falle, und ziehe sodann durch alle Theilungspuncte die Parallelen ab, NM, cd, u. s. w. Wenn nun EH in n gleiche Theile, deren jeder gleich Ea sey, getheilet ist, und der Punct N mit dem mten Theilungspuncte übereinfällt; so ist $\frac{EH}{n}$ = Ea, oder n = $\frac{EH}{Ea}$; und auch $\frac{EN}{m}$ = Ea, oder m = $\frac{EN}{Ea}$. Nun ist m. EabF = ENMF, und n. EabF = EHGF, oder $\frac{EN}{Ea}$. EabF = ENMF und $\frac{EH}{Ea}$. EabF = EHGF, wenn wir für m und n ihre Werthe setzen; folglich ENMF : EHGF = $\frac{EN}{Ea}$. EabF : $\frac{EH}{Ea}$. EabF (186.); oder ENMF : EHGF = EN : EH (187. V.); und endlich ADCB : EHGF = AD : EH, wenn wir ADCB für ENMF, und AD für EN substituiren.

Wenn das Verhältniß AD : EH irrational wäre; so müßte man die größere Grundlinie in Gedanken in eine unend-

liche

Fig. liche Anzahl gleicher Theile zertheilen, damit die kleinere Grund-
47. linie genau bis auf einen Theilungspunct reiche, wenn sie auf die größere übertragen wird; wäre z. B. AD : EH = 3 : V 65; so wäre auch ABCD : EFGH = 3 : V 65.

§. 391.

Auch Dreyecke von einerley Höhe und verschiedenen Grundlinien verhalten sich am Flächeninhalte gegen einander, wie ihre Grundlinien, nähmlich ABD : EFH = AD : EH.

Denn es ist ABCD : EFGH = AD : EH; also auch $\frac{1}{2}$ABCD : $\frac{1}{2}$EFGH = AD : EH; nun ist $\frac{1}{2}$ABCD = ABD, und $\frac{1}{2}$EFGH = EFH; folglich ABD : EFH = AD : EH.

Einige Meßkünstler haben diesen Satz von den Drey-
48. ecken unmittelbar auf folgende Art erwiesen. Man bilde sich ein, daß die Höhe CD eines Dreyeckes ABC in eine unendliche Anzahl gleicher Theile zertheilet sey; man ziehe in Gedanken durch die Theilungspuncte Parallelen zu der Grundlinie AB; so werden dadurch unendlich viele Trapezien entstehen, deren Summe dem Dreyecke ABC gleich ist. Die Summe dieser Trapezien läßt sich bestimmen; sie ist = AB . $\frac{1}{2}$CD. Denn die Trapezien, weil sie eine unendlich kleine Höhe haben, können für die Parallelen selbst angesehen werden, wenn man diesen Parallelen eine unendlich kleine Dicke oder Breite zueignet. Nun wachsen diese Parallelen von der Spitze C bis zu der Grundlinie AB in einer arithmetischen Reihe des ersten Ranges (nähmlich jede vorhergehende Parallele von der nächst darauf folgenden abgezogen läßt immer einerley Differenz zurück); das erste Glied dieser Reihe ist gleich Nulle = o nähmlich die Spitze C des Dreyeckes, das letzte Glied ist die Grundlinie AB, und die Anzahl der Glieder ist die Höhe CD; folglich ist die Summe aller dieser Parallelen = (o + AB) . $\frac{1}{2}$CD = AB . $\frac{1}{2}$CD (232. I.) Es ist also auch die Summe aller Trapezien, oder der Flächeninhalt des Dreyeckes ABC = AB . $\frac{1}{2}$CD. Eben so ist der Flächeninhalt des Dreyeckes ECB = EB . $\frac{1}{2}$CD; folglich ABC : ECB = AB . $\frac{1}{2}$CD : EB . $\frac{1}{2}$CD, (186.); oder

ABC

ABC:EBC = AB:BE, das ist, Dreyecke von gleichen Hö- Fig.
hen und verschiedenen Grundlinien verhalten sich am Flächen- 48.
inhalte gegen einander, wie ihre Grundlinien. Daß jede vorhergehende Parallele von der nächst darauf folgenden abgezogen immer einerley Differenz zurück lasse, wird ein jeder leicht einsehen, wenn er die unendlich kleinen und einander vollkommen gleichen Dreyecke längst den Seiten CA und CB in Erwägung zieht.

§. 392.

Um ein jedes gegebenes regelmäßiges Vieleck 49.
ABDFGH kann ein Kreis dergestalt geführet werden, daß die Scheitel aller Winkel in dem Umkreise liegen.

Denn man theile nur zwey nebenliegende Vielecks-winkel, z. B. HAB und ABD durch die Geraden AC und BC in zwey gleiche Theile, und ziehe von ihrem Durchschnittspuncte C in die Scheitel aller Vielecks-winkel die Geraden CD, CF, CG. CH; so ist wegen des gleichschenkeligen Dreyeckes ACB die Gerade CA = CB. Ferner ist wegen der vollkommenen Gleichheit der Dreyecke ACB und BCD die Gerade CA = CD = CB, und der Winkel CDB = CAB = CBD = $\frac{1}{2}$ ABD = $\frac{1}{2}$ BDF. Eben so ist wegen der Gleichheit der Dreyecke BCD und DCF die Gerade CF = CB = CD = CA u. s. w. Da nun CA = CB = CD = CF ist u. s. w.; so sind die Scheitel aller Vielecks-winkel von dem Puncte C gleich weit entfernt; folglich liegen sie in einem Umkreise, der aus dem Durchschnittspuncte C mit einem Halbmesser CA = CB beschrieben wird.

§. 393.

Es folget aus diesem

I. Daß ein jedes regelmäßiges Vieleck durch die Geraden CA, CB, CD u. s. w. in so viele gleichschenkelige, und einander vollkommen gleiche Dreyecke zerfället werde, als es Seiten oder Vielecks-winkel hat.

Fig. 49. II. Daß jede Seite des Vieleckes einen Bogen von $\frac{360}{n}$ Graden abschneidet, wenn das Vieleck n Seiten enthält. Oder der Mittelpunctswinkel eines regelmäßigen Vieleckes, z. B. ACB ist von $\frac{360}{n}$ Graden, wenn das Vieleck n Seiten enthält. So ist der Mittelpunctswinkel in einem gleichseitigen Dreyecke, nähmlich ACD oder ACG $= \frac{360}{3} = 120°$; der Mittelpunctswinkel in einem Vierecke $= \frac{360}{4} = 90°$, in einem Fünfecke $= \frac{360}{5} = 72°$; der Mittelpunctswinkel in einem regelmäßigen Sechsecke, nähmlich $ACB = \frac{360}{6} = 60°$, und folglich $CAB + CBA = 180 - 60 = 120°$; nun aber ist das Dreyeck ABC gleichschenkelig, folglich der Winkel $CAB = ABC = \frac{120}{2} = 60°$; es ist also das Dreyeck ABC auch gleichseitig, und $AC = AB = CB$, daß heißt; Die Seite eines regelmäßigen Sechseckes ist dem Halbmesser des umher beschriebenen Kreises gleich; oder eine Sehne, die dem Halbmesser gleichet, schneidet einen Bogen von 60° ab.

§. 394.

In ein jedes gegebenes regelmäßiges Vieleck kann ein Kreis so eingeschrieben werden, daß denselben jede Seite berühret.

Denn man ziehe nur aus dem Mittelpuncte C des umher beschriebenen Kreises die Senkrechten CM, CZ, CP, u. s. w. auf die Seiten DF, FG u. s. w.; so werden alle diese Senkrechten einander gleich seyn, und folglich die Puncte K, L, M, u. s. w. in einem Umkreise liegen, wovon CK oder CL der Halbmesser, und AB, BD, DF u. s. w. Tangenten

sind,

sind, weil die Dreyecke DCM, MCF, FCZ, ZCG, GCP Fig. u. s. w alle einander vollkommen gleich sind. 49.

Diese Einschreibung des Kreises ist bey einem jeden, auch unregelmäßigen, Dreyecke möglich. Denn man theile nur zwey Winkel eines gegebenen Dreyeckes in zwey gleiche Theile, ziehe aus dem Durchschnittspuncte der Theilungslinien senkrechte Linien auf die Seiten des Dreyeckes; so werden diese drey Senkrechten einander vollkommen gleich seyn, und folglich in einem Umkreise liegen. Die Gleichheit dieser drey Senkrechten, läßt sich mittelst §. 356. erweisen.

§. 395.

Auch läßt sich in einen gegebenen Kreis ein jedes regelmäßiges Vieleck einschreiben, wenn man aus dem Mittelpuncte des Kreises einen Winkel verzeichnet, der dem Mittelpunctswinkel des verlangten regelmäßigen Vieleckes gleich ist; und sodann die Sehne des Bogens, den die Schenkel des verzeichneten Winkels abschneiden, auf dem Umkreise so oft herumträgt, als es sich thun läßt.

Dieses geschieht bey der Einschreibung eines regelmäßigen Dreyeckes, wenn man aus einem Puncte des Umkreises B mit dem Halbmesser des gegebenen Kreises einen Bogen ACD ziehet, der den gegebenen Umkreis in A und D durchschneidet; und sodann die Sehne AD von D in G oder von A in G überträgt. Denn es ist der Bogen AB + BD = 60 + 60 = 120° = dem Mittelpunctswinkel des regelmäßigen Dreyeckes; und da DG = AD ist, so ist auch der Bogen DFG = ABD = 120°; und endlich AHG = AHGFBA — ABDFG = 360 — 240 = 120°; folglich auch AG = AD = DG. Oder man theile den Halbmesser CB in dem Puncte Q durch die Senkrechte AD in zwey gleiche Theile; so wird AD die Seite des regelmäßigen Dreyeckes seyn. Denn es ist die Seite CQ = QB, QA = QA, der Winkel AQC = AQB; folglich AB = AC = CD = DB, der Bogen AB = BD = 60°, und endlich der Bogen ABD = 120°.

Theilet man nun die Bogen AHG, GFD, DBA in den Puncten H, F, B in zwey gleiche Theile, und verbindet

Fig. 49. bindet die Puncte A, B, D, F, G, H durch gerade Linien; so wird in demselben Kreise auch ein regelmäßiges Sechseck eingeschrieben seyn Und so kann durch fernere Theilung der Bogen aus einem Sechsecke ein Zwölfeck, aus dem Zwölfecke ein Vierundzwanzigeck bestimmet werden u ſ w. Das regelmäßige Sechseck wird geschwinder in einen Kr is eingeschrieben, wenn man den Halbmesser sechs Mahl auf dem Umkreise herumträgt.

Ein regelmäßiges Viereck oder ein Quadrat wird in einen gegebenen Kreis eingeschrieben, wenn man zwey senkrechte Durchmesser BG und NE zieht, und ihre Endpuncte B, E, G, N mit geraden Linien verbindet. Theilet man nun einen jeden Bogen, den die Seite des eingeschriebenen Quadrates abschneidet, in zwey gleiche Theile; so wird man auch ein regelmäßiges Achteck einschreiben können. Und so läßt sich ferner ein 16, 32, 64eck u. ſ. w. in einen Kreis einschreiben. Die Einschreibung eines Fünf-, Zehn-, Zwanzigeckes u. ſ. w. ingleichen eines 15, 30, 60eckes u. ſ. w. soll weiter unten vorkommen Die Einschreibung der übrigen Vielecke aber läßt sich nach den Gründen der Elementar-Geometrie nicht anders verrichten, als durch Hülfe des Transporteurs, oder durch bloßes Versuchen (tentando).

§. 396.

50. Auch läßt sich um einen gegebenen Kreis ein jedes regelmäßiges Vieleck dergestalt beschreiben, daß jede Seite desselben den gegebenen Umkreis berühret, wenn man aus dem Mittelpuucte des Kreises einen Winkel ECF verzeichnet, der dem Mittelpunctswinkel des verlangten regelmäßigen Vieleckes gleich ist; sodann die Sehne EF durch die Senkrechte CG in zwey gleiche Theile zertheilet, die Schenkel CE und CF verlängert, durch den Punct G die Parallele AB zu EF zieht, mit dem Halbmesser CA oder CB den Kreis AMNPB beschreibet, und endlich die Sehne AB in diesem Kreise so oft herumträgt als es sich thun läßt. Der Grund dieses Verfahrens ist aus dem Vorhergehenden leicht einzusehen.

IV. Abschnitt. Fig.

Von den Proportional-Linien.

§. 397.

Wen man in was immer für einem Dreyecke ABC zu einer Seite BC eine Parallele DE führet; so werden dadurch die zwey übrigen Seiten in proportionale Theile geschnitten; nämlich es wird AD : AB = AE : AC, oder auch AD : DB = AE : EC statt finden. 51.

Denn man ziehe nur die Geraden EB und DC; so ist am Flächeninhalte des Dreyeck DEB = EDC, weil diese zwey Dreyecke auf eben derselben Grundlinie DE zwischen zwey Parallelen stehen. Es ist also auch DEB + ADE = EDC + ADE, nämlich AEB = ADC. Ferner ist AED: AEB = AD : AB, (A), weil diese zwey Dreyecke einerley Höhe HE haben; und auch AED : ADC = AE : AC, (B), weil auch diese zwey Dreyecke einerley Höhe GD haben (391). Nun substituire man in der zweyten Proportion (B) AEB statt ADC;

so ist AED : AEB = AD : AB die erste Proportion (A),
und AED : AEB = AE : AC vermöge der Substitution;
folglich auch AD : AB = AE : AC (190.);
und AD : AB — AD = AE : AC — AE,
nähmlich AD : DB = AE : EC.
Ingleichen AD : AE = DB : EC;
wie auch AD : AE = AB : AC.

§. 398.

Und umgekehrt, wenn AD : AB = AE : AC, oder AD : DB = AE : EC statt findet: so läuft DE parallel mit BC.

Denn wäre DE nicht parallel zu BC; so könnte durch den Punct D eine andere Parallele z. B. DG gezogen werden; und da wäre vermöge des Vorhergehenden AD : AB = AG : AC, und auch vermöge der Voraussetzung AD : AB = AE : AC; es wäre also in diesem Falle auch AG : AC = AE : AC. Nun aber ist AC = AC; folglich wäre auch AG = AE,

Fig. 51. welches nicht seyn kann; es kann demnach auch nicht seyn, daß außer DE eine andere DG durch den Punct D parallel zu BC geführet werde. Wenn also AD : AB = AE : AC statt findet: so läuft DE parallel zu BC.

§. 399.

I. Bey zwey ähnlichen Dreyecken ABC und abc stehen die gleichnahmigen Seiten (latera homologa), die nähmlich den gleichen Winkeln entgegengesetzet sind, in Proportion; das ist, AB : AC = ab : ac, oder AB : ab = AC : ac, ingleichen AB : BC = ab : bc; AC : BC = ac : bc.

Denn man lege nur das kleinere Dreyeck abc dergestalt auf das größere ABC, daß der Winkel a den Winkel A decke, die gleichnahmige Seite ab auf AB, und ac auf AC falle; so wird die Seite bc mit BC parallel laufen (384.), und es wird AD = ab, AE = ac seyn, wenn die Schenkel ab und ac bis D und E reichen. Nun ist vermöge des Vorhergehenden AD : AB = AE : AC, oder AB : AC = AD : AE; es ist also auch AB : AC = ab : ac. Würde man nun den Winkel b auf B, und die gleichnahmige Seite bc auf BC auflegen; so würde ac mit AC parallel laufen, und vermöge des Vorhergehenden folgende Proportion statt finden: ba : BA = bc : BC, oder ba : bc = BA : BC u. s. w.

II. Und umgekehrt, wenn die Seiten eines Dreyeckes abc mit den Seiten eines anderen Dreyeckes ABC in Proportion stehen, nähmlich wenn AB : ab, = AC : ac = BC : bc statt findet; so sind die Dreyecke einander ähnlich.

Denn man mache nur AD = ab, und ziehe die Parallele DE; so ist AB : AD = AC : AE (397.), und auch AB : ab (oder AD) = AC : ac vermöge der Voraussetzung es ist also auch AC : AE = AC : ac, nähmlich AE = ac, ingleichen AB : AD = BC : DE, weil die Dreyecke ABC und ADE einander ähnlich sind, und auch AB : ab (oder AD) = BC : bc vermöge der Voraussetzung; folglich auch BC : DE = BC : bc, nähmlich DE = bc. Da nun in den Dreyecken abc und ADE die Seiten AD = ab, AE = ac,

DE

DE = bc sind; so sind sie einander vollkommen gleich, das ist gleich und ähnlich, es ist nähmlich ADE ∽ abc. Nun aber ist das Dreyeck ADE ∽ ABC; es ist also auch abc ∽ ABC. Fig. 51.

Wir werden durch dieses (∽) Zeichen die Aehnlichkeit anzeigen.

§. 400.

Wenn in zwey Dreyecken ABC und abc der Winkel A = a ist, und ab : AB = ac : AC statt findet; das ist, wenn die Seiten, die den gleichen Winkel einschließen, in Proportion stehen, so sind die Dreyecke einander ähnlich.

Denn man lege nur das Dreyeck abc dergestalt auf ABC, daß der Winkel a den Winkel A decke, die größere Seite ab auf AB bis D, und die kleinere ac auf AC bis E falle; so wird DE = bc, der Winkel ADE = b, und AED = c seyn: nun ist ab : AB = ac : AC; und ab = AD, ac = AE; es ist also auch AD : AB = AE : AC; folglich DE parallel zu BC (398.), und der Winkel AED = ACB, ADE = ABC. Nun aber ist ADE = b, und AED = c; es ist also auch ABC = b, ACB = c; folglich ist das Dreyeck abc ∽ ABC.

§. 401.

Wenn man in einem Dreyecke ABC einen Winkel BAC durch die Gerade AD in zwey gleiche Theile theilet; so ist CD : DB = CA : AB. 52.

Denn man verlängere nur CA, mache AE = AB, und ziehe EB; so ist BE parallel zu DA, weil BAC = 2x = y + z = z + z = 2z, nähmlich x = z ist (363.); folglich CD : DB = CA : AE (397.). Nun aber ist AE = AB: folglich auch CD : DB = CA : AB.

Aus der Proportion CD : DB = CA : AB fließt auch folgende: CD + DB : CD = CA + AB : CA, nähmlich CB : CD = CA + AB : CA, oder CA + AB : CA = CB : CD; ingleichen BA + AC : BA = BC : BD.

Und

Fig. 52. Und umgekehrt, wenn CD : DB = CA : AB, oder auch CA + AB : CA = CB : CD statt findet; so ist der Winkel CAB durch die Gerade AD in zwey gleiche Theile getheilet.

Denn man verlängere nur CA, mache AE = AB, und ziehe BE: so ist DA parallel zu BE, weil vermöge der Voraussetzung CA + AB, oder CA + AE, das ist CE: CA = CB : CD statt findet (398); folglich ist x = z; ferner ist das Dreyeck BAE gleichschenkelig; folglich y = z; nun aber ist der Winkel CAB = y + z = 2z, oder CAB = 2x, und folglich x = ½ CAB.

§. 402.

53. Wenn man in einem rechtwinkeligen Dreyecke aus der Spitze des rechten Winkels eine Senkrechte auf die Hypothenuse zieht; so sind die dadurch entstandenen Dreyecke dem gegebenen, und unter sich ähnlich; z. B. in Fig. 53 ist ADB ∽ ABC, ADC ∽ ABC, und ADB ∽ ADC.

Denn wegen der Senkrechten AD ist in den zwey Dreyecken ADB und ABC der Winkel m = t + z = 90°, der Winkel x = x ist beyden Dreyecken gemein; folglich ist auch t = y, und ADB ∽ ABC (§. 378 IV.). Ingleichen ist in den zwey Dreyecken ADC und ABC der Winkel n = t + z = 90°, und y = y; folglich ist auch x = z, und ADC ∽ ABC. Da nun in den zwey Dreyecken ADB und ADC nebst m = n, auch t = y, und x = z ist; so ist auch ADB ∽ ADC.

§. 403.

In einem jeden rechtwinkeligen Dreyecke ABC ist das Quadrat der Hypothenuse den Quadraten der beyden Katheten zusammengenommen gleich; es ist nähmlich $BC^2 = AB^2 + AC^2$, oder $a^2 = b^2 + c$, wenn wir BC = a, AB = b, und AC = c setzen.

Um

Um diese wichtige Wahrheit einzusehen, ziehe man aus der Spitze des rechten Winkels die Senkrechte AD auf die Hypothenuse BC; so ist das Dreyeck ABD ∽ ABC (402.). Es findet demnach in den Dreyecken ABD und ABC folgende Proportion statt: $BC : AB = AB : BD$, oder wenn wir BD mit d benennen, $a : b = b : d$ (A); ingleichen ist in den Dreyecken ADC und ABC, $BC : AC = AC : DC$, oder $a : c = c : a - d$ (B), weil $DC = BC - BD = a - d$ ist. Fig. 53.

Nun ist aus der Proportion A . . . . . $ad = b^2$
und aus der Proportion B . . $a^2 - ad = c^2$
vermöge (182);

es ist also auch durch die Addition $a^2 = b^2 + c^2$;
das ist, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Man kann diesen Satz auch auf folgende Art erweisen:

Auf eine jede Seite des rechtwinkeligen Dreyeckes verzeichne man ein Quadrat, ziehe die Senkrechte AD, und die Geraden AE, CF, AF, PE, so wird man bald einsehen, daß das Quadrat ABFH dem Rechtecke BPDE gleich ist. Denn es ist das Dreyeck $FCB = BAE$, weil die Seite $BF = BA$, $BC = BE$, und der Winkel $m + p = p + n$, nähmlich der Winkel $FBC = ABE$ (356. II.) ist. Nun aber ist am Flächeninhalte das Dreyeck $FCB = FAB$, und $BAE = BPE$ (390.); es ist also auch $FAB = BPE$, und auch $2FAB = 2BPE$, das ist, $FHAB = BPDE$, nähmlich das Quadrat BH ist dem Rechtecke BD gleich. Auf eben diese Art kann man zeigen, daß $CM = CD$ ist, wenn man von A nach G und von B nach N gerade Linien ziehet. Da nun $BH = BD$, und $CM = CD$ ist; so ist auch $BH + CM = BD + CD = BG$, nähmlich $BA^2 + AC^2 = BC^2$. Es ist gewöhnlich ein Quadrat auf was immer für einer Geraden AC mit AC^2 oder CA^2, oder auch mit b^2 zu bezeichnen, wenn man die Gerade $AC = b$ setzet. 54.

Anmerkung: Diese zwey Sätze: Das Quadrat der Hypothenuse ist den Quadraten der beyden Katheten zusammengenommen gleich; und, in ähnlichen Dreyecken stehen die gleichnahmigen Seiten in Proportion: sind ungemein reiche und gleichsam unerschöpfliche Quel-

Fig. len, aus denen die wichtigsten Wahrheiten in alle Theile der gemeinen und höheren Meßkunst fließen.

§. 404.

Und umgekehrt, wenn in einem Dreyecke das Quadrat der größten Seite den Quadraten der beyden übrigen zusammengenommen gleich ist; so ist dieses Dreyeck rechtwinkelig; nähmlich wenn $AB^2 = AC^2 + CB^2$ ist; so ist $m = 90°$.

55. Denn man errichte nur auf AC in dem Puncte C die Senkrechte CD, und mache $CD = CB$; so ist in dem rechtwinkeligen Dreyecke ACD vermöge des Vorhergehenden $AD^2 = CA^2 + CD^2$, oder $AD^2 = AC^2 + CB^2$, (weil $CD = CB$ und folglich $CD^2 = CB^2$ gemacht worden ist). Nun ist aber ferner auch vermöge der Voraussetzung $AB^2 = AC^2 + CB^2$; folglich ist $AD^2 = AB^2$, oder $AD = AB$. Da in den Dreyecken ACD und ACB die Seite $AC = AC$, $DC = CB$, und $AD = AB$ ist; so sind diese Dreyecke einander vollkommen gleich, und $n = m = 90°$.

§. 405.

Aus der Gleichung $a^2 = b^2 + c^2$ folget, daß auch $b^2 = a^2 - c^2$, und $c^2 = a^2 - b^2$ ist. Es ist demnach in einem rechtwinkeligen Dreyecke die Hypothenuse $a = \sqrt{(b^2 + c^2)}$, die eine Kathete $b = \sqrt{(a^2 - c^2)}$, und die andere $c = \sqrt{(a^2 - b^2)}$. Es sey z. B. die eine Kathete $b = 3$, und die andere $c = 4$; so ist die Hypothenuse $a = \sqrt{(9+16)} = \sqrt{25} = 5$; folglich schließen drey Seiten, die sich wie 3, 4, 5 verhalten, ein rechtwinkeliges Dreyeck ein. Man pflegt auch wirklich in der Ausübung eine Schnur nach diesem Verhältnisse einzutheilen, und dann zur Errichtung der Senkrechten auf dem Felde zu gebrauchen.

Außer diesen drey Zahlen 3, 4, 5, und ihren Vielfachen $3n$, $4n$, $5n$, (z. B. 6, 8, 10; 9, 12, 15) gibt es unzählige, die auch ein rechtwinkeliges Dreyeck einschließen; z. B. 5, 12, 13; denn es ist $(13)^2 = (12)^2 + 5^2$, nähmlich $169 = 144 + 25 = 169$. Man findet alle diese Zahlen,

wenn

wenn man zwey algebraische Ausdrücke aufsuchet, die beyde vollkommene Quadrate sind, und zusammen addiret wieder ein vollkommenes Quadrat zum Vorschein bringen. Solche zwey Ausdrücke sind $(x^4 - 2x^2y^2 + y^4)$ und $4x^2y^2$; denn ihre Summe ist $(x^4 + 2x^2y^2 + y^4)$ auch ein vollkommenes Quadrat; und die Wurzeln dieser drey Quadrate sind $(x^2 - y^2)$, $(2xy)$, und $(x^2 + y^2)$. Fig. 55.

Setzen wir nun ... $x =$ / $y =$

2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7
1	2	1	3	2	4	1	5	2	4	6

so ist die 1te Kath. $x^2 - y^2 =$

3	5	15	7	21	9	35	11	45	33	13

die zweyte ..... $2xy =$

4	12	8	24	20	40	12	60	28	56	84

und die Hypoth .. $x^2 + y^2 =$

5	13	17	25	29	41	37	61	53	65	85

u. s. w. nähmlich $(x; y) = (8; 1), (8; 3), (8; 5), (8; 7), (9; 2), (9; 4), (9; 8), (10; 1), (10; 3), (10; 7), (10; 9), (11; 2), (11; 4), (11; 6), (11; 8), (11; 10), (12; 1), (12; 5), (12; 7), (12; 11), (13; 2)$ u. s. w.

Die Formeln $a = \sqrt{(b^2 + c^2)}$, und $b = \sqrt{(a^2 - c^2)}$ geben uns zu erkennen, daß man zu zwey Katheten die Hypothenuse und zu der Hypothenuse und einer Kathete jederzeit die andere Kathete durch die Rechnung bestimmen könne. Allein wir können dieses auch durch die Verzeichnung finden. Wenn nähmlich zu den gegebenen Katheten CD und CA die Hypothenuse durch die Zeichnung zu suchen ist; so stelle man die zwey gegebenen Katheten unter einem rechten Winkel zusammen, und verbinde ihre Endpuncte durch eine Gerade AD; so wird diese die gesuchte Hypothenuse seyn. Ingleichen aus der Hypothenuse und aus einer Kathete wird die andere Kathete durch die Verzeichnung gefunden, wenn man einen Schenkel eines rechten Winkels der gegebenen Kathete CA gleich machet, und sodann

Fig. 55. aus A mit einem der Hypothenuse gleichen Halbmesser einen Kreisbogen beschreibet, der den andern Schenkel in D durchschneidet; die Gerade CD wird sodann der gesuchten Kathete gleich seyn.

§. 406.

56. Wenn man an dem Endpuncte B einer gegebenen Geraden AB eine Senkrechte $BC = \frac{1}{2}AB$ errichtet; sodann die Hypothenuse AC ziehet, $CE = CB = \frac{1}{2}AB$, und $AD = AE$ abschneidet; so wird dadurch die gegebene Gerade AB in dem Puncte D nach dem äußeren und mittleren Verhältnisse getheilet (media et extrema ratione secta); nähmlich der größere Theil AD wird die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem kleineren Theile BD und zwischen der ganzen gegebenen Geraden AB seyn; das ist, es wird $BD : DA = DA : BA$ sich verhalten.

Denn es ist $AC^2 = AB^2 + BC^2$, oder $(AE + EC)^2 = (AD + BC)^2 = AB^2 + BC^2$, nähmlich $AD^2 + 2BC.AD + BC^2 = AB^2 + BC^2$; also auch $AD^2 = AB^2 - 2BC.AD = AB^2 - AB.AD = (AB - AD).AB$, das ist $AD^2 = BD.AB$; und endlich $BD : AD = AD : AB$ (vermöge 185.).

§. 407.

57. Wenn man den Halbmesser CB eines Kreises nach dem äußeren und mittleren Verhältnisse, nähmlich in dem Puncte D dergestalt theilet, daß $BD : DC = DC : BC$ sich verhält, und die Sehne $BA = DC$ machet; so ist diese Sehne die Seite eines regelmäßigen Zehneckes.

Denn es ist der Bogen AB oder der Winkel $n = 36° = \frac{360°}{10}$, welches ich auf folgende Art erweise. Es ist $BD : DC =$ DC : BC vermöge der Voraussetzung; es ist aber auch $DC = BA$; folglich ist in den Dreyecken BDA und BAC, $BD : BA = BA : BC$, überdieß ist der Winkel p beyden Dreyecken

ge-

gemein; es sind demnach diese zwey Dreyecke einander ähnlich (400.), und folglich ist n = r. Ferner ist das Dreyeck ABC gleichschenkelig; es ist also auch das Dreyeck BDA gleichschenkelig, nähmlich m = p = q + r, und AB = AD = DC; folglich ist auch das Dreyeck ADC gleichschenkelig, und n = q. Nun ist m = n + q, (379.) = n + n = 2 n; es ist also auch p = 2n, und auch (q + r) = 2 n, weil m = p = (q + r) ist; endlich ist auch n + p + (q + r) = 180° (378); folglich ist auch n + 2n + 2n = 5n = 180°, nähmlich der Mittelpunctswinkel $n = \frac{180°}{5} = 36° = \frac{360°}{10}$, oder der Bogen AB ist der zehnte Theil des ganzen Umkreises, und die Sehne AB ist die Seite eines regelmäßigen Zehneckes, die man sodann zehnmahl auf dem Umkreise herumtragen kann, um ein regelmäßiges Zehneck einzuschreiben. Fig. 57.

§. 408.

Setzen wir den Halbmesser $CB = a$; so ist die Seite des regelmäßigen Zehneckes $BA = \frac{1}{2} a(-1 + \sqrt{5})$.

Denn es sey die Seite $BA = DC = b$; so ist $BD = a - b$, und vermöge des Vorhergehenden $a - b : b = b : a$; folglich $b^2 = a^2 - ab$, und $b = -\frac{1}{2} a + \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4} a^2)} = -\frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{5}{4} a^2} = -\frac{1}{2} a + \frac{1}{2} a\sqrt{5} = \frac{1}{2} a(-1 + \sqrt{5})$.

I. Aus dieser Gleichung finden wir $a = \frac{1}{2} b(1 + \sqrt{5})$, das ist, wenn eine Seite eines regelmäßigen Zehneckes $= b$ ist; so ist der Halbmesser des herum beschriebenen Kreises $= \frac{1}{2} b(1 + \sqrt{5}) = \frac{1}{2} b + \sqrt{(b^2 + \frac{1}{4} b^2)}$, welcher durch die Verzeichnung auf folgende Art gefunden wird. An dem Endpuncte F der gegebenen Seite FG errichte man die Senkrechte EF, mache $EF = \frac{1}{2}$ FG, ziehe GE, und schneide $EM = EF = \frac{1}{2}$ FG ab; so ist GM der gesuchte Halbmesser. Denn es ist $GM = EM + EG = \frac{1}{2}$ FG $+ \sqrt{(GF^2 + FE^2)} = \frac{1}{2}$ FG $+ \sqrt{(GF^2 + \frac{1}{4} GF^2)} = \frac{1}{2} b + \sqrt{(b^2 + \frac{1}{4} b^2)}$, wenn $GF = b$ gesetzet wird. Man beschreibe demnach nur mit diesem Halbmesser aus F und G zwey Kreisbogen, die sich in C durchschnei-

Fig. 57. schneiden, und führe aus G mit eben diesem Halbmesser den Umkreis FGBF; so wird sich in demselben die Seite FG zehnmahl herumtragen, und folglich auf der Geraden FG ein regelmäßiges Zehneck verzeichnen lassen.

58. II. Da wir die Seite eines regelmäßigen Zehneckes gefunden haben, so wird es nicht mehr schwer seyn, auch die Seite eines regelmäßigen Fünfeckes zu bestimmen. Es sey wieder der Halbmesser des gegebenen Kreises $CD = CB = CA = a$, so ist die Seite des regelmäßigen Zehneckes $AD = DB = \frac{1}{2}a(-1+\sqrt{5})$. Die noch unbekannte Seite des regelmäßigen Fünfeckes sey $AB = c$, $AE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}c$, DE aber sey $= x$, und folglich $CE = CD - DE = a - x$. Nun ist $AE^2 = AD^2 - DE^2$, nähmlich $\frac{1}{4}c^2 = [\frac{1}{2}a(-1+\sqrt{5})]^2 - x^2 = \frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2\sqrt{5} - x^2$. Ferner ist auch $AE^2 = AC^2 - CE^2$, nähmlich $\frac{1}{4}c^2 = a^2 - (a-x)^2$ das ist $\frac{1}{4}c^2 = 2ax - x^2$ (A). Es ist also auch $\frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2\sqrt{5} - x^2 = 2ax - x^2$; nähmlich $x = \frac{3}{4}a - \frac{1}{4}a\sqrt{5}$, und $x^2 = \frac{7}{8}a^2 - \frac{3}{8}a^2\sqrt{5}$. Man substituire diese Werthe für x und x^2 in der Gleichung (A.);

so ist $\frac{1}{4}c^2 = \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{2}a^2\sqrt{5} - \frac{7}{8}a^2 + \frac{3}{8}a^2\sqrt{5} = \frac{1}{8}a^2(5-\sqrt{5})$, und $c^2 = \frac{1}{2}a^2(5-\sqrt{5}) = a^2 + \frac{1}{4}a^2(3-\sqrt{5})$

$= a^2 + [\frac{1}{2}a(-1+\sqrt{5})]^2 = a^2 + b^2$,

weil vermöge des Vorhergehenden $\frac{1}{2}a(-1+\sqrt{5}) =$ der Seite des regelmäßigen Zehneckes $= b$ ist. Da nun $c^2 = a^2 + b^2$ ist; so ist das Quadrat der Seite des Fünfeckes den Quadraten des Halbmessers und der Seite des Zehneckes zusammengenommen gleich. Wenn man demnach an den Endpuncten eines Halbmessers CA' des gegebenen Kreises die Senkrechten A'F und CN errichtet, $A'F = \frac{1}{2}A'C$, $FM = FA'$ auf der Hypothenuse FC, dann $CG = CM$ abschneidet, und die Gerade GN ziehet; so ist diese Gerade die Seite eines regelmäßigen Fünfeckes, welches sich in den gegebenen Kreis einschreiben läßt. Denn CG ist die Seite eines regelmäßigen Zehneckes (407.), und CN der Halbmesser; nun aber ist $GN^2 = CG^2 + CN^2$; folglich ist GN die Seite eines regelmäßigen Fünfeckes.

III. Aus der Gleichung $c^2 = \frac{1}{2} a^2 (5 - \sqrt{5})$ findet man $a^2 =$ Fig.
$\frac{2c^2}{5 - \sqrt{5}} = \frac{2c^2 (5 + \sqrt{5})}{(5 - \sqrt{5})(5 + \sqrt{5})} = \frac{10c^2 + 2c^2 \sqrt{5}}{20} =$ 58.
$\frac{5c^2 + c^2 \sqrt{5}}{10}$. Es ist demnach $a = c \sqrt{(\frac{5 + \sqrt{5}}{10})}$: das ist, wenn die Seite c eines regelmäßigen Fünfeckes gegeben ist, so ist der Halbmesser des herum beschriebenen Kreises $a = c \sqrt{(\frac{5 + \sqrt{5}}{10})}$. Es sey z. B. $c = 100$, so ist der Halbmesser $a = \sqrt{7236} = 85$ beynahe.

Wenn BP die Seit eines Sechseckes, und BQ die Seite eines Zehneckes ist, so ist PQ die Seite eines Fünfzehneckes. Denn es ist der Bogen $PQ = PB - QB = 60° - 36° = 24° = \frac{360°}{15}$; folglich ist die Sehne PQ die Seite eines regelmäßigen Fünfzehneckes.

IV. Setzen wir die Seite eines in einen Kreis eingeschriebenen gleichseitigen Dreyeckes $AD = d$ (Fig. 49.), und 49.
den Halbmesser $CA = a$; so ist $d = a \sqrt{3}$. Denn es ist $AQ^2 = AC^2 - CQ^2$; nähmlich $\frac{1}{4} d^2 = a^2 - \frac{1}{4} a^2$; folglich $d = a \sqrt{3}$.

Wir finden aus diesen Gleichungen $a = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} d \sqrt{3}$. In demselben gleichseitigen Dreyecke ist die Höhe $GQ = \frac{1}{2} d \sqrt{3}$. Denn es ist $GQ = \sqrt{(AG^2 - AQ^2)} = \sqrt{(d^2 - \frac{1}{4} d^2)} = \sqrt{\frac{3}{4} d^2} = \frac{1}{2} d \sqrt{3}$.

V. Die Seite $AB = e$ eines eingeschriebenen Quadra- 59.
tes ist $= a \sqrt{2}$. Denn es ist $AB^2 = AC^2 + BC^2 = a^2 + a^2$ und folglich $AB = \sqrt{(a^2 + a^2)} = \sqrt{(2a^2)} = a \sqrt{2} = e$.

Aus dieser Gleichung findet man $a = \frac{e}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} e \sqrt{2} = AC$; und folglich $AF = 2a = e \sqrt{2} = AB \sqrt{2}$.

VI. Die Seite $AD = f$ eines regelmäßigen Achteckes ist $= a \sqrt{(2 - \sqrt{2})}$. Denn es ist $EC = AE = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$, und $DE = DC - EC = a - \frac{1}{2} a \sqrt{2}$. Nun ist $AD = \sqrt{(AE^2 + DE^2)} = \sqrt{[\frac{1}{2} a^2 + (a - \frac{1}{2} a \sqrt{2})^2]} =$
$\sqrt{}$

Fig. 59. $V(2a^2 - a^2\sqrt{2}) = a\,V(2 - V2) = f$. Aus dieser Gleichung findet man $a = \frac{f}{V(2-\sqrt{2})}$, oder $a^2 = \frac{f^2}{2 - V2}$ $= f^2 \cdot (1 + \frac{1}{2} V2)$; folglich $a = f \cdot V(1 + \frac{1}{2} V2)$. Es sey z. B. die Seite eines regelmäßigen Achteckes $f = 200$, so ist der Halbmesser des herum beschriebenen Kreises $a = 261, 32$ beynahe.

VII. Gleichwie wir jetzt aus der Seite des Viereckes die Seite des Achteckes gefunden haben, eben so kann ferner aus der Seite des Achteckes die Seite des Sechzehneckes, und aus dieser die Seite eines Zweyunddreyßigeckes u. s. w. bestimmet werden. Wir werden für die Bestimmung der Sehne eines halben Bogens, wenn die Sehne des ganzen Bogens nebst dem Halbmesser gegeben ist, eine allgemeine Formel hierher setzen. Sie ist folgende: Wenn der Halbmesser $AC = a$, und die Sehne AB eines Bogens $= b$ gesetzet wird; so ist die Sehne des halben Bogens $AD = V[2a^2 - a\,V(4a^2 - b^2)]$. Denn es ist $EC = V(AC^2 - AE^2) = V(a^2 - \frac{1}{4} b^2)$, und $DE = DC - EC = a - V(a^2 - \frac{1}{4} b^2)$; nun ist $AD^2 = AE^2 + DE^2 = \frac{1}{4} b^2 + a^2 - 2a\,V(a^2 - \frac{1}{4} b^2) + a^2 - \frac{1}{4} b^2$

$$= 2a^2 - 2a\,V\left(\frac{4a^2 - b^2}{4}\right) = 2a^2 - a\,V(4a^2 - b^2);$$

folglich ist $AD = V[2a^2 - a\,V(4a^2 - b^2)]$. Z. B. bey einem regelmäßigen Sechsecke ist die Seite $b = a$; folglich ist die Seite eines regelmäßigen Zwölfeckes $= V(2a^2 - a\,V3a^2) = V(2a^2 - a^2\,V3) = a\,V(2 - V3) = \frac{1}{2} a(V6 - V2)$ wegen der Abkürzungs-Formel im I. Thl. §. 223. Setzet man ferner $b = \frac{1}{2} a(V6 - V2)$; so wird man die Seite eines regelmäßigen 24eckes finden u. s. w. Und umgekehrt, aus der Sehne $AD = c$ eines halben Bogens, und aus dem Halbmesser $AC = a$, läßt sich die Sehne $AB = b$ des ganzen Bogens durch folgende allgemeine Formel ausdrücken:

$$b = \frac{c}{a} V(4a^2 - c^2).$$

Z. B. da die Seite eines regelmäßigen Sechseckes, nähmlich $c = a$ ist; so folgt daraus die Seite eines regelmäßigen Dreyeckes $b = a\,V3$, wenn man in dieser letzten Formel für c den Halbmesser a substituiret, und

ge-

gehörig reduciret. Diese letztere Formel wird erhalten, wenn Fig. man aus der ersteren den Werth von b bestimmet.

§. 409.

Wir wollen noch in einigen regelmäßigen Vielecken die 60. Senkrechte CD suchen, die aus dem Mittelpuncte C auf die Vielecksseite AB gezogen wird. Diese Senkrechte CD ist in dem Fünfecke $= \frac{1}{2} c \sqrt{(1 + \frac{2}{5} \sqrt{5})}$, wenn wir die Seite des Fünfeckes $AB = c$ setzen. Denn es ist $CD = \sqrt{(CB^2 - DB^2)}$; nun ist aber $DB = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} c$, $DB^2 = \frac{1}{4} c^2$; und $CB = \sqrt{(\frac{5c^2 + c^2\sqrt{5}}{10})}$, $CB^2 = \frac{5c^2 + c^2\sqrt{5}}{10}$; folglich ist $CD = \sqrt{(\frac{5c^2 + c^2\sqrt{5}}{10} - \frac{c^2}{4})} = \frac{1}{2} c \sqrt{(1 + \frac{2}{5}\sqrt{5})}$.

Bey dem Sechsecke ist $AB = BC = a$; folglich $CD = \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4} a^2)} = \frac{1}{2} a \sqrt{3}$.

In dem Achtecke ist $BC = f\sqrt{(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2})}$, wenn man die Seite $AB = f$ setzet; folglich ist $CD = \sqrt{(f^2 + \frac{1}{2} f^2 \sqrt{2} - \frac{1}{4} f^2)} = \frac{1}{2} f \sqrt{(3 + 2\sqrt{2})} = \frac{1}{2} f (1 + \sqrt{2})$ wegen I. Thl. §. 223.

Eben so findet man die Senkrechte in dem Zehnecke $= \frac{1}{2} b \sqrt{(5 + 2\sqrt{5})}$, wenn man die Seite $AB = b$ setzet. Und in dem Zwölfecke ist diese Senkrechte $= \frac{1}{2} g \sqrt{(7 + 4\sqrt{3})} = \frac{1}{2} g (2 + \sqrt{3})$; wenn man die Seite eines regelmäßigen Zwölfeckes mit g benennet; u. s. w.

§. 410.

Wenn sich in einem Kreise zwey Sehnen durchschneiden, so ist das Product aus den Abschnitten der einen dem Producte aus den Abschnitten der anderen Sehne gleich; nähmlich $MP \times PN = FP \times PG$.

Denn die Dreyecke MFP und GPN sind einander ähnlich, weil der Winkel $m = n$, $F = N$, $G = M$ ist (372.); folglich ist $MP : FP = P'G : PN$ (399.), und $MP \times PN = FP \times PG$ (182.).

§. 411.

§. 411.

Fig. 61. Wenn man aus einem und demselben Puncte zwey Secanten zu einem Umkreise zieht: so sind die Producte aus den ganzen Secanten in ihre Abschnitte außer dem Umkreise einander gleich, oder die Abschnitte verhalten sich umgekehrt wie die ganzen Secanten; nähmlich es ist AB. AE = AC. AD, oder AE: AD = AC: AB.

Denn es ist das Dreyeck ABC ∽ ADE, weil der Winkel BAC = DAE, BCA = AED, und ABC = EDA ist (374.); folglich AE : AD = AC : AB, und es ist AE. AB = AD. AC.

I. Eben so findet man, daß AD:AT = AT : AC nähmlich $AT^2 = AD.\ AC$, und AT = V AD. AC statt findet, weil die Dreyecke ATD und ATC einander ähnlich sind.

Die Tangente AT ist demnach die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Secante und zwischen ihrem Abschnitte außer dem Kreise.

II. Da aus eben demselben Grunde auch At = V (AD. AC.) ist; so ist auch AT = At, das ist, die zwey Tangenten, die aus einem und demselben Puncte an einen Umkreis gezogen werden, sind einander gleich.

§. 412.

62. Wenn man aus was immer für einem Puncte M des Umkreises eine Senkrechte MP auf den Durchmesser AB ziehet, so ist diese Senkrechte die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten des Durchmessers; nähmlich es verhält sich AP : PM = PM : PB.

Denn es ist das Dreyeck APM ∽ AMB; und auch BPM ∽ AMB; folglich ist auch APM ∽ BPM; und AP : PM = PM : PB. Man kann diesen Satz auch also erweisen; AP. PB = PM. PD (410.); nun ist aber PD = PM (367.) folglich auch AP. PB = PM^2, und AP : PM = PM : PB.

Es sey der Halbmesser AC = a, so ist AB = $2a$: der Abschnitt des Durchmessers zwischen dem Anfangspuncte A und der Senkrechten MP sey = x, so ist PB = AB

—AP

$= AP = 2a - x$; und die Senkrechte PM sey $= y$. Substituiren wir nun diese Werthe, so ist $y^2 = x.(2a-x) = 2ax - x^2$ eine Gleichung, welche uns die bekannte Eigenschaft des Kreises ausdrucket, daß das Quadrat einer jeden Senkrechten PM dem Producte aus den dazu gehörigen Abschnitten des Durchmessers gleich ist. Fig. 62.

Es ist gewöhnlich, daß man nicht nur allein bey dem Kreise, sondern auch bey einer jeden andern krummen Linie die Gerade AP eine Abscisse, und die Senkrechte PM eine Ordinate nennet. Um die Lage eines beliebigen Punctes M einer krummen Linie zu bestimmen, wird nähmlich eine Gerade AB in der Ebene der Krummen nach beliebiger Richtung gezogen, ein Punct derselben, z. B. A, für den Anfangspunct angenommen, und sodann aus dem Puncte M der Krummen eine Senkrechte MP auf die Gerade AB gefället. Durch die bekannten Längen der zwey Geraden AP und PM ist nun die Lage des Punctes M bestimmet. Die Linie AB von unbestimmter Länge heißt die Abscissenlinie, der nach Belieben angenommene Punct A ist der Anfangspunct der Abscissen, die von einem Puncte M der Krummen auf die Abscissenlinie senkrecht gezogene Gerade MP wird die senkrechte Ordinate der Krummen für den Punct M, und das Stück AP der Abscissenlinie zwischen dem Anfangspuncte A und zwischen der Ordinate MP die Abscisse der Krummen für den Punct M genannt.

§. 413.

Setzet man $CP = x$, d. i. wenn man den Anfangspunct der Abscissen in den Mittelpunct versetzet; so ist $AP = a - x$, und $PB = a + x$; folglich $y^2 = (a-x).(a+x) = a^2 - x^2$, und $y = \pm V(a^2 - x^2)$ (215.). Dieses erhellet auch aus dem rechtwinkeligen Dreyecke PMC; denn es ist in demselben $PM^2 = MC^2 - CP^2$, nähmlich $y^2 = a^2 - x^2$, und $y = \pm V(a^2 - x^2)$. Das Zeichen $\pm$ bedeutet, daß zu einer jeden Abscisse CP zwey gleiche Ordinaten, nähmlich PM und PD gehören, die aber nach entgegengesetzten Richtungen, die eine aufwärts, die andere abwärts zu ziehen,

Fig. 62. hen sind. Denn es ist aus dem Begriffe der positiven und negativen Größen bekannt, daß alle Senkrechten PD, pd, welche von der Geraden AB herunterwärts gezogen werden. negativ seyn müssen, wenn man die Senkrechten PM, pm, welche von eben derselben Geraden AB hinaufwärts gezogen sind, für positiv annimmt; oder umgekehrt. Ingleichen jede Abscisse Cp von dem angenommenen Anfangspuncte C gegen die Rechte gerechnet, muß negativ seyn, wenn man die Abscissen CP von eben demselben Anfangspuncte gegen die Linke gezählet für positiv annimmt; oder umgekehrt.

Aus dieser zweyten Gleichung des Kreises $y = \pm V(a^2 - x^2)$ können wir folgende, theils schon erläuterte theils noch unerläuterte Eigenschaften herleiten:

I. Die Ordinate in dem angenommenen Anfangspuncte der Abscissen, nähmlich in dem Mittelpuncte des Kreises, ist dem Halbmesser gleich. Denn man setze nur $x = o$; so ist $y = \pm V\alpha^2 = \pm a$.

II. Zu zwey gleichen Abscissen, deren eine positiv, die andere negativ ist, gehören gleiche Ordinaten; z. B. wenn $CP = Cp = \pm x$ ist, so ist auch $PM = pm$, $PD = pd$, $MD = md$. Zwey Sehnen MD, und md in eben demselben Kreise, welche von dem Mittelpuncte gleich weit abstehen, sind demnach einander gleich.

III. An den Endpuncten des Durchmessers sind die Ordinaten $= o$; denn man setze nur $x = a$, und $x = -a$; so ist in beyden Fällen $y = o$.

IV. Ueber die Endpuncte A und B des Durchmessers weiter hinaus sind keine Ordinaten möglich. Denn man setze nur $x = (a + p)$, und $x = -(a + p)$; so ist in beyden Fällen die Ordinate $y = \pm V(-2ap - p^2)$ unmöglich, wenn p eine noch so große, oder eine noch so kleine positive Größe bedeutet.

V. Jede Gerade CM, aus dem angenommenen Anfangspuncte C zu was immer für einem Puncte M des Umkreises gezogen, ist $= a$, und folglich sind alle Puncte des Umkreises von diesem Puncte C gleich weit entfernet.

net. Denn es ist $CM = \sqrt{(CP^2 + PM^2)} = \sqrt{[x^2 + (a^2 - x^2)]}$ Fig. $= \sqrt{a^2} = a$. 62.

Wenn nun der Halbmesser in Zahlen gegeben ist z. B. $a = 10$, so kann man zu jeder in Zahlen angenommenen Abscisse die dazu gehörige Ordinate auch in Zahlen bestimmen. Es sey $x = 6$; so ist $y = \sqrt{(100 - 36)} = \sqrt{64} = 8$; es sey $x = 7$; so ist $y = \sqrt{(100 - 49)} = \sqrt{51} = 7,1414$ u. s. w.

VI. Wenn wir diesen Ausdruck $y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$ nach (300.) in eine unendliche Reihe verwandeln; so ist die Ordinate PM, die zu der Abscisse $CP = x$ gehöret, nähmlich

$$y = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{1 \cdot x^4}{2 \cdot 4 \cdot a^3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot a^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot a^7} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot x^{10}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot a^9} - \ldots\ldots$$

§. 414.

Wenn man an dem Endpuncte M der Ordinate PM die Tangente TM errichtet, die Abscissenlinie CA verlängert, bis sie die Tangente durchschneidet; so wird das Stück der Abscissenlinie zwischen der Ordinate und dem Durchschnittspuncte der Tangente, nähmlich die Gerade PT, die Subtangente genannt.

In dem Kreise ist die Subtangente $PT = \frac{a^2}{x} - x$.

Denn in den zwey ähnlichen Dreyecken TMP und PMC ist

$PT : PM = PM : PC$; folglich $PT = \frac{PM^2}{PC} = \frac{y^2}{x} =$

$$\frac{a^2 - x^2}{x} = \frac{a^2}{x} - x.$$

Setzen wir nun $x = 0$; so ist die Subtangente $= \frac{a^2}{0}$

$= \infty$ (305.), welches gar leicht zu begreifen ist, weil in diesem Falle die Tangente mit der Abscissenlinie parallel läuft, und folglich dieselbe niemahls durchschneidet. Denn

wenn

Fig. 62. wenn man CP = x = o setzet; so verwandelt sich die Ordinate PM = y in den Halbmesser CN, auf welchen die Tangente Nt senkrecht stehet. Nun aber stehet auch die Abscisenlinie CP auf eben demselben Halbmesser CN senkrecht; folglich läuft CP mit Nt parallel.

§. 415.

63 Vielecke, z. B. ABCDEF und abcdef heißen ähnlich, wenn sie gleich viele Polygon-Winkel enthalten, die einander wechselsweise gleich sind, und über dieß durch gleichnahmige Diagonalen, oder durch andere gleichnahmige gerade Linien in lauter ähnliche Dreyecke zertheilet werden können. Aus dieser Erklärung folgt:

I. Daß alle regelmäßigen Vielecke von einerley Gattung (z. B. alle Siebenecke) einander ähnlich sind. Denn sie können durch gerade Linien, die aus ihren Mittelpuncten in die Spitzen der Vieleckswinkel gezogen werden, in lauter ähnliche Dreyecke zertheilet werden.

II. Jede zwey Seiten des einen Vieleckes stehen mit den zwey gleichnahmigen Seiten des anderen Vieleckes in einer Proportion; z. B. ba : bc = BA : BC, oder bc : ca = BC : CA. Dieses erhellet aus der Aehnlichkeit der Dreyecke abc und ABC. Ingleichen dc : ca = DC : CA, und ca : da = CA : DA wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke acd und ACD; u. s. w. Da nun bc : ca = BC : CA, und auch dc : ca = DC : CA ist; so ist auch bc : dc = BC : DC (190.), nähmlich, bey ähnlichen Vielecken sind die Seiten, welche gleiche Winkel einschließen, einander proportional.

III. Der Umfang (perimeter) des einen Vieleckes verhält sich zum Umfange des anderen ähnlichen Vieleckes, gleichwie jede Seite des ersten zu der gleichnahmigen Seite des zweyten Vieleckes, nähmlich ab + bc + cd + de + ef + fa : AB + BC + CD + DE + EF + FA = ab : AB = bc : BC = fa : FA. Denn es ist vermöge des Vorhergehenden ac : ab = AC : AB, oder ac : AC = ab ; AB, und auch ac : AC = bc ; BC ; ac : AC

=

=cd: CD ; ac : AC = de : DE u. s. w. nähmlich ab : AB, Fig. bc : BC, cd : CD, de : DE, u. s. w. sind gleiche Ver- 63. hältnisse, weil jedes derselben dem Verhältnisse ac : AC gleichet ; folglich ab + bc + cd u. s. w. : AB + BC + CD u. s. w. = ab : AB = bc : BC (191.).

§. 416.

Die Umfänge der regelmäßigen Vielecke von ei- 64. nerley Gattung verhalten sich gegen einander, wie die Halbmesser der herumbeschriebenen Kreise; z. B. wenn ab und AB Seiten regelmäßiger Vielecke von einerley Gattung, cb und CB aber die Halbmesser der herumbeschriebenen Kreise sind, und der Umfang des ersten = p, und der Umfang des zweyten = P gesetzet wird; so findet folgende Proportion statt, $p : P$ = cb : CB.

Denn die Dreyecke acb und ACB sind einander ähnlich; folglich cb : ba = CB : AB, oder cb : CB = ba : BA; nun aber ist vermöge des Vorhergehenden $p : P$ = ba : BA; es ist also auch $p : P$ = cb : CB. Eben so kann man erweisen, daß sich die Umfänge der regelmäßigen Vielecke von einerley Gattung gegen einander verhalten, wie die Halbmesser der eingeschriebenen Kreise, oder wie die Senkrechten cd und CD.

Sieht man nun die Kreise für regelmäßige Vielecke von einer unendlichen Anzahl Seiten an; so wird man leicht begreifen, daß sich auch die Umkreise gegen einander verhalten wie ihre Halbmesser, oder wie ihre Durchmesser; wie auch, daß ähnliche Bogen von verschiedenen Kreisen, oder Kreisbogen von ähnlichen Ausschnitten in Hinsicht auf ihre wirkliche Länge sich gegen einander verhalten wie ihre Halbmesser, nähmlich der Bogen AEB : aeb = AC : ac. Dieser Satz ist auch schon aus der Entstehungsart des Kreises deutlich genug (346), weil alle Kreise einander ähnlich sind; denn sie sind auf eine gleiche Art bestimmet, und können bloß durch die Größe von einander unterschieden werden. Wir merken hier nur an, daß man zu jedem gegebenen Durchmesser den Umkreis nach diesem Satze finden könnte,

wenn

Fig. 64. wenn nur zu einem einzigen Durchmesser der zugehörige Umkreis einmahl bekannt wäre. Z. B. wenn wir einmahl überzeugt seyn werden, daß man zu einem Durchmesser = 113 den zugehörigen Umkreis = 355 setzen könne; so werden wir zu jedem Durchmesser d den Umkreis p durch folgende Proportion bestimmen können; $113 : 355 = d : p$, nähmlich es ist $p = \frac{355\,d}{113}$, und der zu einem gegebenen Umkreise $= p$ zugehörige Durchmesser $d = \frac{113\,p}{355}$. Wir werden weiter unten das Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise durch eine Näherung zu bestimmen Gelegenheit haben.

V. Abschnitt.

Von einigen Aufgaben über die Proportional-Linien.

§. 417.

65. Zu drey gegebenen Geraden, a, b, c die vierte Proportional-Linie $x = \frac{bc}{a}$ durch Verzeichnung zu finden.

Auflösung. Auf den Schenkeln eines beliebigen Winkels schneide man $GM = a$, $GN = b$, GP c ab, ziehe MN, und durch P die Parallele PQ; so ist $GQ = x = \frac{bc}{a}$. Denn $GM : GN = GP : GQ$, d. i. $a : b = c : GQ = \frac{bc}{a}$.

66. Wäre zu zwey gegebenen Geraden a und b die dritte Proportionale $x = \frac{b^2}{a}$ zu suchen; so mache man wieder $GM = a$, $GN = b$, $GP = b$; ziehe NM, und durch P die Parallele PQ; so ist GQ die gesuchte Proportional-Linie $\frac{b^2}{a}$.

§. 418. 1

§. 418.

Fig. 67.

Zwischen zwey gegebenen Geraden a und b eine mittlere Proportionale $x = \sqrt{ab}$ zu finden.

Auflösung. Man ziehe eine Gerade AM, schneide $AB = a$, $BD = b$ ab; auf dem Durchmesser AD beschreibe man den Halbkreis AED, und ziehe die Senkrechte BE; so ist diese Senkrechte die gesuchte mittlere Proportionale $x = \sqrt{ab} = \sqrt{(AB.BD)}$ (412.). 68.

Oder man ziehe eine Gerade $DB = b =$ der größeren Gegebenen, schneide $BA = a$ ab; auf AD beschreibe man den Halbkreis AED, ziehe durch den Punct B die Tangente BE (369.); so ist die Tangente diese gesuchte mittlere Proportionale $x = \sqrt{ab} = \sqrt{(BA.BD} = BE$ (411.). 69.

Oder endlich, man ziehe $BD = b$, beschreibe darauf den Halbkreis BED, mache $BA = a$, ziehe die Senkrechte AE, und durch die Puncte E und B die Sehne BE; so ist diese die gesuchte mittlere Proportionale zwischen BD und BA. Denn in den ähnlichen Dreyecken BEA und BED ist $BA : BE = BE : BD$, nähmlich es ist $BE = \sqrt{(BA.BD)}$.

§. 419.

Eine gegebene Gerade AB in eine verlangte Anzahl gleicher Theile, z. B. in fünf zu theilen. 70.

Auflösung. Man ziehe eine Gerade MN, und schneide von M gegen N fünf gleiche Theile M 1, 1 2, 2 3, 3 4, 4 5 dergestalt ab, daß M 5 > AB sey (welches zwar in der Theorie nicht unumgänglich nothwendig, hingegen in der Ausübung nützlich ist); auf M 5 errichte man ein gleichseitiges Dreyeck M5D, mache $DC = AB$, $DF = AB$, und ziehe CF, so ist auch $CF = AB$; endlich ziehe man die Geraden D1, D2, D3, D4; so wird dadurch die Gerade CF oder die gegebene AB in fünf gleiche Theile getheilet; nähmlich $Ca = \frac{1}{5} AB$. $Cb = \frac{4}{5} AB$, u. s. w. Denn es ist $DM : DC = M1 : Ca$, oder $M5 : AB = M1 : Ca$, oder auch $M5 : M1 = AB : Ca$; nun aber ist $M5 : M1 = 5 : 1$

Fig. 70. es ist also auch 5 : 1 = AB : Ca; und folglich Ca = $\frac{1}{5}$ AB u. s. w.

Eben dieses ist zu beobachten, wenn die Gerade AB nach einem gegebenen Verhältnisse zu theilen wäre. Z. B. wenn diese Gerade in zwey Theile zu theilen wäre, die sich wie 2 : 3 verhalten; so schneide man nur auf der Linie MN fünf = (2+3) gleiche Theile ab, und ziehe die Gerade D2, so ist CF = AB in dem Puncte b in zwey Theile dergestalt getheilet, daß Cb : bF = 2 : 3 sich verhält.

§. 420.

71. Eine Linie in sehr viele, z. B. fünf Zolle, oder eine andere beliebige Länge in 1000 gleiche Theile zu theilen, d. i. einen geometrischen Maßstab zu verfertigen.

Auflösung. Man ziehe eine Gerade AB, trage von A gegen B 10 halbe Zolle oder andere beliebige gleiche Theile auf, in A und B errichte man die Senkrechten AC und BD, trage auf jede derselben von A gegen C, und von B gegen D 10 gleiche Theile von beliebiger Länge auf; durch diese Puncte ziehe man zehen gerade Linien, die alle zu AB parallel seyn werden; auf die letzte derselben nähmlich auf CD trage man wieder die 10 halbe Zolle von C gegen D auf, welche genau bis D reichen müssen, wenn die Senkrechten AC und BD richtig gezogen sind; die Theilungspuncte der beyden Linien AB und CD verbinde man mit den Geraden ab, 100 d, 200 e, u. s. w.; sodann theile man noch den ersten halben Zoll Ab und Ca in 10 gleiche Theile, und ziehe durch diese Theilungspuncte die Querlinien (Transversalen) am, 10 n u. s. w.; endlich schreibe man die Zahlen hin, wie sie in Fig. 71. zu sehen sind; so ist die Linie AB in 1000 gleiche Theile getheilet. Nähmlich 7 p enthält 7, a 10 enthält 10, a 30 enthält 30, 7v enthält 37, a 100 enthält 100, und a 500 enthält 500 solcher Theile, deren 1000 = AB sind; oder es ist $7p = \frac{7}{1000}$ BA,

$7v = \frac{37}{1000}$ AB u. s. w. Denn in den Dreyecken

abm

abm und a7p ist ab : bm = a7 : 7p, oder ab : a7 = bm : 7p. Fig.
Nun aber ist ab : a7 = 10 : 7; folglich 10 : 7 = 71.

bm : 7p; ferner ist $bm = \frac{1}{10} Ab = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} AB = \frac{1}{100} AB$;

es ist also $10 : 7 = \frac{1}{100} AB : 7p$, und folglich

$7p = \frac{7}{1000} AB$. Eben so leicht ist es einzusehen, daß 7v = $\frac{37}{1000}$ AB ist. Denn es ist 7v = 7p + pv; nun aber ist 7p = $\frac{7}{1000}$ AB, und $pv = a30 = \frac{3}{10} aC = \frac{3}{100} CD = \frac{30}{1000} AB$;

folglich ist $7v = \frac{7}{1000} AB + \frac{30}{1000} AB = \frac{37}{1000} AB$

u. s. w. Auf eben dieselbe Art sieht man ein, daß xv = 537 ist. Denn es ist xv = x7 + 7p + pv = 500 + 7 + 30 = 537 u. s. w.

Aus der Einrichtung dieses Maßstabes erhellet deutlich, daß man eine Linie, welche z. B. 530 solcher Theile enthalten soll, deren 1000 = AB sind, von diesem Maßstabe mit dem Zirkel abnehmen könne, wenn man eine Spitze in 500 einsetzet, und die andere bis 30 eröffnet. Sollte eine Linie von 537 Theilen abgetragen werden; so eröffnet man den Zirkel von x bis v; wären endlich nur $536\frac{1}{2}$ Theile abzunehmen, so müßten die Zirkelspitzen in der Mitte der zwey Parallelen 66 und 77, und zwar die eine auf der Senkrechten 500 h, und die andere Spitze auf der Transversale 30 v eingesetzet werden, u. s. w.

Auch kann man untersuchen, wie viel Theile eine gegebene Gerade auf diesem Maßstabe abschneide, wenn man die Zirkelspitzen in ihre Endpuncte einsetzet, und sodann diese Oeffnung des Zirkels auf die Gerade CD also überträgt, daß die erste Spitze auf einem der Theilungspuncte 200, 300 u. s. w. eingesetzet ist, die zweyte aber zwischen C und a eintrifft. Sollte nun diese zweyte Spitze zwischen C und

Fig. 71. a genau in einem Theilungspuncte z. B. in 30, und die erste in 500 eintreffen, so würde die gegebene Linie = 530 seyn. Sollte hingegen diese zweyte Spitze zwischen zwey Theilungspuncte, z. B. zwischen 30 und 40 eintreffen; so rücke man mit dem Zirkel so lange parallel herunter, bis diese Spitze genau auf eine Transversale eintrifft. Ereignet sich nun dieses in dem Puncte v, nähmlich wenn die eine Spitze in v auf der Transversale 30, die andere aber auf der Parallele 7 7 in x eintrifft; so enthält die gegebene Gerade 537 Theile. Würden hingegen die Spitzen nur in der Mitte der Parallelen 6 6 und 7 7 jedoch auf der Senkrechten 500 und auf der Transversale 30 eintreffen; so würde auch die gegebene Linie nur $536\frac{1}{2} = 536,5$ Theile enthalten. Sollte die gegebene Linie, welche auf diesem Maßstabe zu untersuchen ist, größer seyn als CD; so wird nur der 2te, 3te oder 4te Theil davon auf den Maßstab getragen, und diese Zahl mit 2, 3 oder 4 multipliciret um die Theile der ganzen gegebenen Linie zu erhalten. Wenn man nun Ca 100 Zolle, oder 100 Schuhe, oder 100 Schritte, oder auch 100 Klafter u. s. w. gelten läßt, so heißt diese Eintheilung ein verjüngter Maßstab. Die Eintheilung durch Hülfe der Transversalen eines wirklichen Zolles in Linien und Puncte, ingleichen eines willkührlichen Durchmessers einer Bombe in 64, eines angenommenen Durchmessers einer Kanonkugel in 32 gleiche Theile, und mehrere dergleichen Maßstäbe überlasse ich dem eigenen Nachdenken der Anfänger.

§. 421.

Der eben beschriebene geometrische Maßstab ist bey der Auflösung einiger geometrischen Aufgaben von einem großen Nutzen, wenn die Verzeichnung der gefundenen Gleichung einem Anfänger entweder gar nicht beyfällt, oder wenn sie weitläufig seyn sollte. Denn in diesem Falle untersuche man nur, wie viel Theile auf diesem Maßstabe eine jede in der Aufgabe gegebene Linie enthalte, entwickle aus der gefundenen Gleichung den Werth der unbekannten Linie in Zahlen,

len, und nehme dann diesen gefundenen Werth von dem Maßstabe herunter; so wird man die gesuchte Linie erhalten. Z. B. es sollen zwischen den zwey gegebenen Linien a und b zwey mittlere Proportionalen x und y gefunden werden. Vermöge der Bedingung der Aufgabe ist $a : x = x : y$, nähmlich $y = \frac{x^2}{a}$; und $x : y = y : b$; d. i. $x : \frac{x^2}{a} = \frac{x^2}{a} : b$; folglich $x = \sqrt[3]{a^2 b}$, und $y = \frac{\sqrt[3]{(a^2 b)^2}}{a} = \sqrt[3]{ab^2}$. Es sey auf dem geometrischen Maßstabe $b = 333{,}3$ und $a = 72$; so ist $x = 120$, und $y = 200$ sehr nahe; man nehme demnach diese Theile nur von eben demselben Maßstabe mit dem Zirkel herunter; so werden die Längen derselben die gesuchten Linien seyn. Fig 71.

Ingleichen: es ist die Seite eines regelmäßigen Zwölfeckes gegeben; man soll daraus den Halbmesser des herumbeschriebenen Kreises finden. Es sey die gegebene Seite $= g = 200$ Theilen eines geometrischen Maßstabes, und der unbekannte Halbmesser sey $= a$; so ist $a \sqrt{(2 - \sqrt{3})} = g = 200$ (vermöge §. 408.), und $a = \frac{200}{\sqrt{(2-\sqrt{3})}}$, oder $a^2 = \frac{40000}{2-\sqrt{3}} = \frac{40000 \cdot (2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3}) \cdot (2+\sqrt{3})} = \frac{40000 \cdot (2+\sqrt{3})}{4-3} = 40000 \cdot (2 + \sqrt{3}) = 40000 \cdot (3{,}73205) = 149282$, und endlich $a = \sqrt{(149282)} = 386{,}3 = 386\frac{1}{3}$ beynahe. Man nehme demnach nur die gefundenen $386\frac{1}{3}$ Theile auf demselben Maßstabe; so wird man die Länge des gesuchten Halbmessers haben.

Wir wollen zur Uebung noch ein Paar Aufgaben hierher setzen, deren Auflösung wir in der Folge nöthig haben werden, als:

§. 422.

Fig. 80.

§. 422.

Aus den gegebenen drey Seiten eines Dreyeckes ABC die Höhe desselben CD, und die Abschnitte AD und DB der Grundlinie zu finden.

Auflösung Es sey die für die Grundlinie angenommene Seite $AB = b$, $AC = a$, und $BC = c$, die Höhe $CD = y$, und der erste Abschnitt $AD = x$; so ist der zweyte Abschnitt $DB = AB - AD = b - x$. Nun ist $CD^2 = AC^2 - AD^2$ (vermöge §. 403.), und auch $CD^2 = CB^2 - DB^2$, nähmlich $y^2 = a^2 - x^2$, und $y^2 = c^2 - (b-x)^2 = c^2 - b^2 + 2bx - x^2$. Es ist also auch $a^2 - x^2 = c^2 - b^2 + 2bx - x^2$; folglich $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b} = x = \frac{a^2 - c^2}{2b} + \frac{1}{2}b = \frac{(a+c) \cdot (a-c)}{2b} + \frac{1}{2}b = AD$. Man suche also nur zu $2b$, zu $a+c$, und zu $a - c$ die vierte Proportionale, addire zu derselben $\frac{1}{2}b$, trage diese gefundene Gerade von A in D, und verbinde diese Puncte D und C mit der Geraden CD; so ist die Höhe CD, und jeder Abschnitt AD und DB bestimmet. Oder man untersuche die gegebenen Seiten auf einem Maßstabe, und berechne daraus den Werth von $x = AD$. Es sey z. B. $b = 140$, $a = 150$, $c = 130$; so ist $x = \frac{(150+130) \cdot (150 - 130)}{280} + 70 = 90$. Wäre hingegen $AB = b = 17$, $AC = a = 10$, und $CB = c = 21$; so müßte $x = \frac{(10+21) \cdot (10 - 21)}{34} + \frac{17}{2} = -\frac{52}{34}$, nähmlich negativ seyn; und dieses ist ein Zeichen, daß der Abschnitt AD auf der entgegengesetzten Seite liegen, und der Punct D nicht zwischen A und B, sondern diesseits des Dreyeckes auf die Verlängerung von AB fallen müsse, und daß folglich in diesem Falle das Dreyeck ABC einen stumpfen Winkel in A habe. Auch für die Höhe CD läßt sich ein allgemeiner Ausdruck finden. Denn da $y^2 = a^2 - x^2$ ist;

so

so ist, wenn wir für x^2 seinen Werth $\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right)^2$ substituiren, und gehörig reduciren, Fig. 80.

$$y = \sqrt{\left(\frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4b^2}\right)}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{4b^2}\right]}$$

oder $y = \frac{2}{b}\sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]}$, wenn man die halbe Summe aller drey Seiten, nähmlich $\frac{a+b+c}{2} = s$ setzet. So z. B. ist im vorigen Falle, da wir $a = 150$, $b = 140$, $c = 130$ angenommen haben, die Höhe $y = 120$.

§. 423.

Zwey parallele Sehnen AB und PQ eines Kreises, nebst ihrem Abstande FD sind gegeben, man soll daraus den Halbmesser bestimmen. 64.

Auflösung. Es sey $AB = a$, $PQ = b$, $FD = c$, der Halbmesser $MC = CE = x$, und $ED = y$; so ist $ME = 2x$, $DM = ME - DE = 2x - y$, $EF = ED + DF = y + c$, und $FM = ME - FE = 2x - y - c$. Nun ist $ED : DB = DB : DM$ (412), und $EF : FQ = FQ : FM$, nähmlich $y : \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a : 2x - y$, und $y + c : \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}b : 2x - y - c$. In der ersten Proportion ist $2xy - y^2 = \frac{1}{4}a^2$, und in der zweyten $2xy + 2cx - 2cy - y^2 - c^2 = \frac{1}{4}b^2$. Aus der ersten Gleichung findet man $y = x + \sqrt{(x^2 - \frac{1}{4}a^2)}$, und aus der zweyten $y = x - c + \sqrt{(x^2 - \frac{1}{4}b^2)}$; folglich ist $x + \sqrt{(x^2 - \frac{1}{4}a^2)} = x - c + \sqrt{(x^2 - \frac{1}{4}b^2)}$, d. i. $\sqrt{(x^2 - \frac{1}{4}a^2)} = -c + \sqrt{(x^2 - \frac{1}{4}b^2)}$. (A) und $x^2 - \frac{1}{4}a^2 = c^2 - 2c\sqrt{(x^2 - \frac{1}{4}b^2)} + x^2 - \frac{1}{4}b^2$; nähmlich $\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}a^2 - c^2 = -2c\sqrt{(x^2 - \frac{1}{4}b^2)}$. (B), wenn man beyde Theile der Gleichung (A) zum Quadrate erhebet und gehörig reduciret. Und nun ist $(\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}a^2 - c^2)^2 = 4c^2x^2 - b^2c^2$, wenn man auch die Gleichung (B) qua-

Fig. 64. quadriret. Endlich ist aus dieser letzten Gleichung $x = \frac{V[(\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}a^2 - c^2)^2 + b^2c^2]}{2c}$. Setzen wir nun $a = 60$ $b = 80$, $c = 10$; so ist $x = \frac{V[(1600 - 900 - 100)^2 + 640000)]}{20}$

$= \frac{V(360000 + 640000)}{20} = \frac{V(1000000)}{20} = \frac{1000}{20} = 50$.

Wäre hingegen $AB = a$, und $ED = b$ gegeben; so findet man den Halbmesser $EC = x = \frac{\frac{1}{4}a^2 + b^2}{2b}$, weil $ED : DB = DB : DM$, nähmlich $b : \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a : 2x - b$ statt findet (412.).

§. 424.

72. Die (420.) vorgetragene Eintheilung durch Hülfe der Transversalen kann auch auf die in der Artillerie üblichen Mund- und Böller-Quadranten, Winkelmesser und andere mathematischen Instrumente, bey denen ein Grad eines Kreisbogens noch in mehrere gleiche Theile einzutheilen ist, in der Ausübung mit Vortheile angewendet werden, und zwar auf folgende Art.

Es sey BD ein Bogen eines Quadranten, der in den Puncten 1, 2, 3 u. s. w. in die einzelnen Grade getheilet ist; der Halbmesser dieses Bogens sey $AB = a$; man verlanget jeden Grad in n gleiche Theile zu theilen. Um dieses zu erhalten, schneide man von dem Halbmesser AB ein beliebiges Stück $BC = b$ von B gegen A ab, ziehe durch C mit dem Halbmesser $AC = a - b$ den Bogen CE, bemerke auf demselben wieder die einzelnen Grade 1′, 2′, 3′, u.s.w. und ziehe die Transversalen C1, 1′ 2, 2′ 3 u. s. w., dann beschreibe man aus A die parallelen Kreisbogen 10p, 20q, 30s u. s. w. mit den Halbmessern $A10 = \frac{na^2 - nab}{na - 1b}$,

$A20 = \frac{na^2 - nab}{na - 2b}$, $A30 = \frac{na^2 - nab}{na - 3b}$ u. s. w.; so wird

der

der durch den Durchschnittspunct g der Transversale C1 ge- Fig.
zogene Halbmesser Ad einen, und Af zwey *n*te Theile des 72.
Bogens B 1 abschneiden, z. B. der erste 10, und der zweyte 20 Minuten, wenn B1 = 1° und $n = 6$ angenommen wird; u. s. w.

Denn es sey der unbekannte Halbmesser A 10 = x, der Bogen B1 = c, Bd = $\frac{c}{n}$, weil der Halbmesser Ad einen *n*ten Theil des Bogens B1 abschneiden muß, wenn er durch den Durchschnittspunct g der Transversale C1 und des ersten parallelen Kreisbogens 10p gezogen wird. Nun findet in den zwey Ausschnitten BAd und 10Ag folgende Proportion statt, AB : A 10 = Bd : 10g, oder $a : x = \frac{c}{n} : 10g$;

folglich ist $10g = \frac{cx}{an}$. Ferner ist in den Dreyecken C10g und CB1 (weil man die kleinen Bogen 10g und B 1 ohne in der Ausübung einen Fehler zu befürchten für gerade Linien ansehen kann) CB : C 10 = B1 : 10g oder CB : (A10 — AC) = B 1 : 10g, nähmlich $b : x - (a - b) = c : 10g$, und $10g = \frac{cx - ac + bc}{b}$; folglich ist auch $\frac{cx}{an} = \frac{cx - ac + bc}{b}$, oder $bx = nax - na^2 + nab$, und endlich $x = \frac{na^2 - nab}{na - b}$.

Eben so findet bey der Bestimmung des zweyten Halbmessers A20 = y folgende Proportion statt; AB : A20 = Bf : 20h, nähmlich $a : y = \frac{2c}{n} : 20h$; folglich ist $20h = \frac{2cy}{an}$. Ferner ist CB : C20 = B1 : 20h, nähmlich $b : y - (a - b) = c : 20h$, und es ist $20h = \frac{cy - ac + bc}{b}$

folg-

Fig. 72. folglich ist auch $\frac{2cy}{an} = \frac{cy - ac + bc}{b}$, und endlich

$$y = \frac{na^2 - nab}{na - 2b}.$$

Und auf eben dieselbe Art findet man für die Länge des dritten Halbmessers $A30 = \frac{na^2 - nab}{na - 3b}$ u. s. w.

Es sey nun auf einem geometrischen Maßstabe $AB = a = 1000$, die Breite des Randes $CB = b = 100$, und $n = 6$, nähmlich 1 Grad sey in 6 gleiche Theile, oder von 10 zu 10 Minuten zu theilen; so ist der Halbmesser $AC = 900$; $A\,10 = 915,3$; $A\,20 = 931$; $A30 = 947,4$; $A40 = 964,3$; $A\,50 = 981,8$; $A60 = AB = 1000$.

Diese Eintheilung durch Hülfe der Transversalen kann hauptsächlich auf jene Gattungen der Winkelmesser vortheilhaft angewendet werden, bey denen ein mit einem kleinen Gewichte beschwerter frey hangender Faden auf dem Rande des Instrumentes die gesuchten Winkel anzeiget. Wenn z. B. die Lage des Fadens AF ist, so wird der Bogen BF, oder der Winkel $BAF = 2°, 50'$ seyn Wir haben bey der Bestimmung der Halbmesser die kleinen Bogen 10g, 20h .... B1, für gerade und parallele Linien angesehen, welches zwar nicht ganz richtig ist; jedoch können wir dieses thun, ohne in der Ausübung deswegen einen Fehler zu begehen, welches wir weiter unten in der Trigonometrie werden einsehen können.

§. 425.

73. Bey jenen Winkelmessern hingegen, bey denen ein bewegliches Lineal die gesuchten Winkel auf dem Rande bezeichnet, pflegt man die kleinen Theile eines Grades durch Hülfe des sogenannten **Verniers** oder **Nonius** auf folgende Weise zu bestimmen.

Es sey AB ein Stück des Randes von einem Winkelmesser, der schon in die einzelnen Grade abgetheilet ist, D oder E sey ein Stück des um den Mittelpunct beweglichen Li-

Lineals, Dm oder Em die Mittel- oder Visierlinie, und mn ein an dem Ende des Lineals schief abgeschlieffener Bogen, der sich sammt dem Lineale um den Mittelpunct des Instrumentes drehen läßt. Wenn man nun mit diesem Instrumente die Winkel bis auf die sechsten Theile eines Grades, oder von 10 zu 10 Minuten zu bestimmen verlanget; so mache man den Bogen mn = 7°, theile denselben in 6 gleiche Theile, und setze die Ziefern dazu, wie sie in Fig. 73. zu sehen sind; so wird man dadurch im Stande seyn den sechsten Theil eines Grades zu bestimmen, oder die Winkel von 10 zu 10 Minuten zu messen. Stellet man nun das bewegliche Lineal also, daß der Endpunct m in der Visierlinie Dm, oder der Nullpunct des Verniers mit einem Theilstriche des Randes, z. B. mit 10° genau übereinstimme; so wird kein einziger Theilstrich des Verniers, außer dem letzten n, mit den Theilstrichen des Randes übereintreffen, sondern der Strich 10 des Verniers wird von dem Striche 9 des Randes um $\frac{1}{6}$ Grad = 10 Minuten, der Strich 20 von 8 Grad um $\frac{2}{6}$ Grad = 20 Minuten, der Strich 30 von 7 Grad um 30 Minuten entfernt seyn u. s. w., weil 6 Theile des Verniers um 1 Grad oder 60 Minuten größer sind als sechs Grade des Randes, und folglich ein Theil des Verniers um $\frac{1}{6}$ Grad = 10 Minuten, zwey Theile um 20, und drey Theile des Verniers um 30 Minuten größer seyn müssen, als 1, 2, oder 3 Grade des Randes u. s. w. Wenn man demnach das Lineal so weit fortrückete, daß der Theilstrich des Verniers 40 mit dem 6ten Grade übereinstimmete; so würde der Nullpunct um 40 Minuten von 10 Graden weiter fortgerücket seyn. Da nun in der Lage des Lineals Em der Theilstrich 40 des Verniers mit einem Theilstriche des Randes genau übereintrifft, und der Nullpunct m zwischen 29 und 30 Grad weiset; so ist der Bogen, von 0 Grad gerechnet bis zum Nullpuncte des Verniers, oder der Winkel, welchen die Visierlinie Em mit der Linie F o in dem Mittelpuncte des Instrumentes einschließt, = 29°, 40′.

Fig. 73.

Würde es erforderlich seyn, die Winkel von 5 zu 5 Minuten zu unterscheiden; so müßte der Bogen des Verniers

=

Fig. = 13° seyn, und in 12, gleiche Theile getheilet werden.

73. Allgemein: sollen die Winkel von n zu n Minuten unterschieden werden, so muß der Bogen des Verniers von $(\frac{60}{n} + 1)$ Graden in $\frac{60}{n}$ Theile getheilet werden. Um z. B. noch einzelne Minuten nehmen zu können; müßte der Bogen des Verniers = 61° in 60 gleiche Theile getheilet seyn. Jedoch, da ein so großer Bogen des Verniers etwas unbequem ist; so pflegt man bey solchen Winkelmessern, mit denen Minuten zu messen sind, jeden Grad an dem Rande des Instrumentes in 6 gleiche Theile, nähmlich von 10 zu 10 Minuten durch Theilstriche zu theilen, gibt sodann dem Bogen des Verniers 11 solche Theile und theilet denselben in 10 gleiche Theile; so können auch auf diese Art die Winkel in Graden und einzelnen Minuten gemessen werden. Denn 1 Theil des Verniers ist in diesem Falle um $\frac{1}{10}$ größer als 1 Theil des Randes, nähmlich, um 1 Minute, weil ein Theil des Randes 10 Minuten enthält. Mann könnte dem Vernier auch nur 9 oder 5 Theile des Randes geben, wenn ein Theil des Randes in 10 oder 6 Theile zu theilen ist; nur müßte der Vernierbogen in diesem Falle an der entgegengesetzten Seite des Lineals angebracht werden, wie es ein jeder selbst leicht einsehen wird.

Die Eintheilung sowohl des Verniers als des Randes muß durch das Versuchen geschehen, wenn man mit keiner Theilmaschine versehen ist. Man pflegt den 4ten Theil des Umkreises in 90 gleiche Theile, d. i. in die einzelnen Grade zu theilen, wenn man ihn erstens in 3 gleiche Theile durch Uebersetzung des Halbmessers von den beyden Endpuncten, d. i. durch Einschreibung zweyer Sehnen, deren jede dem Halbmesser gleichet, zweytens jeden dieser 3 Theile durch das Versuchen in 5, drittens jeden dieser fünfzehn Theile in 3, und endlich viertens jeden dieser fünf und vierzig Theile wieder in 2 gleiche Theile theilet.

Daß die Eintheilung durch Hülfe des Verniers auch auf geradlinige Maßstäbe angewendet werden könne, wird ohne meine Erinnerung selbst ein Anfänger leicht begreifen.

§. 426.

Fig. 74.

Aufgabe. Auf einer gegebenen Geraden ab ein Dreyeck zu verzeichnen, welches einem gegebenen Dreyecke ACB ähnlich ist.

Auflösung. Man verzeichne den Winkel a = A, und b = B (352.); so ist das Dreyeck abc ∽ ABC (378. IV.).

Oder man untersuche die Geraden AB, AC, BC, ab auf einem geometrischen Maßstabe; suche sodann durch die Rechnung zu AB, AC und ab eine vierte Proportionale, trage diese von demselben Maßstabe herunter, und beschreibe mit einem dieser gefundenen Geraden gleichen Halbmesser aus a den Kreisbogen mn; endlich suche man auch zu AB, BC, und ab eine vierte Proportionale, und beschreibe mit derselben aus b einen Kreisbogen pq; darauf verbinde man den Durchschnittspunct c mit den Puncten a und b: so ist das Dreyeck abc ∽ ABC (400.).

Auf eben dieselbe Weise kann auf einer gegebenen Ge- 63.
raden ab ein Vieleck verzeichnet werden, welches einem gegebenen ABCDEFA ähnlich ist, wenn man die Diagonalen AC, AD, AE ziehet; sodann auf der gegebenen Linie ab das Dreyeck abc ∽ ABC, auf der Linie ac das Dreyeck dac ∽ DAC, auf der Linie ad das Dreyeck ade ∽ ADE, und endlich auf der Linie ae das Dreyeck afe ∽ AFE entweder durch Uebertragung der Winkel, oder durch Hülfe der Proportional-Linien verzeichnet, und endlich die Puncte a, f, e, d, c, b mit geraden Linien verbindet.

Oder auch: Man übertrage die gegebene Gerade auf die gleichnahmige Gerade des gegebenen Vieleckes, z B. von A bis b', ziehe aus A in alle Vieleckswinkel die Diagonalen AC, AD, AE, und sodann aus dem Puncte b' die Parallele b'c' zu BC, aus c' die Parallele c'd' zu CD u. s. w.; so ist das Vieleck Ab'c'd'e'f'A ∽ ABCDEFA, weil die Dreyecke des einen den Dreyecken des anderen Vieleckes wechselsweise ähnlich sind (415.). Statt der Parallelen b'c', c'd' u. s. w. kann man die Diagonalen Ac', Ad' u. s. w. durch die Rechnung bestimmen, indem man sagt, AB : Ab' = AC : Ac';

Fig. ingleichen AB : Ab′ = AD : Ad′ u. s. w. Wäre z. B.
63. Ab′ = $\frac{1}{2}$AB; so darf man nur jede der Diagonalen in den Puncten c′, d′, e′, f′, in zwey gleiche Theile theilen, und die Puncte b′, c′, d′, e′, f′ A mit geraden Linien verbinden, um das Vieleck Ab′c′d′e′f′ A, ∽ ABCDEFA zu erhalten.

Die übrigen Methoden, ein Vieleck, oder eine Figur zu verzeichnen, welche einer gegebenen Figur ähnlich ist, als z. B. durch die Einschreibung der Quadrate, durch Hülfe zweyer Maßstäbe: u. m. d. überlasse ich dem eigenen Nachdenken der Anfänger:

§. 427.

75. Aufgabe. Eine gerade Linie AB auf dem Felde zu messen, die nur an ihren Endpuncten, und nicht nach ihrer ganzen Länge zugängig ist.

Auflösung. Man suche einen Punct C außer der Geraden AB von der Beschaffenheit auf, daß man von C nach A und B in gerader Linie kommen könne, messe CA und CB aus, trage von C bis a den *n*ten (z. B. den 10ten) Theil der Geraden CA, ingleichen von C bis b den eben sovielten Theil von CB, entweder auf die Schenkel CA und CB selbst, oder auf ihre Verlängerung, messe sodann die Gerade ab und multiplicire dieselbe mit *n* (z. B. mit 10, wenn man Ca = $\frac{1}{10}$CA, Cb = $\frac{1}{10}$ CB aufgetragen hat); so wird dieses die Länge der Geraden AB seyn. Denn es ist das Dreyeck acb ∽ ACB (401.); folglich Ca : CA = ab : AB, d. i. $\frac{CA}{n}$: CA = ab : AB, oder $\frac{1}{n}$: 1 = ab : AB und endlich AB = *n* × ab.

§. 428.

76. Aufgabe. Eine Gerade AB auf dem Felde, die nur an einem ihrer Endpuncte A zugängig ist; z. B. die Entfernung des Punctes A von B zu messen.

Auflösung. Man errichte auf AB in dem Puncte A die Senkrechte AC von beliebiger Länge, messe AC, und trage

auf

auf ihre Verlängerung den $n$ten Theil von AC, nähmlich Ca $=$ $\frac{1}{n}$ AC, errichte in a wieder eine Senkrechte ab von unbestimmter Länge, verlängere sodann die Richtung BC, bis sie die Gerade ab in dem Puncte b durchschneidet, messe ab, und multiplicire dieselbe mit n; so wird dieses die Länge der Geraden AB, oder die Entfernung des Punctes A von B seyn. Fig. 76.

Sollte es die Beschaffenheit des Bodens nicht zulassen, die Senkrechten zu errichten; so nehme man den Punct C dergestalt an, daß man von C nach B und A sehen, bis A messen, und beyde CA und CB rückwärts verlängern könne, mache Ca $=\frac{1}{n}$ AC, verzeichne den Winkel m $=$ p (352.) und verlängere ab und BC, bis sie einander in b durchschneiden, messe sodann die Linie ab, und multiplicire dieselbe mit n; so wird auch dieses die Länge der Geraden AB seyn.

Man kann auch $\frac{1}{n}$ AC von C gegen A, z. B. bis a' auftragen, den Winkel m' $=$ p verzeichnen; sodann die Gerade a'b' messen, und dieselbe mit n multipliciren, um die Entfernung AB zu erhalten.

§. 429.

Aufgabe. Eine gerade Linie AB, d. i. die Entfernung zweyer Puncte A und B zu messen, wenn beyde unzugängig sind. 75.

Auflösung. Man suche einen Punct C von der Beschaffenheit daß man von C nach A und B sehen könne, messe AC und CB (nach §. 428.), mache Ca $=\frac{1}{n}$ CA, Cb $=\frac{1}{n}$ CB, messe sodann die Linie ab und multiplicire sie mit n; so ist dieses die Länge der Geraden AB.

§. 430.

Fig. 77.

§. 430.

Aufgabe. Einen unzugängigen Winkel, dessen Schenkel sich rückwärts verlängern lassen; z. B. einen Bollwerkswinkel CAB in zwey gleiche Theile zu theilen, um die Verlängerung der Capital-Linie PM sichtbar zu machen.

Auflösung. Man nehme in der Verlängerung der Gesichtslinien die Puncte D und E von der Beschaffenheit an, daß man von D nach E sehen könne; messe DE, EA und DA, suche zu (EA + AD), zu AD, und zu ED die 4te Proportional-Linie, trage dieselbe auf DE von D bis F; so wird die durch A und F gezogene Gerade AM den Winkel EAD = CAB in zwey gleiche Theile theilen, und folglich die Verlängerung der Capital-Linie seyn (401.).

Oder man verzeichne den Winkel n = m, theile den Winkel bDa durch die Linie Dd in zwey gleiche Theile, verlängere Dd, bis sie AE in dem Puncte G durchschneidet, messe sodann die Gerade GD, theile sie in dem Puncte N in zwey gleiche Theile; so wird auch die durch A und N gezogene Gerade AM den Winkel GAD = CAB in zwey gleiche Theile theilen, und folglich die Verlängerung der Capital-Linie seyn. Denn es ist AED + ADE + EAD = 180°, und auch AGD + ADG + GAD = 180°; folglich auch AED + ADE + EAD = AGD + ADG + GAD nähmlich AED + ADE = AGD + ADG, weil EAD = GAD ist. Nun aber ist AED = n = cDa, und ADE = bDc; folglich ist cDa + bDc, nähmlich bDa = AGD + ADG. Es ist aber ADG = bDd = $\frac{1}{2}$bDa; folglich ist bDa = AGD + $\frac{1}{2}$bDa, und AGD = bDa — $\frac{1}{2}$bDa = $\frac{1}{2}$bDa. Es ist daher auch AGD = ADG, und das Dreyeck GAD ist gleichschenkelig. Nun aber wird die Gerade GD durch AN in zwey gleiche Theile getheilet; es ist also auch der Winkel GAD in zwey gleiche Theile getheilet (382. V.).

Durch dieses Verfahren erhält man zugleich die Parallele DQ zu der Gesichtslinie AB, weil die Wechselwinkel n und m

ein-

einander gleich sind. Auf eben dieselbe Weise kann zu der Fig. anderen Gesichtslinie CA eine Parallele gezogen werden. 77.

§. 431.

Diese vier letzten practischen Aufgaben können durch geometrische Instrumente mit größrer Genauigkeit, und dabey in einer kürzeren Zeit aufgelöset werden, wie es in der Folge zu ersehen seyn wird. Ich habe sie hierher gesetzet, damit die Anfänger den Nutzen und Gebrauch der vorgetragenen Sätze einiger Maßen einsehen. Ich muß noch allhier vorläufig erinnern, daß die Entfernungen der Gegenstände auf der Oberfläche unserer Erde gemeiniglich durch den horizontalen (wagerechten) Abstand bestimmet werden.

Es wird aber die Lage einer geraden Linie horizontal genannt, wenn sie von der Richtung eines frey fallenden Körpers, oder von der Richtung eines frey hangenden mit einem Gewichte beschwerten Fadens (Senkels) senkrecht durchschnitten wird; und die Richtung eines frey fallenden Körpers, oder überhaupt, jede gerade Linie, die mit dieser Richtung übereintrifft, heißt eine Vertical-Linie. Sollte nun die horizontale Entfernung zweyer Gegenstände auf unebenem Boden durch die Meßkette bestimmet werden; so ist es erforderlich, daß die Kettenstäbe vertical gehalten werden, die Kette selbst aber, so viel es das Augenmaß zuläßt, horizontal angespannet sey. Wäre hingegen der horizontale Abstand zweyer Gegenstände mit der möglichsten Genauigkeit zu bestimmen, und folglich mit den Meßbalken auszumessen; so ist es unumgänglich nothwendig die Meßbalken durch Hülfe eines besonderen Instrumentes in die horizontale Lage zu bringen, weil man in diesem Falle mit dem bloßen Augenmaße nicht zufrieden seyn darf. Man erwählet dazu entweder die allgemein bekannte Setzwage (Schrotwage), deren Genauigkeit leicht mit einem bloßen Handzirkel untersuchet wird, oder auch die Wasserwage mit der Luftblase. Diese Wasser- 78.
wage (libella) besteht aus einer gläsernen Röhre AB, welche bis auf eine Luftblase CD mit Weingeiste gefüllet, an beyden Enden hermetisch zugeschmolzen, und in ein dazu ge-

Fig. 78. und 79. höriges Gehäuse von Messing EF befestiget ist. Sie hat die Eigenschaft, daß die Luftblase in gleichen Lagen oder Neigungen der Röhre alle Mahl wieder eben dieselbe Stelle einnimmt, bey der geringsten Veränderung derselben aber sogleich davon abweicht. Stellet man nun die Wasserwage mit der unteren Fläche des Gehäuses auf eine horizontale Ebene, und richtet die Röhre AB durch die Schraube y dergestalt; daß die Luftblase genau in der Mitte stehe; so sagt man, daß die Wasserwage berichtiget (rectificiret) sey. Stellet man sodann die berichtigte Wasserwage auf eine andere Ebene, z. B. auf die Mittellinie der oberen geraden Fläche eines Meßbalkens, und erhöhet oder erniedriget, (z. B. durch unterlegte Keile) das eine Ende dieses Balkens so lange, bis die Blase genau in der Mitte bleibt; so ist diese Mittellinie des Balkens, oder der Balken selbst horizontal. Die Berichtigung der Wasserwage mit der Luftblase, und überhaupt derjenigen Instrumente, die mit dergleichen Wasserwagen versehen sind, (als z. B. Pöller = Mund = und Ricochet - Quadranten, Ricochet - Dioptern u. s. w.) kann in der Ausübung durch Hülfe eines dazu eingerichteten Rectificir=Brettes PQ sehr leicht geschehen, und zwar auf folgende Art. Man setze die Wasserwage EF, dergestalt auf die Ebene des Rectificir=Brettes PQ, welches auf einer festen und unbeweglichen Unterlage ruhet, daß das eine Ende E gegen P, und das andere F gegen Q stehe, und erhöhe oder erniedrige diese Ebene durch die Schraube R, bis die Blase in ihre angewiesene mittlere Stelle kommt. Sodann kehre man die Wasserwage, ohne das Rectificir=Brett zu verrücken also um, daß die Mittellinie der unteren Fläche des Gehäuses wieder auf eben derselben Linie der Ebene PQ liege, und E gegen Q, F aber gegen P gerichtet sey. Verbleibet nun bey dieser Umkehrung die Blase in ihrer Stelle; so ist die Wasserwage schon zuvor berichtiget gewesen, und folglich dadurch das Rectificir= Brett in Horizont gebracht worden. Tritt aber die Blase nach der Umkehrung auf eine Seite; so weicht jene Linie der Ebene PQ, auf der die Wasserwage stehet, von dem Horizonte um einen gewissen Winkel ab. Wird nun die Blase durch die Schraube R

wie=

wieder an ihre angewiesene Stelle gebracht; so beschreibet dieselbe Linie das Doppelte von jenem Abweichungswinkel, und weicht sodann um eben soviel wie zuvor, jedoch nach der entgegengesetzten Seite, von dem Horizonte ab. Hat man nun für dieses Mahl die Umdrehungen der Schraube R gezählet, und führet die Ebene PQ um die halbe Anzahl der gezählten Umdrehungen zurück; so ist jene Linie der Ebene PQ, auf der die Wasserwage steht, horizontal. Man stelle demnach nur die Blase durch die Rectificir-Schraube y an ihre angewiesene Stelle; so ist die Wasserwage berichtiget

Fig. 78. und 79.

Versucht man dieses durch eine zweyte Wendung der Wasserwage, und die Blase tritt nicht in die Mitte, weil etwa die Gewinde der Schraube R ungleich, oder vielleicht die gezählten Umdrehungen nicht genau halbiret sind; so wiederhohle man die Arbeit, und verfahre wie zuvor, bis endlich die Blase nach jeder Umkehrung genau in ihrer angewiesenen mittleren Stelle ruhet. Es erhellet von selbst, daß man bey den eingetheilten Instrumenten, z. B. bey den Ricochet-Quadranten) das bewegliche Lineal, auf dem die Wasserwage befestiget ist, zuerst auf den Nullpunct stellen, und sodann das Instrument gehörig auf das Rectificir-Brett legen müsse. Das Rectificir-Brett kann von einem guten harten Holze verfertiget, und also eingerichtet werden, daß es für mehrere Instrumente zugleich dienet.

Zweytes Hauptstück.

Von den Eigenschaften der ebenen Flächen.

I. Abschnitt.

Von der Bestimmung des Flächeninhaltes geradliniger Figuren.

§. 432.

Fig. 81. Eine gegebene geradlinige Figur wird ausgemessen, wenn man untersuchet, wie oft eine bekannte für die Einheit angenommene Fläche in derselben enthalten sey, das ist, wie vielmahl sich die bekannte Fläche in der gegebenen auszumessenden herumlegen lasse. Die Zahl nun, welche anzeiget, wie oft die bekannte Fläche in der gegebenen enthalten ist, bestimmet den Flächeninhalt der auszumessenden Fläche, wenn sie mit der für die Einheit angenommenen Fläche multipliciret wird. Die Fläche, womit geradlinige Figuren ausgemessen werden, ist gemeiniglich ein Quadrat, dessen Seiten bald einen Zoll, bald einen Schuh, bald eine Klafter, zuweilen auch bey der Bestimmung sehr großer Flächen (z. B. ganzer Provinzen) eine Meile beträgt. Die erste Fläche heißt ein Quadrat-Zoll, die zweyte ein Quadrat-Schuh, die dritte eine Quadrat-Klafter, u. s. w.

§. 433.

Wenn die Seite des zum Maßstabe angenommenen Quadrates a in der Grundlinie DC eines gegebenen Rechteckes $m$mahl (z. B. 5mahl), und in der Höhe DA desselben $n$mahl (z. B. 3mahl) enthalten ist; so ist der Flächeninhalt des Rechteckes $ABCD = mn \cdot a = 5 \cdot 3 \cdot a = 15 \cdot a$.

Denn

Denn man theile nur die Grundlinien DC und AB in $m = 5$, und die Höhen DA und CB in $n = 3$ gleiche Theile, und verbinde die Theilungspuncte durch gerade Linien; so wird man augenscheinlich sehen, daß auf der Grundlinie DC eine Reihe von $m = 5$ gleichen Quadraten entstehet, deren jedes dem für den Maßstab angenommenen Quadrate gleich ist; und daß $n = 3$ solche vollkommen gleiche Reihen über einander stehen. Es ist demnach die Anzahl aller eingeschriebenen Quadrate $= m \cdot n = 5 \cdot 3 = 15$. Nun ist ein jedes dieser Quadrate z. B. $b = a$; es ist also auch $mn \cdot b = mn \cdot a$. Nun aber ist $mn \cdot b =$ ABCD; es ist also auch $mn \cdot a =$ ABCD $= 5 \cdot 3 \cdot a = 15a$. Fig. 81.

§. 434.

Setzet man die Seite des für die Einheit angenommenen Quadrates $= s$; so ist DC $= ms$, und DA $= ns$, nähmlich $m = \frac{DC}{s}$, und $n = \frac{DA}{s}$, wenn s in DC $m$mahl, und in DA $n$mahl enthalten ist. Nun aber ist das Rechteck ABCD $= m \cdot n \cdot a$; es ist also auch ABCD $= \frac{DC}{s} \cdot \frac{DA}{s} \cdot a = \frac{DC \cdot DA \cdot a}{s^2}$. Setzet man ferner $s = 1$ (z. B. $s = 1$ Schuhe); so ist $a = 1$ Quadrat-Schuh, und folglich ABCD $= DC \cdot DA$ Quadrat-Schuhen; nähmlich der Flächeninhalt eines Rechteckes ist gleich dem Producte aus der Grundlinie in die Höhe oder Breite des Rechteckes, allwo für die Einheit das Quadrat auf derjenigen Linie genommen werden muß, mit der man die Grundlinie und Höhe des Rechteckes ausgemessen hat.

§. 435.

Da nun ein Quadrat nichts anderes ist, als ein Rechteck von gleicher Grundlinie und Höhe; so ist der Flächeninhalt eines Quadrates gleich dem Producte einer Seite desselben mit sich selbst multipliciret. Es ist demnach der Flächen-

Fig. Inhalt eines Quadrates, dessen jede Seite in der Länge 12 Zolle beträgt, nähmlich es ist ein Quadrat-Schuh = 12.12 = 144 Quadrat-Zollen; eine Quadrat-Klafter = 6.6 = 36 Quadrat-Schuhen = 36.144 = 5184 Quadrat-Zollen; u. s. w.

§. 436.

Ist die Länge der Grundlinie, und auch die Höhe eines Rechteckes oder nur eine aus diesen zwey Abmessungen in Klaftern, Schuhen, Zollen u. s. w. ausgedrucket; so muß man diese zwey Abmessungen, damit sie beyde mit eben derselben Einheit gemessen werden, in Zolle verwandeln, wenn die kleinste gegebene Gattung aus Zollen besteht. Sodann muß man diese zwey verwandelten Abmessungen mit einander multipliciren um den Flächeninhalt in Quadrat-Zollen zu erhalten, und endlich dieses Product durch 30.144 = 5184, den Rest aber durch 144 dividiren, um eben diesen Flächeninhalt in Quadrat-Klaftern und Quadrat-Schuhen zu bestimmen. Man kommt gemeiniglich in diesem Falle mit der Rechnung am geschwindesten zu Ende, wenn man die Größen der kleineren Gattung in Brüche von der größeren Gattung (nach 92.) verwandelt; und sodann die Multiplication (nach 89.) verrichtet. Es sey z. B. die Grundlinie eines Rechteckes = $4^{\circ}, 0^{\prime}, 9^{\prime\prime}$; und die Höhe = $0^{\bullet}, 3^{\prime}, 6^{\prime\prime}$. (Die über die Ziffern gesetzten Zeichen $^{\bullet}, ^{\prime}, ^{\prime\prime}, ^{\prime\prime\prime}, ^{\mathrm{IV}}, ^{\mathrm{V}}$ .... bedeuten, wie es ohnehin bekannt ist Klafter, Schuhe, Zolle, Linien, Puncte oder Scrupeln nach der bis jetzt üblichen Eintheilung der Klafter in 6 Schuhe oder Fuße, eines Fußes in 12 Zolle, eines Zolles in 12 Linien, einer Linie in 12 Puncte, eines Punctes in 12 Quinten, u. s. w.). Nun ist $4^{\circ}, 0^{\prime}, 9^{\prime\prime} = \frac{33^{\circ}}{8}$, und $0^{\circ}, 3^{\prime}, 6^{\prime\prime} = \frac{7^{\circ}}{12}$; folglich ist der Flächeninhalt = $\frac{33^{\circ}}{8} \cdot \frac{7^{\circ}}{12} = \frac{231}{96}$ Quadrat-Klaftern = $2\frac{1}{3}\frac{3}{4}\,\square^{\circ} = 2\,\square^{\circ}$ und

$\frac{13 \cdot 36}{32}$ Quadrat-Schuhen = 2 □° $14\frac{5}{8}$ □ᴵ; und eben so Fig.

lassen sich $\frac{5}{8}$ Quadrat-Schuhe in $\frac{5 \cdot 144}{8}$ = 90 Quadrat-Zolle verwandeln. Es ist demnach der Flächeninhalt des gegebenen Rechteckes = 2 □° 14 □ᴵ und 90 □ᴵᴵ.

§. 437.

Einige Meßkünstler theilen die Quadrat-Klafter in 6 Theile, die sie Quadrat-Klafterschuhe (oder Riemenschuhe) nennen; jeden solchen Theil zerfällen sie wieder in 12 gleiche Theile, und diese heißen sie Quadrat-Klafterzolle; u. s. w.

Ein Klafterschuh einer Quadrat-Klafter ist nähmlich ein Rechteck 1 °lang 1 ᴵbreit; ein Klafterzoll ist ein Rechteck 1 °lang 1 ᴵᴵbreit; eine Klafterlinie ist ein Rechteck 1 °lang 1 ᴵᴵᴵbreit u. s. w.

Quadrat-Klaftern, Quadrat-Schuhe, Quadrat-Zolle..... können abgekürzet mit □°, □ᴵ, □ᴵᴵ..... hingegen Klafterschuhe, Klafterzolle, Klafterlinien der Quadrat-Klafter ..... mit □klᴵ, □klᴵᴵ, □klᴵᴵᴵ .... bezeichnet werden. Es ist demnach vermöge dieser Eintheilung, Benennung und Bezeichnung

1 □klᴵ = $\frac{1}{6}$ □° = $\frac{1}{6} \cdot 36$ □ᴵ = 6 □ᴵ;
1 □klᴵᴵ = $\frac{1}{12}$ □klᴵ = $\frac{1}{12} \cdot$ 6 □ᴵ = $\frac{1}{2}$ □ᴵ = 72 □ᴵᴵ;
1 □klᴵᴵᴵ = $\frac{1}{12}$ □klᴵᴵ = $\frac{1}{12} \cdot$ 72 □ᴵᴵ = 6 □ᴵᴵ;
1 □klᴵⱽ = $\frac{1}{12}$ □klᴵᴵᴵ = $\frac{1}{12} \cdot$ 6 □ᴵᴵ = $\frac{1}{2}$ □ᴵᴵ = 72 □ᴵᴵᴵ;
1 □klⱽ = $\frac{1}{12}$ □klᴵⱽ = $\frac{1}{12} \cdot$ 72 □ᴵᴵᴵ = 6 □ᴵᴵᴵ.

Und 1 □ᴵ = $\frac{1}{6}$ □klᴵ = 2 □klᴵᴵ;
1 □ᴵᴵ = $\frac{1}{6}$ □klᴵᴵᴵ = 2 □klᴵⱽ;
1 □ᴵᴵᴵ = $\frac{1}{6}$ □klⱽ = 2 □klⱽᴵ;
1 □ᴵⱽ = $\frac{1}{6}$ □klⱽᴵᴵ = 2 □klⱽᴵᴵᴵ; u. s. w.

Nach dieser Benennung und Eintheilung enthält nun ein Rechteck, dessen Grundlinie = 4°, 0ᴵ, 9ᴵᴵ = $\frac{33°}{8}$, und Höhe = 0°, 3ᴵ, 6ᴵᴵ = $\frac{7°}{12}$ ist, einen Flächeninhalt =

Fig. $\frac{33}{8} \times \frac{7}{12}$ □° = 2 □°, 2 □kl^{I}, 5 □kl^{II}, 3 □kl^{III}.

I. Die Ausrechnung des Flächeninhaltes der Rechtecke in Quadrat-Klafter, Klafterschuhen, Klafterzollen ꝛc. geschieht sehr bequem durch folgenden Rechnungsvortheil.

Wenn die Grundlinie eines Rechteckes = $A^{\circ} + B^{I} + C^{II} + \ldots\ldots$, und die Höhe = $a^{\circ} + b^{I} + c^{II} + \ldots\ldots$ gesetzet wird; so ist

$A^{\circ} + B^{I} + C^{II} + \ldots^{III} \ldots\ldots^{IV} \ldots\ldots$
$a + b + c + \ldots\ldots\ldots\ldots$ } multipl.

$aA + aB + aC + \ldots\ldots\ldots\ldots$
$+ bA + 2bB + 2bC + \ldots\ldots\ldots$
$+ cA + 2cB + 2cC + \ldots\ldots$ } der Flächeninhalt

$= aA\,□^{\circ} + (aB + bA)\,□kl^{I} + (aC + 2bB + cA)\,□kl^{II} + \ldots\ldots$

Die Partial-Producte werden nähmlich in der angeführten Ordnung gehörig unter einander geschrieben, mit der Bemerkung, daß diejenigen Producte, deren beyde Factoren nur Theile der Klafter bedeuten, verdoppelt werden müssen. Die Zahlen unter der mit ($^{\circ}$) bezeichneten Stelle bedeuten sodann Quadrat-Klaftern, mit (^{I}) Klafterschuhe, mit (^{II}) Klafterzolle u. s. w. Darauf werden die kleineren Benennungen durch die Division auf eine größere Gattung gebracht. Nähmlich die Klafterpuncte werden durch die Division mit 12 in Klafterlinien, diese ferner durch die Division mit 12 in Klafterzolle, und zuletzt die Klafterschuhe durch die Division mit 6 in Quadrat-Klaftern verwandelt. Was endlich nach dieser Reduction heraus kommt, ist der gesuchte Flächeninhalt in Quadrat-Klaftern, Klafterschuhen, Klafterzollen ꝛc.

I. Beyspiel. Es sey bey einem Rechtecke die Grundlinie = 15°, 4^{I}, 5^{II}, und die Höhe = 4°, 2^{I}, 6^{II}; so wird der Flächeninhalt auf folgende Art berechnet.

15°

15° ,	4ᴵ ,	5ᴵᴵ	ᴵᴵᴵ	ᴵᵛ
4 ,	2 ,	6		
60 ,	16 ,	20		
	30 ,	16 ,	20	
		90 ,	48 ,	60
60 ,	46 ,	126 ,	68 ,	60 □ᴵᵛ
69□° ,	3□ᴵ ,	0□ᴵᴵ ,	1□ᴵᴵᴵ ,	0□ᴵᵛ

Man sagt nähmlich 4° × 15° = 60□° , 4° × 4ᴵ = 16 □ᴵ , 4° × 5ᴵᴵ = 20 □ᴵᴵ. Ferner 2ᴵ × 15° = 30 □ᴵ ., 2ᴵ × 4ᴵ = 8. 2 □ᴵᴵ = 16 □ᴵᴵ , 2ᴵ × 5ᴵᴵ = 10. 2 □ᴵᴵᴵ = 20 □ᴵᴵᴵ. Endlich 6ᴵᴵ × 15° = 90 □ᴵᴵ , 6ᴵᴵ × 4ᴵ = 24. 2 □ᴵᴵᴵ = 48 □ᴵᴵᴵ , 6ᴵᴵ × 5ᴵᴵ = 30. 2 □ᴵᵛ = 60 □ᴵᵛ. Diese letzten 60 □ᴵᵛ betragen 5 □ᴵᴵᴵ. Diese 5 □ᴵᴵᴵ zu den 68 addiret geben 73 □ᴵᴵᴵ = $\frac{7}{1}\frac{3}{2}$ □ᴵᴵ = 6 □ᴵᴵ + 1 □ᴵᴵᴵ. Der Rest 1 □ᴵᴵᴵ wird angeschrieben, die 6 □ᴵᴵ aber werden zu den 126 □ᴵᴵ addiret, und sodann durch die Division mit 12 auf Klafterschuhe reduciret; u. s. w.

II. Beyspiel.

Grundlinie = 3° ,	2ᴵ ,	3ᴵᴵ ,	ᴵᴵᴵ	ᴵᵛ
Höhe = 2 ,	5 ,	4		
6 ,	4 ,	6		
	15 ,	20 ,	30	
		12 ,	16 ,	24
6 ,	19 ,	38 ,	46 ,	24 □ᴵᵛ

Flächeninhalt = 9□° , 4□ᴵ , 6□ᴵᴵ , 0□ᴵᴵᴵ , 0□ᴵᵛ.

III.

Fig. III. Beyspiel.

Grundlinie = 4° , 0ᴵ , 9ᴵᴵ , ᴵᴵᴵ ᴵᵛ
Höhe = 0 , 3 , 6

12 , 0 , 54
24 , 0 , 108

Flächeninhalt = 2□° , 2□klᴵ , 5□klᴵᴵ , 3□klᴵᴵᴵ , 0□klᴵᵛ

IV. Beyspiel.

Gr. = 8° , 0ᴵ , 8ᴵᴵ , 0ᴵᴵᴵ , 6ᴵᵛ
Höh. = 0 , 5 , 0 , 4

40 , 0 , 80 , 0 , 60
32 , 0 , 64 , 0 , 48

Fl. = 6□° , 4□klᴵ , 9□klᴵᴵ , 4□klᴵᴵᴵ , 10□klᴵᵛ , 4□klᵛ , 4□klᵛᴵ

Die Richtigkeit des angeführten Rechnungsvortheiles ist aus folgender Betrachtung zu ersehen.

Bey der Multiplication der Grundlinie $A^{\circ} + B^{\text{I}} + C^{\text{II}} + \ldots\ldots$ mit der Höhe $= a^{\circ} + b^{\text{I}} + c^{\text{II}} + \ldots\ldots$ sind die einfachen Producte $a^{\circ} \times B^{\text{I}} = aB\square\text{kl}^{\text{I}}$, $a^{\circ} \times C^{\text{II}} = aC\square\text{kl}^{\text{II}}$, $b^{\text{I}} \times A^{\circ} = bA\square\text{kl}^{\text{I}}$, $c^{\text{II}} \times A^{\circ} = cA\square\text{kl}^{\text{II}}$ vermöge der Erklärung des Klafterschuhes und Klafterzolles.

Hingegen sind $b^{\text{I}} \times B^{\text{I}} = bB\square^{\text{I}} = 2bB\square\text{kl}^{\text{II}}$ wegen $1\square^{\text{I}} = 2\square\text{kl}^{\text{II}}$; $b^{\text{I}} \times C^{\text{II}} = 12b^{\text{II}} \times C^{\text{II}} = 12bC\square^{\text{II}} = 2bC\square\text{kl}^{\text{III}}$ wegen $1\square^{\text{II}} = \frac{1}{6}\square\text{kl}^{\text{III}}$; $c^{\text{II}} \times C^{\text{II}} = cC\square^{\text{II}} = 2cC\square\text{kl}^{\text{IV}}$ wegen $1\square^{\text{II}} = 2\square\text{kl}^{\text{IV}}$; u. s. w.

Aus den oben angegebenen Gleichungen ($1\square\text{kl}^{\text{I}} = 6\square^{\text{I}}$; $1\square\text{kl}^{\text{II}} = \frac{1}{2}\square^{\text{I}} = 72\square^{\text{II}}$; $1\square\text{kl}^{\text{III}} = 6\square^{\text{II}}$; $1\square\text{kl}^{\text{IV}} = \frac{1}{2}\square^{\text{II}} = 72\square^{\text{III}}$ 2c.) lassen sich nun auch Regeln ableiten, wie man einen in Klafterschuhen, Klafterzollen, Klafterlinien berechneten Flächeninhalt in Quadrat-Schuhe, Quadrat-Zolle, Quadrat-Linien, und umgekehrt bequem verwandeln soll.

II. Wenn man den Quadrat-Schuh für die Einheit des Flächenmaßes annimmt, und denselben in 12 Schuhzolle, den Schuhzoll in 12 Schuhlinien, die Schuhlinie in 12 Schuhpuncte 2c. eintheilet; so findet man den Flächeninhalt

halt eines Rechteckes durch folgenden Rechnungsvortheil in Fig. Quadrat-Schuhen ($\square^{I}$), Schuhzollen (Sch^{II}), Schuhlinien (Sch^{III}) 2c.

Grundlinie $= A^{I} + B^{II} + C^{III} + \ldots^{IV} \ldots^{V} \ldots$
Höhe $= a + b + c + \ldots\ldots\ldots$

Flächeninhalt. $\begin{cases} aA + aB + aC \\ \quad + bA + bB + bC \\ \quad\quad + cA + cB + cC \end{cases}$

$= aA\,\square^{I} + (aB + bA)\,Sch^{II} + (aC + bB + cA)\,Sch^{III} + 2c.$

Beyspiel.

Grundlinie $=$	10^{I}	, 5^{II}	, $3^{III} \ldots^{IV} \ldots^{V} \ldots$		
Höhe $=$	6	, 8	, 4		
	60	, 30	, 18		
		80	, 40	, 24	
			40	, 20	, 12
	60	, 110	, 98	, 44	, 12

Flächeninhalt $=$ $69\square^{I}$, $10Sch^{II}$, $5Sch^{III}$, $9Sch^{IV}$, $0\,Sch^{V}$.

Die Richtigkeit dieses Rechnungsvortheiles kann man aus den Erklärungen der Schuhzolle, Schuhlinien, Schuhpuncte, und aus den daraus fließenden Gleichungen $1Sch^{II} = 12\square^{II}$, $1Sch^{III} = 1\square^{II}$, $1Sch^{IV} = 12\square^{III}$, $1Sch^{V} = 1\square^{III}$, 2c. erweisen. Auch läßt sich hieraus eine Regel ableiten, wie man Sch^{II}, Sch^{III}, Sch^{IV} 2c. in $\square^{II}$, $\square^{III}$, $\square^{IV}$, 2c. und umgekehrt auf eine leichte Art verwandeln kann.

Bey der wirklichen Ausübung kann die Verwandlung des Riemenmaßes in Quadrat-Maß, und umgekehrt des Quadrat-Maßes in Riemenmaß durch die beygefügte Tabelle sehr erleichtert werden. Auch ist es leicht einzusehen, daß man sich bey der Multiplication dieser Längenmaße eines eigen hierzu eingerichteten Einmahleins bedienen kann, aus dem man die einzelnen Partial-Producte nur herausschreiben darf.

Fig.	Riemen-Maß.	Quadrat-Maß.	Riemen-maß-	Quadrat-Maß.	Quadrat-Maß.	Riemen-Maß.
	1 Qlk^{I}	6 Q^{I}	1 Sch^{II}	12 Q^{II}	1 Q^{I}	2 Qkl^{II}
	1 Qkl^{II}	72 Q^{II}	1 Sch^{III}	1 Q^{II}	1 Q^{II}	2 Qkl^{IV}
	1 Qkl^{III}	6 Q^{II}	1 Sch^{IV}	12 Q^{III}	1 Q^{III}	2 Qkl^{VI}
	1 Qkl^{IV}	72 Q^{III}	1 Sch^{V}	1 Q^{III}	1 Q^{IV}	2 Qkl^{VIII}
	1 Qkl^{V}	6 Q^{III}	1 Sch^{VI}	12 Q^{IV}	1 Q^{II}	1 Sch^{III}
	1 Qkl^{VI}	72 Q^{IV}	1 Sch^{VII}	1 Q^{IV}	1 Q^{III}	1 Sch^{V}
	1 Qkl^{VII}	6 Q^{IV}	1 Sch^{VIII}	12 Q^{V}	1 Q^{IV}	1 Sch^{VII}

§. 438.

82. **Der Flächeninhalt eines Parallelogramms ABCD ist = BC . AG = BC . CE = BC . BF = AD . AG = dem Producte aus einer Seite in ihren Abstand von der entgegengesetzten Seite.**

Denn der Flächeninhalt des Parallelogramms ABCD ist = dem Rechtecke BFEC (389.); nun aber ist das Rechteck BFEC = BC . BF = BC . CE. Es ist also auch der Flächeninhalt des Parallelogramms ABCD = BC . BF = BC . CE = AD . AG, weil BF = AG = EC, und BC = AD ist.

§. 439.

Der Flächeninhalt eines jeden Dreyeckes ABC ist = $\frac{1}{2}$BC.AG = dem halben Producte aus der Grundlinie

linie in die Höhe = dem halben Producte aus einer Fig. Seite in den Abstand des entgegengesetzten Winkels. 82.

Denn es ist das Dreyeck ABC = $\frac{1}{2}$ ABCD (387. I.); nun aber ist $\frac{1}{2}$ ABCD = $\frac{1}{2}$ BC . AG (weil ABCD = BC . AG ist); es ist also auch das Dreyeck ABC = $\frac{1}{2}$ BC . AG.

Aus der Gleichung ABC = $\frac{1}{2}$ BC . AG folget AG = $\frac{ABC}{\frac{1}{2}BC}$, und BC = $\frac{ABC}{\frac{1}{2}AG}$; das ist, wenn man den Flächeninhalt eines Dreyeckes durch die halbe Grundlinie dividiret; so ist der Quotient = der Höhe des Dreyeckes. Dividiret man hingegen den Flächeninhalt durch die halbe Höhe; so ist der Quotient der Grundlinie gleich. Es sey z. B. der Flächeninhalt eines Dreyeckes = 11 □°, 4 □′ = $\frac{35}{3}$ □°, und die Grundlinie = 5°, 1′, 6″ = $\frac{21°}{4}$; so ist die Höhe = $\frac{35}{3} : \frac{21}{8}$ = $\frac{35}{3} \times \frac{8}{21} = \frac{40°}{9}$ = 4°, 2′, 8″. Es ist aus diesem Beyspiele leicht zu ersehen, wie dergleichen Divisionen vorzunehmen sind.

§. 440.

Wenn man nun bey einem rechtwinkeligen Dreyecke ABC eine Kathete für die Grundlinie annimmt; so wird die andere Kathete die Höhe dieses Dreyeckes seyn; folglich ist der Flächeninhalt eines rechtwinkeligen Dreyeckes gleich dem halben Producte aus den beyden Katheten = $\frac{1}{2}$ AB . BC = $\frac{1}{2}$ *ab*, wenn BC = *b*, und AB = *a* gesetzet wird. 83.

§. 441.

Wenn man die Höhe eines rechtwinkeligen Dreyeckes in ∞ gleiche Theile Am, mn, np, u. s. w. in Gedanken abtheilet, durch die Theilungspuncte die Parallelen me, nf, pg .... und endlich die Senkrechten er, fs, gt, u. s. w.

zie-

Fig. 83. ziehet; so ist die Summe aller eingeschriebenen Rechtecke $mr + ns + pt + \ldots\ldots + xz = \frac{1}{2}\,ab = \frac{1}{2}\,AB \,.\, BC =$ dem Flächeninhalte des Dreyeckes ABC.

Denn da $Am = mn = np = \frac{AB}{\infty} = \frac{a}{\infty}$ ist; so ist

$An = Am + mn = \frac{a}{\infty} + \frac{a}{\infty} = \frac{2a}{\infty}$, $Ap = \frac{3a}{\infty}$ u. s. w.

$Ax = \frac{(\infty - 1)a}{\infty} = \frac{\infty a}{\infty}$ (vermöge §. 309. 1.) $= a = AB$.

Ferner ist $AB : BC = Am : me$, nähmlich $a : b = \frac{a}{\infty} : me$; folglich ist $me = \frac{ab}{a\infty} = \frac{b}{\infty}$. Ingleichen ist $AB : BC = An : nf$, nähmlich $a : b = \frac{2a}{\infty} : nf$; folglich $nf = \frac{2b}{\infty}$. Eben so findet man $pg = \frac{3b}{\infty}$, u. s. w., und $xy = b$, weil wieder $AB : BC = Ax : xy$, nähmlich $a : b = \frac{(\infty - 1)a}{\infty} : xy = \frac{(\infty - 1)\,ab}{\infty a} = \frac{\infty\, ab}{\infty a} = b$ statt findet. Nun ist das Rechteck $mr = mn \,.\, me = \frac{a}{\infty} \cdot \frac{b}{\infty} = \frac{ab}{\infty^2}$

das Rechteck $ns = np \,.\, nf = \frac{a}{\infty} \cdot \frac{2b}{\infty} = \frac{2ab}{\infty^2}$, das Rechteck $pt = pq \cdot pg = \frac{a}{\infty} \cdot \frac{3b}{\infty} = \frac{3ab}{\infty^2}$, u. s. w.; und das letzte Rechteck $xz = xy \,.\, xB = \frac{a}{\infty} \cdot b = \frac{ab}{\infty} = \frac{\infty\, ab}{\infty^2}$.

Folglich ist die Summe aller dieser Rechtecke $= \frac{ab}{\infty^2} + \frac{2ab}{\infty^2} + \frac{3ab}{\infty^2} + \frac{4ab}{\infty^2} + \frac{5ab}{\infty^2} + \ldots\ldots + \frac{\infty\, ab}{\infty^2} = \frac{ab}{\infty^2} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots\ldots + \infty) = \frac{ab}{\infty^2} \cdot \frac{1}{2}\,\infty^2 = \frac{1}{2}\,ab$

(weil

(weil die Summe der unendlichen Reihe aller natürlichen Zahlen dem Producte aus dem letzten Gliede in die halbe Anzahl der Glieder gleichet. Nun ist $\frac{1}{2} ab$ = dem Flächeninhalte des Dreyeckes ABC; es ist also auch die Summe dieser eingeschriebenen Rechtecke = dem Flächeninhalte des Dreyeckes ABC. Fig. 83.

Bey dem Anblicke der Fig. 83. scheint es dem Auge, daß die Summe der eingeschriebenen Rechtecke kleiner seyn müßte, als das Dreyeck ABC; es scheint, daß man zu der gefundenen Summe der Rechtecke noch die Summe der unendlich kleinen einander vollkommen gleichen Dreyecke längst der Hypothenuse AC addiren müßte um den wahren Flächeninhalt des Dreyeckes ABC zu erhalten. Allein dieses kommt daher, weil in Fig. 83 die Parallelen eine endliche Entfernung haben, da die Höhe BA nur in eine endliche Anzahl gleicher Theile getheilet ist. Bildet man sich ein, daß die Theile Am = mn = np u. s. w. immer kleiner werden; so werden auch die Dreyecke Ame = erf = fsg, u. s. w. immer kleiner, und werden endlich gar verschwinden, wenn die Theile Am = mn = np = ... unendlich klein werden, weil in diesem Falle die Spitzen e, r, f, wie nicht weniger die Spitzen f, s, g, der Dreyecke erf, fsg, u. s. w. über einander fallen, und jede zwey nebenliegenden Parallelen einander vollkommen gleich sind. Diese unendlich kleinen Dreyecke Ame, erf, fsg, ... zyC sind alle einander vollkommen gleich. Jedes derselben ist = $\frac{ab}{2\infty^2}$, weil eines jeden solchen Dreyeckes Höhe Am = er = mn = fs = yz = $\frac{a}{\infty}$, und Grundlinie me = rf = sg = zC = $\frac{b}{\infty}$ ist, und die Anzahl dieser Dreyecke ist = ∞: folglich ist ihre Summe $\frac{ab}{2\infty^2} \cdot \infty = \frac{ab}{2\infty}$. Würde man nun diese Summe $\frac{ab}{2\infty}$ der

Drey-

Fig. 83. Dreyecke zu der gefundenen Summe $\frac{ab}{2}$ der eingeschriebenen Rechtecke addiren; so wäre dessen ungeachtet $\frac{ab}{2} + \frac{ab}{2\infty} = \frac{ab}{2} = ABC$; weil $\frac{ab}{2} + \frac{ab}{2\infty} = \frac{ab}{2} + 0 = \frac{ab}{2}$ ist (307.). Wenn nun jemand entweder aus Eigensinne, oder aus Mangel des Verstandes nicht einsehen könnte, daß $\frac{ab}{2} + \frac{ab}{2\infty} = \frac{ab}{2} + 0 = \frac{ab}{2}$ sey, daß nähmlich durch die Summirung der eingeschriebenen Rechtecke der wahre Ausdruck für den Flächeninhalt erhalten werde; so erwäge er nur, daß eben dadurch, weil man bey der Summirung der eingeschriebenen Rechtecke für das letzte Rechteck $BC \cdot xB = \frac{ab}{\infty}$ angenommen hat, da man doch eigentlich für die Anzahl der Rechtecke $mB = \infty - 1$, und für das letzte Rechteck $xy \cdot xB = \frac{(\infty - 1)b}{\infty} \cdot \frac{a}{\infty} = \frac{(\infty - 1)ab}{\infty^2}$ annehmen sollte, daß (sage ich) eben dadurch die unendlich kleinen Dreyecke längst der Hypothenuse in die Summe der eingeschriebenen Rechtecke mit eingeflossen sind, ohne daß man daran dachte. Denn man summire noch einmahl (ohne daran zu denken, daß ∞ eine unendlich große Zahl bedeute) die eingeschriebenen Rechtecke, welche in einer arithmetischen Reihe des ersten Ranges fortwachsen, und addire dazu die Summe der kleinen Dreyecke längst der Hypothenuse; so ist

$$\left[\frac{ab}{\infty^2} + \frac{2ab}{\infty^2} + \frac{3ab}{\infty^2} + \frac{4ab}{\infty^2} + \frac{5ab}{\infty^2} + \ldots + \frac{(\infty - 1)ab}{\infty^2}\right] + \frac{ab}{2\infty} = ABC,$$

nähmlich die Summe der eingeschriebenen Rechtecke mehr die Summe der Dreyecke längst der Hypothenuse ist = dem Dreyecke ABC; das ist

(∞

$$\left(\frac{\infty - 1}{2}\right) \times \left(\frac{ab}{\infty^2} + \frac{(\infty - 1)\,ab}{\infty^2}\right) + \frac{ab}{2\infty} = \text{ABC},$$ Fig. 83.

weil die Summe einer arithmetischen Reihe des ersten Ranges = ist dem Producte aus der Summe des ersten und letzten Gliedes in die halbe Anzahl der Glieder; oder

$$\left(\frac{\infty - 1}{2}\right) \times \left(\frac{ab}{\infty^2} + \frac{\infty ab - ab}{\infty^2}\right) + \frac{ab}{2\infty} =$$

$$\left(\frac{\infty - 1}{2}\right).\frac{ab}{\infty} + \frac{ab}{2\infty} = \frac{\infty ab}{2\infty} - \frac{ab}{2\infty} + \frac{ab}{2} = \frac{ab}{2}$$

$= \text{ABC} = \frac{\text{AB}.\text{BC}}{2}$, wie im vorigen Falle. Aus diesem ist deutlich abzunehmen, daß man durch die vorhergehende Summirung der eingeschriebenen Rechtecke den wahren Ausdruck für den Flächeninhalt erhält.

Würde man die herumbeschriebenen Rechtecke summiren; so wäre ihre Summe ebenfalls $= \frac{ab}{2} =$ dem Flächeninhalte des Dreyeckes ABC, wenn $\text{BA} = a$ in eine unendliche Anzahl gleicher Theile getheilet ist; folglich ist in diesem Falle die Summe der herumbeschriebenen Rechtecke der Summe der eingeschriebenen gleich.

§. 442.

Die Summe der eingeschriebenen Rechtecke ist der Summe der herumbeschriebenen auch noch gleich, wenn (Fig. 84.) ADC eine krumme Linie seyn sollte, vorausgesetzt, daß BA in eine unendliche Anzahl gleicher Theile getheilet ist. Denn 84.

es sey $\text{AB} = a$, $\text{BC} = b$, $\text{mB} = \frac{a}{\infty}$; so ist das Rechteck

$\text{Bn} = \frac{ab}{\infty}$. Ferner sey die Summe der eingeschriebenen Rechtecke $= s$, und der herumbeschriebenen $= S$, so ist $S = s + \text{Bn} = s + \frac{ab}{\infty}$, wie es Fig. 84. deutlich zeiget; und end-

Fig. 84. lich $S = s$, weil $s + \frac{ab}{\infty} = s + 0 = s$ ist. Da nun in der angenommenen Voraussetzung (daß nähmlich BA in ∞ gleiche Theile getheilet ist) die Summe der eingeschriebenen Rechtecke der Summe der herumbeschriebenen gleichet; so ist in eben derselben Voraussetzung um so mehr jede Summe dem Flächeninhalte ABCDA gleich. Wir werden in der Folge öfters den Flächeninhalt solcher krummlinigen Figuren durch die Summirung der eingeschriebenen Rechtecke bestimmen. Diese eingeschriebenen Rechtecke werden Elemente des Flächeninhaltes genannt.

§. 443.

85. Der Flächeninhalt eines Trapezes ABCD ist $= \frac{(AB + CD) \cdot DE}{2} = \frac{(AB + CD) \cdot BF}{2}$ = dem halben Producte aus der Summe der zwey parallelen Seiten in ihren Abstand.

Denn es ist ABCD = ABD + DBC. Nun aber ist ABD $= \frac{AB \cdot DE}{2}$, und BDC $= \frac{DC \cdot BF}{2} = \frac{DC \cdot DE}{2}$; folglich ist ABCD $= \frac{AB.DE + DC.DE}{2} = \frac{(AB + DC).DE}{2}$.

§. 444.

86. Und der Flächeninhalt eines jeden Viereckes ABCD ist $= \frac{AC.(ED + FB)}{2}$ = dem halben Producte aus einer Diagonale in die Summe der Abstände der zwey entgegengesetzten Winkel.

Denn es ist ABCD = ACB + ACD. Nun aber ist ACB $= \frac{AC.FB}{2}$, und ACD $= \frac{AC.DE}{2}$; folglich ist ABCD $= \frac{AC.FB + AC.DE}{2} = \frac{AC.(DE + FB)}{2}$.

§. 445.

§. 445.

Fig.

Der Flächeninhalt eines jeden regelmäßigen Vieleckes ist gleich dem halben Producte aus dem Umfange in den Halbmesser des eingeschriebenen Kreises, oder in die Senkrechte, welche aus dem Mittelpuncte auf was immer für eine Seite gezogen wird, z. B. wenn die Seite eines regelmäßigen *n*eckes $= l$, dessen Umfang $= nl = p$, und die Senkrechte aus dem Mittelpuncte auf eine Seite gezogen $= a$ ist; so ist der Flächeninhalt $= \frac{1}{2}ap$.

Denn man bilde sich nur ein, daß aus dem Mittelpuncte in alle Vieleckswinkel gerade Linien gezogen sind; so wird dadurch das regelmäßige *n*eck in *n* vollkommen gleiche Dreyecke zertheilet, deren jedes $= \frac{1}{2}al$ ist; es ist demnach die Summe aller dieser Dreyecke, das ist, der Flächeninhalt des regelmäßigen *n*eckes $= n \cdot \frac{1}{2}al = \frac{1}{2}anl = \frac{1}{2}ap$, wenn wir *p* statt *nl* substituiren.

§. 446.

Wir wollen die Ausdrücke für den Flächeninhalt einiger regelmäßigen Vielecke hierher setzen; es ist nähmlich:

I. Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreyeckes ADG $= \frac{1}{4}b^2\sqrt{3}$, wenn wir jede Seite desselben $= b$ setzen; weil $GQ = \sqrt{(GD^2 - QD^2)} = \sqrt{(b^2 - \frac{1}{4}b^2)} = \sqrt{\frac{3}{4}b^2} = \frac{1}{2}b\sqrt{3}$, und folglich $\frac{1}{2}AD \cdot GQ = \frac{1}{2}b \cdot \frac{1}{2}b\sqrt{3} = \frac{1}{4}b^2 \cdot \sqrt{3} =$ AGD ist. 49.

II. Der Flächeninhalt eines Quadrats, dessen Seite $= b$ ist, ist $= b^2$.

III. Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Fünfeckes, dessen Seite $= b$ ist, ist $= \frac{5}{4}b^2\sqrt{(1 + \frac{2}{5}\sqrt{5})}$. Denn die Senkrechte CD in einem regelmäßigen Fünfecke ist $= \frac{1}{2}b\sqrt{(1 + \frac{2}{5}\sqrt{5})}$, wenn $AB = b$ gesetzet wird (409). Es ist folglich das Dreyeck $ACB = \frac{1}{2}b \cdot \frac{1}{2}b\sqrt{(1 + \frac{2}{5}\sqrt{5})} = \frac{1}{4}b^2\sqrt{(1 + \frac{2}{5}\sqrt{5})}$, und alle fünf Dreyecke, das ist der Flächeninhalt des regelmäßigen Fünfeckes $= 5 \cdot \frac{1}{4}b^2\sqrt{(1 + \frac{2}{5}\sqrt{5})} = \frac{5}{4}b^2\sqrt{(1 + \frac{2}{5}\sqrt{5})}$. 60.

IV. Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Sechseckes, dessen Seite $= b$ ist, ist $= \frac{3}{2}b^2\sqrt{3}$, weil die Senkrechte in einem regelmäßigen Sechsecke $= \frac{1}{2}b\sqrt{3}$ ist.

Fig. 60. V. Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Achteckes, dessen Seite $= b$ ist, ist $= 2b^2 \sqrt{(3+2\sqrt{2})} = 2b^2 (1+\sqrt{2})$.

VI. Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Zehneckes, dessen Seite $= b$ ist, ist $= \frac{5}{2}b^2 \sqrt{(5+2\sqrt{5})}$.

VII. Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Zwölfeckes, dessen Seite $= b$ ist; ist $= 3b^2 \sqrt{(7+4\sqrt{3})} = 3b^2(2+\sqrt{3})$.

Wenn man die Seite eines regelmäßigen Vieleckes und auch die Senkrechte CD durch den Halbmesser des herumbeschriebenen Kreises ausdrucket (408 und 409.); so erhält man den Flächeninhalt des regelmäßigen Vieleckes durch den Halbmesser des herumbeschriebenen Kreises ausgedruckt. Z. B. Für den Halbmesser $= a$ eines Kreises ist der Flächeninhalt des eingeschriebenen Zwölfeckes $= 3a^2$. Es wird dem eigenen Fleiße der Anfänger überlassen, die Flächeninhalte der angeführten regelmäßigen Vielecke sowohl durch den Halbmesser des herumbeschriebenen, als auch durch den Halbmesser des eingeschriebenen Kreises auszudrucken, und diese analytische Berechnung nach Belieben noch weiter fortzusetzen.

§. 447.

63. Der Flächeninhalt eines jeden unregelmäßigen Vieleckes abcdef wird erhalten, wenn man es durch die Diagonalen ae, ad, ac in lauter Dreyecke zertheilet, den Flächeninhalt eines jeden Dreyeckes besonders berechnet, und sodann alle diese Inhalte zusammen addiret. Wenn man zwey Dreyecke auf einmahl zusammen nimmt, daß ist; wenn man die Vierecke fade, adcb nach (444.) berechnet; so wird die Arbeit am geschwindesten zu Ende gebracht.

§. 448.

Die Kreisfläche ist gleich dem halben Producte aus dem Umkreise in den Halbmesser; nähmlich sie ist $= \frac{1}{2}ap$, wenn der Halbmesser $= a$, und der Umkreis $= p$ gesetzet wird.

Denn man kann den Kreis ansehen als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten, bey dem die Senkrechte aus dem Mittelpuncte auf die Vielecksseiten gezogen gleich dem Halbmesser $= a$, und dessen Umfang

$=$

$= p$ ist. Nun ist der Flächeninhalt eines solchen regelmäßi- Fig.
gen Vieleckes $= \frac{1}{2} ap$; es ist also auch die Kreisfläche $= \frac{1}{2} ap$.
Daß bey einem regelmäßigen Vielecke von unendlich vielen
unendlich kleinen Seiten die Senkrechte aus dem Mittel-
puncte auf eine Vielecksseite gezogen dem Halbmesser des
herumbeschriebenen Kreises gleichet, ist leicht einzusehen.
Denn es sey AB die Seite eines regelmäßigen Vieleckes 60.
von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten; so ist AB

$= \frac{1}{\infty}$, $AD = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2\infty}$; und folglich die Senkrechte

$$CD = \sqrt{(AC^2 - AD^2)} = \sqrt{(AC^2 - \frac{1}{4\infty^2})} = \sqrt{AC^2}$$

$= AC$, weil $AC^2 - \frac{1}{4\infty^2} = AC^2 - 0 = AC^2$ ist.

§. 449.

Daß die Kreisfläche $= \frac{1}{2} ap$ ist, wenn man den Halb- 84.
messer mit a, und den Umkreis mit p bezeichnet, läßt sich
auch also erweisen. Es sey was immer für ein Bogen ei-
nes Kreises $EF = b$. Man theile diesen in Gedanken in
eine unendliche Anzahl gleicher Theile Ed, de, ef; so ist ein

jeder solcher Theil $= \frac{b}{\infty}$. Durch diese Theilungspuncte
ziehe man die Halbmesser dB, eB, fB; so ist der Ausschnitt
EBF dadurch in eine unendliche Anzahl gleicher Dreyecke
EBd, bBe, eBf aufgelöset, weil man die unendlich kleinen
Bogen Ed, de, ef für gerade Linien ansehen kann. Nun ist

ein jedes solches unendlich kleines Dreyeck $EBd = \frac{Ed \cdot Bc}{2}$

$= \frac{b}{\infty} \cdot \frac{a}{2} = \frac{ab}{2\infty}$; es ist also auch $\infty \cdot EBd =$

$\infty \cdot \frac{ab}{2\infty} = \frac{ab}{2}$. Nun aber ist $\infty \cdot EBd =$ dem Ausschnit-

te EBF; folglich ist auch $\frac{ab}{2} =$ dem Ausschnitte EBF;

nehm-

Fig. 84. nähmlich der Flächeninhalt eines Ausschnittes ist gleich dem halben Producte aus dem Halbmesser in die Länge des Bogens. Setzen wir nun $b = p$, das ist, theilen wir den ganzen Umkreis in ∞ gleiche Theile; so erhalten wir $\frac{ap}{2}$ für die ganze Kreisfläche. Es ist demnach die ganze Kreisfläche gleich dem halben Producte aus dem Halbmesser in die Länge des ganzen Umkreises = einem Dreyecke, dessen Grundlinie $= p$, und Höhe $= a$ ist.

§. 450.

Wäre nun das Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise bekannt; so könnte der Flächeninhalt eines jeden Kreises, und auch eines jeden Kreisausschnittes berechnet werden, wenn nur in dem letzten nebst dem Halbmesser auch der Winkel bekannt wäre. Es sey z. B. das Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise = 113 : 355, und die Länge eines gegebenen Halbmessers = 100'; so ist 113 : 355 $= 2 . 100'$: Umkr.; folglich ist der Umkreis $= \frac{2.100.355}{113}$ $= 628\,318'$; und der Flächeninhalt $= \frac{1}{2}.628,318.100 =$ $31415,9 \square' = 31415 \square'$ und $\frac{9.144}{10} \square'' = 31415 \square'$ und $129,6 \square''$ oder $= 31415 \square'$ und 10,8 Schuhzollen. In eben demselben Kreise ist ein Kreisausschnitt, dessen Winkel 60 Grade beträgt, $= 5235,9 \square'$, wenn man schließt $360° : 60° = 628,318$ (nähmlich die Länge des ganzen Umkreises) : zur Länge des Bogens eines Ausschnittes von $60° = \frac{628,318.60}{360°}$, und sodann diese gefundene Länge mit dem halben Halbmesser multipliciret. Man erhält auch eben diesen Ausdruck, wenn man schließt 360 : 60 $= 31415,9 \square'$ (nähmlich die ganze Kreisfläche) : zum Flächeninhalte des Ausschnittes von $60° = 5235,9 \square'$.

60. Wäre ein Kreisabschnitt AEBA zu berechnen; so müßte man erstens den Flächeninhalt des dazu gehörigen Kreisausschnit-

schnittes AEBCA, zweytens den Flächeninhalt des Drey- Fig.
eckes ABC bestimmen, und sodann den zweyten Flächeninhalt
von dem ersten abziehen; so würde der Ueberrest dem Flä-
cheninhalte des Kreisabschnittes AEBA gleich seyn.

§. 451.

Das Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise 87.
können wir auf folgende Art durch eine Näherung be-
stimmen.

Wenn man nähmlich aus dem Mittelpuncte C Fig. 87.
einen senkrechten Halbmesser CA auf den Durchmesser DP
errichtet, und einen unbestimmten Bogen AB durch die senk-
rechte Ordinate BM (412.) abschneidet; so muß man trach-
ten diesen Bogen AB durch die dazugehörige Abscisse CM
(413.), und durch den Halbmesser des Kreises analytisch
auszudrucken. Diesen analytischen Ausdruck wird man er-
halten, wenn man 1) das Stück CABM der Kreisfläche,
und 2) auch die Fläche des Dreyeckes CBM durch die Ab-
scisse CM und durch den Halbmesser CD = CA ausdrucket;
sodann 3) CBM von CABM abziehet; und endlich 4) den
dadurch erhaltenen Ausdruck des Kreisausschnittes BCA
durch $\frac{1}{2}$CA dividiret; weil die Fläche des Kreisausschnittes

$$BCA = \tfrac{1}{2}CA \times AB \text{ (449.)}, \text{ und folglich } AB = \frac{BCA}{\frac{1}{2}CA}$$

ist. Hat man einen solchen analytischen Ausdruck für den
unbestimmten Bogen AB gefunden; so darf man sodann 5)
die Abscisse CM einem gewissen Theile des Halbmessers z. B.
CM = $\frac{1}{2}$CD gleich setzen, für welchen der dazu gehörige Bo-
gen AB ein bekannter Theil des ganzen Umkreises ist. Hier-
durch wird sich dieser bekannte Theil des ganzen Umkreises,
und daraus ferner der ganze Umkreis selbst für jeden belie-
bigen Halbmesser berechnen lassen.

1) Es sey nun der Halbmesser eines Kreises CD =
CB = CA = a, AC und BM senkrecht auf CD, und
CM = x; so ist der Flächeninhalt des Stückes CMBAC =

ax

Fig. 87. $ax - \frac{x^3}{2 \cdot 3 \cdot a} - \frac{1 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot a^3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot a^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot a^7} - \ldots$

Denn man bilde sich nur ein, daß die Abscisse $CM = x$ in eine unendliche Anzahl gleicher Theile $Cc = ce = em$ u. s. w. getheilet ist, ziehe durch die Theilungspuncte c,e,m, .. die Ordinaten cd, ef, mn, u. s. w.; so ist $Cc = \frac{x}{\infty}$, $cd = V(a^2 - \frac{x^2}{\infty^2})$; $Ce = \frac{2x}{\infty}$, $ef = V(a^2 - \frac{2^2 x^2}{\infty^2})$; $Cm = \frac{3x}{\infty}$, $mn = V(a^2 - \frac{3^2 \cdot x^2}{\infty^2})$ u. s. w. $CM = x = \frac{\infty x}{\infty}$.

$MB = V(a^2 - x^2) = V(a^2 - \frac{\infty^2 x^2}{\infty^2})$ (vermöge 413).

Wenn man nun jede dieser Ordinaten mit $\frac{x}{\infty}$ multipliciret; so erhält man eine unendliche Anzahl unendlich kleiner Rechtecke, welche zusammen addiret dem Flächeninhalte CMBA gleich sind; nähmlich, $Cd + cf + en + \ldots qB = Cc.cd + ce.ef + \ldots + qM.MB = \frac{x}{\infty}.V(a^2 - \frac{x^2}{\infty^2}) + \frac{x}{\infty}.V(a^2 - \frac{2^2 x^2}{\infty^2}) + \frac{x}{\infty}.V(a^2 - \frac{3^2 x^2}{\infty^2}) + \ldots + \frac{x}{\infty}.V(a^2 - \frac{\infty^2 x^2}{\infty^2}) = CMBA$, oder wenn man jede dieser Wurzelgrößen (nach 301.) in eine unendliche Reihe auflöset, und dieselbe mit $\frac{x}{\infty}$ multipliciret; so ist

$$\frac{x}{\infty}.a-\frac{x}{\infty}.\frac{x^2}{2.a\infty^2}-\frac{x}{\infty}.\frac{1.x^4}{2.4.a^3.\infty^4}-\frac{x}{\infty}.\frac{1.3.x^6}{2.4.6.a^5.\infty^6}$$ Fig. 87.

$$-\frac{x}{\infty}.\frac{1.3.5.x^8}{2.4.6.8.a^7.\infty^8}-\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{x}{\infty}.a-\frac{x}{\infty}.\frac{2^2.x^2}{2.a.\infty^2}-\frac{x}{\infty}.\frac{1.2^4.x^4}{2.4.a^3.\infty^4}-\frac{x}{\infty}.\frac{1.3.2^6.x^6}{2.4.6.a^5.\infty^6}$$

$$-\frac{x}{\infty}.\frac{1.3.5.2^8.x^8}{2.4.6.8.a^7.\infty^8}-\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{x}{\infty}.a-\frac{x}{\infty}.\frac{3^2.x^2}{2.a.\infty^2}-\frac{x}{\infty}.\frac{1.3^4.x^4}{2.4.a^3.\infty^4}-\frac{x}{\infty}.\frac{1.2.3^6.x^6}{2.4.6.a^5.\infty^6}$$

$$-\frac{x}{\infty}.\frac{1.3.5.3^8.x^8}{2.4.6.8.a^7.\infty^8}-\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{x}{\infty}.a-\frac{x}{\infty}.\frac{4^2.x^2}{2.a.\infty^2}-\frac{x}{\infty}.\frac{1.4^4.x^4}{2.4.a^3.\infty^4}-\frac{x}{\infty}.\frac{1.3.4^6.x^6}{2.4.6.a^5.\infty^6}$$

$$-\frac{x}{\infty}.\frac{1.3.5.4^8.x^8}{2.4.6.8.a^7.\infty^8}-\ldots\ldots\ldots$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{x}{\infty}.a-\frac{x}{\infty}.\frac{\infty^2.x^2}{2.a\infty^2}-\frac{x}{\infty}.\frac{1.\infty^4.x^4}{2.4.a^3.\infty^4}-\frac{x}{\infty}.\frac{1.3.\infty^6.x^6}{2.4.6.a^5.\infty^6}$$

$$-\frac{x}{\infty}.\frac{1.3.5.\infty^8.x^8}{2.4.6.8.a^7.\infty^8}-\ldots=\text{CMBA.}$$

Bringet man nun die verticalen Colonnen dieses Ausdruckes in eine horizontale Lage, und reduciret gehörig;

so ist

$$\frac{ax}{\infty}+\frac{ax}{\infty}+\frac{ax}{\infty}+\frac{ax}{\infty}+\frac{ax}{\infty}+\ldots\ldots+\frac{ax}{\infty}$$

$$-\frac{x^3}{2.a.\infty^3}.(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\ldots\ldots+\infty^2)$$

$$-\frac{1.x^5}{2.4.a^3.\infty^5}.(1^4+2^4+3^4+4^4+5^4+\ldots+\infty^4)$$

$$-\frac{1.3.x^7}{2.4.6.a^5.\infty^7}.(1^6+2^6+3^6+4^6+5^6+\ldots+\infty^6)$$

$$-\frac{1.3.5.x^9}{2.4.6.8.a^7.\infty^9}.(1^8+2^8+3^8+4^8+\ldots+\infty^8)$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\text{OMBA}$$

Fig. 87. Und nun ist die Summe der ersten horizontalen Reihe des gegenwärtigen Ausdruckes $= \frac{ax}{\infty} . \infty = ax$, weil die Anzahl der Glieder dieser Reihe $= \infty$ ist.

Die Summe der zweyten horizontalen Reihe ist.

$= -\frac{x^3}{2.a.\infty^3} . (\frac{1}{3}\infty^3 . \infty) = -\frac{x^3}{2.3.a}$, (vermöge §. 317.)

Die Summe der dritten horizontalen Reihe

$= -\frac{1 . x^5}{2.4.a^3.\infty^5} . (\frac{1}{5}\infty^4 . \infty) = -\frac{1 . x^5}{2.4.5.a^3}$

Die Summe der vierten $= -\frac{1.3.x^7}{2.4.6.7.a^5}$

Die Summe der fünften $= -\frac{1.3.5.x^9}{2.4.6.8.9.a^7}$

Die Summe der sechsten $= -\frac{1.3.5.7.x^{11}}{2.4.6.8.10.11.a^9}$

Die Summe der siebenten $= -$ .....

Folglich ist CMBA $= ax - \frac{x^3}{2.3.a} - \frac{1.x^5}{2.4.5.a^3}$

$- \frac{1.3.x^7}{2.4.6.7.a^5} - \frac{1.3.5.x^9}{2.4.6.8.9.a^7}$

$- \frac{1.3.5.7.x^{11}}{2.4.6.8.10.11.a^9} -$ .....

2) Ferner ist der Flächeninhalt des Dreyeckes

$BCM = \frac{ax}{2} - \frac{x^3}{2.2.a} - \frac{1.x^5}{2.2.4.a^3} - \frac{1.3.x^7}{2.2.4.6.a^5} -$ ....

Denn es ist $BCM = \frac{MC \times MB}{2} = \frac{x \times \sqrt{(a^2 - x^2)}}{2}$

$= \frac{x}{2} . (a - \frac{x^2}{2.a} - \frac{1.x^4}{2.4.a^3} - \frac{1.3.x^6}{2.4.6.a^5} -$ .....)

$= \frac{ax}{2} - \frac{x^3}{2.2.a} - \frac{1.x^5}{2.2.4.a^3} - \frac{1.3.x^7}{2.2.4.6.a^5} -$ ..

3)

3) Nun ist der Kreisausschnitt BCA = CMBA — Fig. BCM; folglich ist BCA 87.

$$= \begin{cases} ax - \frac{x^3}{2.3.a} - \frac{1.x^5}{2.4.5.a^3} - \frac{1.3.x^7}{2.4.6.7.a^5} - \ldots \\ -\left(\frac{ax}{2} - \frac{x^3}{2.2.3.a} - \frac{1.x^5}{2.2.4.5.a^3} - \frac{1.3.x^7}{2.2.4.6.7.a^5} - \ldots\right) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2.ax}{2} - \frac{2.x^3}{2.2.3.a} - \frac{1.2.x^5}{2.2.4.5a^3} - \frac{1.3.2.x^7}{2.2.4.6.7.a^5} - \ldots \\ -\frac{ax}{2} + \frac{3.x^3}{2.2.3.a} + \frac{1.5.x^5}{2.2.4.5.a^3} + \frac{1.3.7.x^7}{2.2.4.6.7.a^5} + \ldots \end{cases}$$

$$= \frac{ax}{2} + \frac{1.x^3}{2.2.3.a} + \frac{1.3.x^5}{2.2.4.5.a^3} + \frac{1.3.5.x^7}{.2.2.4.6.7.a^5} + \ldots$$

4) Es ist aber auch $BCA = \frac{BA.CA}{2} = \frac{az}{2}$ wenn wir die Länge des Bogens $BA = z$ setzen; folglich ist

$$\frac{az}{2} = \frac{ax}{2} + \frac{1.x^3}{2.2.3.a} + \frac{1.3.x^5}{2.2.4.5.a^3} + \ldots\ldots \text{ und endlich}$$

$$z = x + \frac{1.x^3}{2.3.a^2} + \frac{1.3.x^5}{2.4.5.a^4} + \frac{1.3.5.x^7}{2.4.6.7.a^6} + \frac{1.3.5.7.x^9}{2.4.6.8.9.a^8} + \ldots$$

5) Setzen wir nun $x = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$ CD; so ist

$$z = \frac{a}{2} + \frac{1}{2.3.a^2} \cdot \frac{a^3}{2^3} + \frac{1.3}{2.4.5.a^4} \cdot \frac{a^5}{2^5} + \ldots\ldots\ldots$$

$$= a.\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{1.3}{2.4.5.2^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7.2^7} + \ldots\right)$$

Es ist aber $AB = z =$ arc 30° = dem Bogen von 30 Graden, wenn $x = CM = \frac{1}{2}$ CD gesetzet wird. Denn es ist in diesem Falle wegen der Gleichheit der Dreyecke DMB und CMB die Sehne BD = BC dem Halbmesser; folglich der Bogen BD = 60° (393. II.), und der Bogen AB = AD — BD = 90° — 60° = 30°. Es ist demnach die Länge eines Bogens von 30° in einem Kreise, dessen Halbmesser = a ist, nähmlich es ist:

Fig. 87.

$$\text{arc } 30^\circ = a.\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 2^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 2^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 2^7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\,7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9\cdot 2^9} + \cdots\right)$$

es ist also auch

$$12.\text{arc } 30^\circ = 12.a.\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 2^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 2^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 2^7} + \cdots\cdots\right),$$

nähmlich

$$\text{arc } 360^\circ = 12a.\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 2^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 2^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 2^7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9\cdot 2^9} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 11\cdot 2^{11}} + \cdots\right)$$

= dem ganzen Umkreise.

Diese gefundene Reihe läßt sich in folgende Gestalt bringen:

$$\text{arc } 360^\circ = 12a.\left(\frac{1}{1\cdot 2^1} + \frac{1\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^3} + \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 2^5} + \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 2^7} + \cdots\cdots\cdots\right)$$

und endlich ist, wenn wir das erste Glied dieser letzten Reihe $\frac{1}{1\cdot 2^1} = A$, das zweyte $= B$, das dritte $= C$, das vierte $= D$, das fünfte $= E$ u. s. w. setzen,

$$\text{arc } 360^\circ = 12a.\left(\frac{1}{2} + \tfrac{1}{4}A.\frac{1\cdot 1}{2\cdot 3} + \tfrac{1}{4}B.\frac{3\cdot 3}{4\cdot 5} + \tfrac{1}{4}C.\frac{5\cdot 5}{6\cdot 7} + \tfrac{1}{4}D.\frac{7\cdot 7}{8\cdot 9} + \tfrac{1}{4}E.\frac{9\cdot 9}{10\cdot 11} + \tfrac{1}{4}F.\frac{11\cdot 11}{12\cdot 13} + \tfrac{1}{4}G.\frac{13\cdot 13}{14\cdot 15} + \tfrac{1}{4}H.\frac{15\cdot 15}{16\cdot 17} + \cdots\right)$$

Nun

Fig. 87.

Nun ist $\frac{1}{2} = 0{,}50000000000 = A$

$+\frac{1}{4}A \cdot \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} = 0{,}02083333333 = B$

$+\frac{1}{4}B \cdot \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 5} = 0{,}00234375000 = C$

$+\frac{1}{4}C \cdot \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 7} = 0{,}00034877232 = D$

$+\frac{1}{4}D \cdot \frac{7 \cdot 7}{8 \cdot 9} = 0{,}00005933974 = E$

$+\frac{1}{4}E \cdot \frac{9 \cdot 9}{10 \cdot 11} = 0{,}00001092391 = F$

$+\frac{1}{4}F \cdot \frac{11 \cdot 11}{12 \cdot 13} = 0{,}00000211826 = G$

$+\frac{1}{4}G \cdot \frac{13 \cdot 13}{14 \cdot 15} = 0{,}00000042617 = H$

$+\frac{1}{4}H \cdot \frac{15 \cdot 15}{16 \cdot 17} = 0{,}00000008814 = I$

$+\frac{1}{4}I \cdot \frac{17 \cdot 17}{18 \cdot 19} = 0{,}00000001862 = K$

$+\frac{1}{4}K \cdot \frac{19 \cdot 19}{20 \cdot 21} = 0{,}00000000401 = L$

$+\frac{1}{4}L \cdot \frac{21 \cdot 21}{22 \cdot 23} = 0{,}00000000087 = M$

$+\frac{1}{4}M \cdot \frac{23 \cdot 23}{24 \cdot 25} = 0{,}00000000016 = N$

$+\frac{1}{4}N \cdot \frac{25 \cdot 25}{26 \cdot 27} = 0{,}00000000004 = O$

$+\frac{1}{4}O \cdot \frac{27 \cdot 27}{28 \cdot 29} = 0{,}00000000000 = P$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0{,}52359877557$

$= 0{,}52359877756$, wenn wir die letzte Ziffer, weil sie

Fig. 87. etwas zu klein seyn muß, und folglich ungewiß ist, hinwegzulassen, und dafür die vorhergehende um 1 vermehren. Folglich ist arc $360° = 12.a.0{,}5235987756$.

§. 452.

Wenn wir nun den Umfang eines Kreises, dessen Durchmesser $= 1$ ist, mit π bezeichnen; so ist $a = \frac{1}{2}$, arc $360° = \pi$, und folglich $\pi = 12.\frac{1}{2}.0{,}5235987756 = 3{,}1415926536$; nähmlich ein Umkreise, dessen Durchmesser $= 1$ ist, ist $= 3{,}1415926536$. Es verhält sich demnach ein jeder Durchmesser zu seinem Umkreise wie 1 zu $3{,}1415926536$ (vermöge 416.), oder wie $10000000000 : 31415926536$. Es ist aber dieses Verhältniß $= 7 : 22$ beynahe, oder $= 113 : 355$ sehr nahe (110. 111.). Das letzte Verhältniß $113 : 355$ ist sehr leicht im Gedächtnisse zu behalten, weil es aus den ersten drey ungeraden Zahlen $11.33.55$ zusammengesetzet ist. Das Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise werden wir jederzeit mit $1 : \pi$ bezeichnen, das ist, es wird jederzeit $\pi = 3{,}1415926536$, oder auch $\pi = \frac{355}{113}$ bedeuten.

Nun ist es leicht zu jedem gegebenen Halbmesser sowohl den dazu gehörigen Umkreis, als auch die Kreisfläche zu finden. Es sey z. B. der gegebene Halbmesser eines Kreises $= m$ Schuhen; so ist der dazu gehörige Umkreis $= 2m\pi$ Schuhen, weil $1 : \pi = 2m :$ zum Umkreise statt findet; und die Kreisfläche ist $= m^2\pi$ Quadrat-Schuhen, weil die Kreisfläche dem halben Producte aus dem Umkreise $2m\pi$ in den Halbmesser m gleich ist. Setzen wir nun den Halbmesser $m = 2$ Schuhen, so ist der Umkreis $= 2.2.\pi = 4.3{,}14159\ldots\ldots = 12{,}56636$ Schuhen, und die Kreisfläche $= 12{,}56636$ Quadrat-Schuhen.

Auch zu jeder gegebenen Länge eines Umkreises kann der dazu gehörige Halbmesser gefunden werden. Es sey z. B. der gegebene Umkreis $= p$ Schuhen, und der unbekannte Halbmesser $= a$, so ist $p = 2a\pi$, und folglich $a = \frac{p}{2\pi}$ Schuhen.

Eben

Eben so kann aus dem gegebenen Flächeninhalte eines Kreises der Halbmesser gefunden werden. Es sey z. B. der gegebene Flächeninhalt $= b$ Quadrat-Schuhen, und der unbekannte Halbmesser $= a$; so ist $b = a^2\pi$, und folglich $a = \sqrt{\frac{b}{\pi}}$ Schuhen. Fig. 87.

Wenn man zu der Zahl $\pi = 3,14159\,26536$ den Logarithmus aufsuchet, so findet man $\log \pi = 0,4971499$. Da nun ein zum Halbmesser a gehöriger Umkreis $p = 2a\pi$ ist, so ist $\log p = \log 2a + \log \pi = \log 2a + 0,4971499$, und $\log 2a = \log p - 0,4971499 =$ dem Logarithmus des Durchmessers. Ingleichen da eine zum Halbmesser a gehörige Kreisfläche $b = a^2\pi$ ist; so ist $\log b = 2.\log a + 0,4971499$; und $\log a = \frac{1}{2}\log b - 0,2485749$.

§. 453.

Wenn man mehrere Glieder der unendlichen Reihe entwickelt, welche den zum Halbmesser a gehörigen Umkreis ausdrucket (451.); so findet man einen noch genaueren Werth für π, nähmlich

$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288$
$41971\ 69399\ 37510\ 58209\ 74944\ 59230\ 78164$
$06286\ 20899\ 86280\ 34825\ 34211\ 70679\ 82148$
$08651\ 32823\ 06647\ 09384\ 46095\ 50582\ 23172\ 53594$;

allein es ist der vorige Werth von π schon so genau, daß man selten alle zehn Decimal-Stellen gebrauchet; man begnüget sich gemeiniglich nur mit den ersten fünf Decimal-Stellen; nähmlich man nimmt nur $\pi = 3,14159$.

Die Annäherung zu dem Werthe von π erhält man auch, wenn man die Umfänge zweyer regelmäßigen Vielecke von einer gleichen, und ziemlich großen Anzahl der Seiten berechnet, deren eines in einen gegebenen Kreis eingeschrieben, und das andere herumbeschrieben ist. Denn die halbe Summe dieser zwey Umfänge wird dem gegebenen Umkreise beynahe gleich seyn, weil der Umfang eines eingeschriebenen Vieleckes von einer großen Anzahl der Seiten nur um etwas

sehr

Fig. 87. sehr Weniges kleiner, und der Umfang eines herumbeschriebenen Vieleckes von eben so vielen Seiten nur um etwas sehr Weniges größer ist, als der Umfang des gegebenen Kreises. Das regelmäßige 96 Eck, oder noch besser das 192 Eck, kann dazu dienen, weil man die Seite dieses Vieleckes aus dem Sechsecke, und folglich aus dem Halbmesser berechnen kann.

Da nun die oben gefundene Reihe

$$\text{arc } 360° = 12a.\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}A.\frac{1.1}{2.3} + \frac{1}{4}B.\frac{3.3}{4.5} + \frac{1}{4}C.\frac{5.5}{6.7} + ..\right)$$

niemahls aufhöret, sondern ins Uneudliche fortläuft, und sich nicht vollkommen genau summiren läßt; so kann auch der Umkreis nicht vollkommen rectificiret, die Kreisfläche nicht vollkommen quadriret werden. Jedoch da diese Reihe sehr schnell zusammen läuft, so läßt sich ihre Summe durch die Annäherung so genau bestimmen, als man es nur immer verlanget; folglich läßt sich auch jeder Umkreis eines gegebenen Halbmessers durch die Annäherung so genau rectificiren, jede Kreisfläche so genau quadriren, als man es nur immer wünschen kann.

§. 454.

Wenn wir die gefundene Summe (451.) aller eingeschriebenen Rechtecke, oder Elemente des Stückes CMBA

$$= ax - \frac{x^3}{2.3.a} - \frac{1.x^5}{2.4.5.a^3} - \frac{1.3.x^7}{2.4.6.7.a^5} - ..$$

mit dem letzten Elemente $qB = \frac{x}{\infty}\sqrt{(a^2 - x^2)}$.

$$= \frac{ax}{\infty} - \frac{x^3}{2.a.\infty} - \frac{1.x^5}{2.4.a^3.\infty} - \frac{1.3.x^7}{2.4.6.a^5.\infty} - ..$$

vergleichen; so sehen wir alsogleich ein, daß man aus dem letzten Elemente, welches gleichsam die Stelle des allgemeinen Gliedes in der unendlichen Reihe der Elemente vertritt, sehr leicht die Summe aller Elemente, nähmlich den Flächeninhalt des Stückes CMBA bestimmen kann, wenn man nur jedes Glied des letzten Elementes mit der Anzahl ∞

al-

aller Elemente multipliciret, und sodann durch den Exponen- Fig.
ten der veränderlichen Größe x dividiret. Wir werden in 87.
der Folge, um die Weitläufigkeit zu vermeiden, zuweilen die
Summirung auf diese Art vornehmen; das ist, wenn wir
bey einer unendlichen Reihe der Elemente für das letzte
Element ω einen Ausdruck von dieser Gestalt erhalten,

$$\omega = \frac{Az^m}{\infty} + \frac{Bz^n}{\infty} + \frac{Cz^p}{\infty} + \frac{Dz^q}{\infty} + \ldots\ldots$$

so werden wir aus diesem letzten Elemente alsogleich für die
Summe S aller Elemente folgenden Ausdruck annehmen,

$$S = \frac{Az^m}{m} + \frac{Bz^n}{n} + \frac{Cz^p}{p} + \ldots\ldots$$

Es sey z. B. der halbe Abschnitt PQN auf diese Art zu
berechnen, so ist das letzte Element, oder Rechteck

$Qt = Qs.QN = \frac{x}{\infty} V(2ax - x^2)$, wenn wir den Halb-
messer $= a$, den Anfangspunct der Abscissen in P, die
Abscisse $PQ = x$, und $Qs = \frac{x}{\infty}$ setzen. Nun ist das
letzte Element $Qt = \frac{x}{\infty} V(2ax - x^2)$

$$= \frac{2^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{3}{2}}}{\infty} - \frac{2^{-\frac{1}{2}}.x^{\frac{5}{2}}}{2.a^{\frac{1}{2}}.\infty} - \frac{1.2^{-\frac{3}{2}}.x^{\frac{7}{2}}}{2.4.a^{\frac{3}{2}}.\infty} - \frac{1.3.2^{-\frac{5}{2}}.x^{\frac{9}{2}}}{2.4.6.a^{\frac{5}{2}}.\infty} \ldots$$

und die Anzahl aller Elemente $= \infty$; folglich ist die
Summe aller Elemente, nähmlich $QNPQ = \frac{2}{3}.2^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{3}{2}}$

$$- \frac{2}{5}.\frac{2^{-\frac{1}{2}}.x^{\frac{5}{2}}}{2.a^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{7}.\frac{1.2^{-\frac{3}{2}}.x^{\frac{7}{2}}}{2.4\,a^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{9}.\frac{1.3.2^{-\frac{5}{2}}.x^{\frac{9}{2}}}{2.4.6.a^{\frac{5}{2}}} - \ldots$$

Wenn wir diesen Ausdruck mit 2 multipliciren, so erhalten
wir den Flächeninhalt des ganzen Abschnittes NRPN, der
nur durch den Halbmesser des dazu gehörigen Kreises, und
durch die Höhe des Abschnittes ausgedrucket ist.

Fig. 87. Man erhält auch für den Flächeninhalt eines Abschnittes BEFAB einen Ausdruck, der nur den Halbmesser CA, und die Sehne BF in sich enthält, wenn man von CMBA das Rechteck CMBE abziehet, den Unterschied ABEA mit 2 multipliciret, und sodann $\frac{1}{2}$BF statt CM substituiret. Es ist nach gehöriger Reduction.

$$BEFAB = \frac{2z^3}{3 \cdot 2^3 \cdot a} + \frac{1 \cdot z^5}{5 \cdot 2^5 \cdot a^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot z^7}{4 \cdot 7 \cdot 2^7 \cdot a^5}$$
$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot z^9}{4 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 2^9 \cdot a^7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot z^{11}}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 2^{11} \cdot a^9} + \ldots$$

wenn man $CA = a$, und die Sehne $BF = z$ setzet.

II. Abschnitt.

Von der Vergleichung und Verwandlung geradliniger Figuren.

§. 455.

Wenn man die Grundlinie was immer für eines Dreyeckes mit B, die Höhe mit A, und den Flächeninhalt mit S bezeichnet; so ist $S = \frac{1}{2}A \cdot B$. Ingleichen, wenn die Grundlinie eines anderen Dreyeckes $= b$, die Höhe $= a$, und der Flächeninhalt $= s$ gesetzet wird; so ist ebenfalls $s = \frac{1}{2}a \cdot b$ (vermöge §. 439.). Es ist also auch $S : s = \frac{1}{2}A \cdot B : \frac{1}{2}a \cdot b = A \cdot B : a \cdot b$ (185.); das ist, die Flächeninhalte der Dreyecke verhalten sich gegen einander wie die Producte aus den Grundlinien in ihre Höhen. Es folgt aus diesem:

I. Daß Dreyecke von gleichen Grundlinien wie ihre Höhen, und Dreyecke von gleichen Höhen wie ihre Grundlinien sich verhalten. Den wenn man $B = b$ setzet, so ist $S : s = A \cdot B : a \cdot B = A : a$. Ingleichen ist $S : s = B : b$, wenn $A = a$ gesetzet wird.

II. Daß bey zwey Dreyecken, deren Flächeninhalte einander gleichen, die Höhen mit den Grundlinien in einer verkehrten Proportion stehen. Denn man setze

nur

nur $S = s$, nähmlich $\frac{1}{2} A . B = \frac{1}{2} a . b$; so ist $\frac{1}{2} A : \frac{1}{2} a =$ Fig.
$b : B$ (185.) oder $A : a = b : B$. 88.

III. Daß Dreyecke, die einen gleichen Winkel haben, sich verhalten wie die Producte aus den Seiten, welche den gleichen Winkel einschließen; nähmlich $ABC : abc = AB \times AC : ab \times ac$, wenn der Winkel $A = a$ ist. Denn es ist $ABC : abc = AB \times CD : ab \times cd =$ $AB : ab \times \frac{cd}{CD}$, wenn cd und CD die Höhen sind; nun aber ist wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke ACD und acd, $AC : ac = CD : cd$ nähmlich $\frac{ac}{AC} = \frac{cd}{CD}$; es ist also auch $ABC : abc = AB : ab \times \frac{ac}{AC} = AB \times AC : ab \times ac$.

IV. Daß ähnliche Dreyecke sich gegen einander 40.
verhalten, wie die Quadrate der gleichnahmigen Seiten; z. B. $ABC : abc = BC^2 : bc^2 = AD^2 : ad^2 = AC^2 : ac^2 = AB^2 : ab^2$.

Denn es ist $ABC : abc = BC \times AD : bc \times ad =$ $BC : bc . \frac{ad}{AD}$. Nun ist aber wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke, $ad : AD = bc : BC$, nähmlich $\frac{ad}{AD} = \frac{bc}{BC}$.

Es ist also auch $ABC : abc = BC : bc . \frac{bc}{BC} = BC^2 : bc^2$.

Da ferner auch $BC : bc = AC : ac = AB : ab$, oder $BC^2 : bc^2 = AC^2 : ac^2 = AB^2 : ab^2$ statt findet, so ist auch $ABC : abc = AC^2 : ac^2 = AB^2 : ab^2$.

V. Daß alles dieses auch bey Parallelogrammen statt findet; weil ein jedes Parallelogramm nichts anderes ist, als das Doppelte eines Dreyeckes von eben derselben Grundlinie und Höhe.

§. 456.

Die Flächeninhalte ähnlicher Vielecke verhalten sich gegen einander, wie die Quadrate der gleichnahmigen

Fig. 63. migen Seiten; z. B. ABCDEF : abcdef = $AB^2 : ab^2 = EF^2 : ef^2 = AD^2 ad^2$, u. s. w.

Denn wenn man die ähnlichen Vielecke durch gleichnahmige Diagonalen in Dreyecke zertheilet; so ist das Dreyeck ABC : abc = $AB^2 : ab^2$, das Dreyeck ADC : adc = $AC^2 : ac^2 = AB^2 : ab^2$, weil AC : ac = AB : ab, oder $AC^2 : ac^2 = AB^2 : ab^2$ statt findet. Eben so findet man AED : aed = $AB^2 : ab^2$; ingleichen AEF : aef = $AB^2 : ab^2$, u. s. w. Es ist also auch (ACB + ADC + AED + ...) : (acb + adc + aed + ...) = $AB^2 : ab^2$ (191.) das ist ABCDEF : abcdef = $AB^2 : ab^2$. Da ferner AB : ab = AF : af = EF : ef oder $AB^2 : ab^2 = AF^2 : af^2 = EF^2 : ef^2$, u. s. w. statt findet; so ist auch ABCDEF : abcdef = $AF^2 : af^2 = EF^2 : ef^2$, u. s. w.

§. 457.

Die Flächeninhalte der regelmäßigen Vielecke von eben derselben Gattung verhalten sich demnach wie die Quadrate der Seiten, wie die Quadrate der Halbmesser, wie die Quadrate der Durchmesser von den herumbeschriebenen, oder auch von den eingeschriebenen Kreisen. Die Kreisflächen selbst verhalten sich wie die Quadrate der Halbmesser, wie die Quadrate der Durchmesser, wie die Quadrate der Sehnen von ähnlichen Bogen; u. s. w.

§. 458.

89. Wenn man auf den Drey Seiten eines rechtwinkeligen Dreyeckes ähnliche Figuren, z. B. gleichseitige Dreyecke, Halbkreise, oder andere ähnliche Vielecke verzeichnet; so ist die Figur auf der Hypothenuse der Summe der zwey Figuren auf den beyden Katheten zusammengenommen gleich; es ist, z. B. das Dreyeck ABD = ACF + BCE.

Denn es ist $AB^2 : AC^2 = ABD : ACF = \frac{ABD \cdot AC^2}{AB^2}$;

und

und, auch $AB^2 : BC^2 = ABD : BCE = \frac{ABD \cdot BC^2}{AB^2}$; folglich Fig. 89.

ist $ACF + BCE = \frac{ABD \cdot AC^2}{AB^2} + \frac{ABD \cdot BC^2}{AB^2} =$

$\frac{ABD \cdot (AC^2 + BC^2)}{AB^2} = \frac{ABD \cdot AB^2}{AB^2} = ABD$, weil

$AC^2 + BC^2 = AB^2$ ist (403.).

Eben so läßt sich erweisen, daß die halbe Kreisfläche ACBA der Summe aus der halben Kreisfläche auf AC und aus der halben Kreisfläche auf BC gleich ist, daß nähmlich $Q + R + P = N + Q + P + M$, folglich auch $R = N + M$ ist, wenn man beyderseits $Q + P$ abzieht, das ist, die hypokratischen Monden M und N sind zusammen dem rechtwinkeligen Dreyecke R gleich.

§. 459.

Und nun können wir eine Figur verzeichnen, welche mehreren ähnlichen Figuren zusammengenommen an Flächeninhalte gleich, und zugleich ähnlich ist. Um dieses zu erhalten darf man nur zwey gleichnahmige Seiten AB und BC der ersten zwey gegebenen ähnlichen Figuren unter einem rechten Winkel zusammenfügen, und die Hypothenuse AC führen, welche die gleichnahmige Seite einer Figur vorstellet, deren Flächeninhalt dem Flächeninhalte der zwey ähnlichen Figuren auf den gleichnahmigen Seiten AB und BC gleichet. Wenn man sodann CD senkrecht auf AC setzet, diese Senkrechte der gleichnahmigen Seite der dritten ähnlichen Figur gleich macht, und die Hypothenuse AD zieht; so ist diese die gleichnahmige Seite einer Figur, welche den drey gegebenen zusammengenommen am Flächeninhalte gleich, und zugleich ähnlich ist, wenn man die Verzeichnung (nach 426.) vornimmt; u. s. w. Wären z. B. AB, BC, und CD Halbmesser von drey Kreisen, so würde die mit dem Halbmesser AD, beschriebene Kreisfläche den drey andern zusammengenommen gleich seyn. Fig. 90.

§. 460.

Fig. 69.

§. 460.

Eben so kann eine Figur verzeichnet werden, welche zwey ähnlichen Figuren ähnlich, und dem Unterschiede ihrer Flächen gleich ist, wenn man auf einer Seite BD der größeren Figur einen Halbkreis zieht, in diesen Halbkreis aus dem Endpuncte B des Durchmessers eine Sehne BE einschreibet, die der gleichnahmigen Seite der kleineren gegebenen Figur gleich ist, sodann die Sehne DE zieht, und auf derselben als auf der gesuchten gleichnahmigen Seite eine ähnliche Figur verzeichnet. Denn wegen des rechtwinkeligen Dreyeckes BDE ist die Figur auf ED = dem Unterschiede der ähnlichen Figur auf BD und der ähnlichen Figur auf BE.

§. 461.

Wir wollen diese Abhandlung von der Vergleichung und Verwandlung geradliniger Figuren mit folgenden Aufgaben beschließen.

91. I. Ein gegebenes Vieleck z. B. das Fünfeck ABCDE in ein Dreyeck von gleichem Inhalte zu verwandeln.

Auflösung. Man ziehe die Diagonalen CA und CE, die Parallelen BF zu CA, und DG zu CE, und endlich CF und CG; so ist am Flächeninhalte das Dreyeck FCG = ABCDE. Denn es ist BFA = BFC (390. I.), und auch BFA — BIF = BFC — BIF, nähmlich FIA = BIC. Ingleichen ist DGE = DGC, und auch DGE — DKG = DGC — DKG, nähmlich GKE = DKC. Nun ist ABCDE = AICKE + BIC + DKC; es ist also auch ABCDE = AICKE + FIA + GKE, wenn man für BIC und DKC ihre gleichen Werthe setzet; nähmlich es ist ABCDE = FCG.

II. Ein Dreyeck, dessen Grundlinie *b*, und Höhe *a* gegeben sind, in ein Quadrat von gleichem Inhalte zu verwandeln; nähmlich die Seite eines gleich großen Quadrates zu finden.

Auf-

Auflösung. Es sey die Seite des gesuchten Quadra- Fig.
tes $= x$, so ist $x^2 = \frac{1}{2} ab$, und folglich $x = \sqrt{\frac{1}{2} ab}$. Man suche also nur zwischen $\frac{1}{2}a$ und b, oder zwischen a und $\frac{1}{2}b$ die mittlere Proportionale (nach 418.); so ist diese die gesuchte Seite des Quadrates, welches dem gegebenen Dreyecke am Flächeninhalte gleich ist.

Eben so läßt sich jedes gegebene Parallelogramm in ein Quadrat von gleichem Inhalte verwandeln, wenn man zwischen der Grundlinie und Höhe des gegebenen Parallelogrammes die mittlere Proportionale suchet, und auf dieser ein Quadrat verzeichnet.

Auch jede gegebene Kreisfläche läßt sich in ein Quadrat von gleichem Inhalte verwandeln, wenn man durch Hülfe eines geometrischen Maßstabes eine gerade Linie verzeichnet, die dem halben gegebenen Umkreise gleichet, sodann zwischen dieser Geraden und dem Halbmesser eine mittlere Proportionale suchet, und auf dieser ein Quadrat verzeichnet. Wenn man den Durchmesser eines gegebenen Kreises in 44 gleiche Theile theilet, und 39 solcher Theile für die Seite eines Quadrates annimmt; so ist auch der Flächeninhalt dieses Quadrates der Kreisfläche sehr nahe gleich. Denn es sey der Durchmesser eines gegebenen Kreises $= b$, und die Seite des gesuchten Quadrates, welches dem gegebenen Kreise am Flächeninhalte gleich seyn soll, sey $= x$; so ist $\frac{1}{4} b^2 \pi = x^2$, und folglich $x = \frac{1}{2} b \sqrt{\pi} = \frac{1}{2} b \sqrt{(3{,}1415926536)} = \frac{1}{2} b \,.\, 1{,}77245 = b \,.\, 0{,}88622 = \frac{88622\,b}{100000}$, oder endlich $x = \frac{39\,b}{44}$, wenn man den Bruch $\frac{88622}{100000}$ (nach 110. 111.) in $\frac{39}{44}$ verwandelt.

III. Ein gegebenes regelmäßiges Vieleck (z. B. ein gleichseitiges Dreyeck) in ein anderes etwa in ein regelmäßiges Sechseck von gleichem Inhalte zu verwandeln; das ist, aus der gegebenen Seite des ersten die gesuchte der letzten zu finden.

Auflö-

Fig. Auflösung. Es sey die Seite des gegebenen gleichseitigen Dreyeckes $= b$; so ist dessen Flächeninhalt $= \frac{2}{4} b^2 \sqrt{3}$ (vermöge 446. I.). Die Seite des gesuchten regelmäßigen Sechseckes sey $= x$; so ist der Flächeninhalt dieses Sechseckes $= \frac{3}{2} x^2 \sqrt{3}$ (vermöge 446. IV.). Nun soll $\frac{3}{2} x^2 \sqrt{3} = \frac{1}{4} b^2 \sqrt{3}$ seyn; folglich ist.

$$x = \sqrt{\frac{b^2}{6}} = b \sqrt{\tfrac{1}{6}} = b \sqrt{\frac{6}{36}} = \tfrac{1}{6} b \sqrt{6}.$$

Wäre das gegebene Vieleck unregelmäßig, oder zwar regelmäßig, aber also beschaffen, daß sich sein Flächeninhalt nicht algebraisch ausdrucken ließe; so müßte man alle erforderlichen Linien des gegebenen Vieleckes auf einem geometrischen Maßstabe ausmessen um den Flächeninhalt (nach 447.) bestimmen zu können. Sodann müßte man diesen Flächeninhalt mit einem Buchstaben z. B. mit a bezeichnen, und $\frac{3}{2} x^2 \sqrt{3} = a$ setzen, wenn das Vieleck in ein regelmäßiges Sechseck zu verwandeln wäre. Aus dieser Gleichung findet man nun $x = \frac{1}{3} \sqrt{(2a \sqrt{3})} = \frac{1}{3} \sqrt[4]{12a^2}$.

IV. Ein regelmäßiges Vieleck z. B. ein Achteck, zu verzeichnen, welches einen gegebenen Flächeninhalt $= a$ enthält.

Auflösung. Es sey die Seite dieses Achteckes $= x$ so ist dessen Flächeninhalt $= 2x^2 (1 + \sqrt{2})$. Nun muß vermöge der Bedingung der Aufgabe $2x^2 (1 + \sqrt{2}) = a$ seyn; folglich ist $x = \sqrt{[\frac{1}{2} a (\sqrt{2} - 1)]}$.

Wäre hingegen ein regelmäßiges Vieleck, dessen Flächeninhalt sich nicht algebraisch ausdrucken läßt, z. B. ein regelmäßiges Siebeneck von einem gegebenen Flächeninhalte zu verzeichnen; so beschreibe man mit einem beliebigen Halbmesser einen Kreis, verzeichne darein durch das Versuchen ein regelmäßiges Siebeneck, und messe bey demselben die erforderlichen Linien um den Flächeninhalt berechnen zu können. Dann sage man: Der berechnete Flächeninhalt des verzeichneten regelmäßigen Siebeneckes verhält sich zu dem gegebenen Flächeninhalte, gleichwie das Quadrat einer Seite des verzeichneten Siebeneckes zu dem Quadrate

drate der Seite des gesuchten Siebeneckes; man verzeich- Fig.
ne auf dieser gefundenen Seite ein regelmäßiges Siebeneck;
so wird dasselbe den gegebenen Flächeninhalt enthalten. Oder
auch: Der berechnete Flächeninhalt des verzeichneten re-
gelmäßigen Siebeneckes verhält sich zu dem gegebenen
Flächeninhalte, gleichwie das Quadrat des angenom-
menen Halbmessers zu dem Quadrate eines anderen
Halbmessers. Wenn man nun mit diesem gefundenen Halb-
messer einen Kreis beschreibet, und in demselben ein regel-
mäßiges Siebeneck verzeichnet; so wird dasselbe ebenfalls
den gegebenen Flächeninhalt enthalten.

V. Es sind alle drey Seiten AC $=$ a, AB $=$ b, 80.
BC $=$ c eines Dreyeckes ABC gegeben; man soll seinen
Flächeninhalt finden.

Auflösung. Es sey AB $=$ b die Grundlinie, so ist

(vermöge 422.) die Höhe $CD = \frac{2}{b} V[s(s-a).(s-b).(s-c)]$

wobey $s = \frac{a+b+c}{2}$ die halbe Summe aller drey Seiten

bezeichnet; folglich ist der Flächeninhalt des Dreyeckes
$ABC = \frac{1}{2} AB . CD = V[s(s-a).(s-b).(s-c)]$;
das ist, wenn man von der halben Summe der drey
Seiten eines Dreyeckes jede Seite abzieht, die drey
gefundenen Differenzen sowohl unter einander, als
auch mit der halben Summe der drey Seiten multi-
pliciret, und aus dem Producte die Quadrat-Wurzel
zieht; so ist dieses Resultat der Flächeninhalt des ge-
gebenen Dreyeckes.

Es sey z. B. $a = 150$, $b = 140$, und $c = 130$
Klafter; so ist $s = 210$, $s - a = 60$, $s - b = 70$,
$s - c = 80$ Klafter, und folglich der Flächeninhalt
$= V(210.60.70.80) = V(70560000) = 8400$ Qua-
drat-Klaftern. Eben so findet man den Flächeninhalt
$= 8400$ Quadrat-Klaftern, wenn $a = 210$, $b = 170$, und
$c = 100$ Klafter ist.

Fig. VI. Ein gegebenes Vieleck in ein anderes ähnliches also zu verwandeln, daß der Flächeninhalt des gegebenen zu dem Flächeninhalte des verwandelten Vieleckes sich verhalte, wie m zu n z. B. wie 9 zu 4.

Auflösung. Es sey eine Seite des gegebenen Vieleckes $= a$, z. B. $= 450$, und die gleichnahmige Seite des gesuchten Vieleckes $= x$; so ist $a^2 : x^2 = m : n$, und folglich

$$x = V\frac{a^2 n}{m} = V\frac{a^2 mn}{m^2} = \frac{a}{m}V mn = \frac{450}{9}.V\,9.4 =$$

$50.V\,36 = 50.6 = 300$. Denn der Flächeninhalt des gegebenen Vieleckes verhält sich zu dem Flächeninhalte des gesuchten Vieleckes, wie a^2 zu x^2, (456.). Nun aber verhält sich auch vermöge der Bedingung der Aufgabe der Flächeninhalt des ersten zum Flächeninhalte des zweyten Vieleckes wie m zu n. Es ist also auch $a^2 : x^2 = m : n$.

VII. Ein Dreyeck CDF in n, z. B. in 5 gleiche Theile zu theilen.

70. Auflösung. Man Theile eine Seite CF des gegebenen Dreyeckes in den Puncten a, b, c, d in n gleiche Theile, verbinde diese Theilungspuncte mit dem entgegengesetzten Winkel durch gerade Linien; so wird dadurch das gegebene Dreyeck in n gleiche Theile getheilet seyn. Denn alle n Dreyecke haben gleiche Grnndlinien, und eben dieselbe Höhe; folglich sind sie einander am Flächeninhalte gleich.

Wäre das Dreyeck in zwey Theile zu theilen, die sich wie m zu n z. B. wie 2 zu 3 verhalten sollen; so theile man eine Seite in $m + n = 2 + 3 = 5$ gleiche Theile, und verbinde den $m$ten (in unserem Falle den 2ten) Theilungspunct b mit dem entgegengesetzten Winkel durch die Gerade bD; so ist dadurch das Dreyeck in zwey Theile CbD, und DbF getheilet, die sich wie m zu n, das ist wie 2 zu 3 verhalten. Eben dieses ist zu beobachten, wenn ein Dreyeck in mehrere Theile zu theilen wäre, die sich wie m, n, p u. s. w. verhalten sollen.

41. Wäre ein Dreyeck abc in n z. B. in 3 gleiche Theile durch die Geraden mp und nq zu theilen, die mit ac

pa-

parallel laufen, so findet man die Theilungspuncte durch folgende Proportion; $3 : 1 = ba^2 : bm^2$, und $3 : 2 = ba^2 : bn^2$, nähmlich $bm = V\frac{1}{3}ba^2$, und $bn = V\frac{2}{3}ba^2$. Denn das Dreyeck bac : bmp = $ba^2 : bm^2$ (455. IV.); nun aber ist auch bac : bmp = 3 : 1; es ist also auch $3 : 1 = ba^2 : bm^2$; u. s. w. Fig. 41.

Wäre endlich ein Parallelogramm in mehrere Theile zu theilen, die sich wie *m*, *n*, *p* verhalten sollen; so wird ein jeder leicht einsehen, daß man zwey entgegengesetzte Seiten nach diesem Verhältnisse eintheilen, und die Theilungspuncte durch gerade Linien verbinden müsse.

VIII. Eine geradlinige Figur ABCDE in *n*, z. B. in 3 gleiche Theile zu theilen. 92.

Auflösung. Man ziehe die Diagonalen AD und AC, die Senkrechten EH, DG, BF, messe diese Geraden aus, und berechne den Flächeninhalt der Figur ABCDE. Diesen in Zahlen gefundenen Flächeninhalt theile man durch die Division in *n* (in unserem Falle in 3) gleiche Theile, und einen solchen *n*ten Theil wieder in zwey gleiche Theile. Sodann ziehe man das Dreyeck ADE von dem *n*ten = 3ten Theile des ganzen berechneten Flächeninhaltes ab, und dividire diesen Ueberrest durch $\frac{1}{2}$ AD; so ist der Quotient die Höhe eines Dreyeckes AID (439.), welches zu ADE addiret einen *n*ten = 3ten Theil zum Vorschein bringt. Man ziehe also nur in der Entfernung der gefundenen Höhe zu AD eine Parallele; so wird dadurch der Punct I bestimmet, den man mit D verbinden muß, um IDEA = $\frac{1}{3}$ ABCDE zu erhalten. Ferner theile man die Hälfte des *n*ten = 3ten Theiles des ganzen Flächeninhaltes durch $\frac{1}{2}$ DI; so ist der Quotient der Höhe eines Dreyeckes DIK gleich, dessen Flächeninhalt = $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$ ABCDE = $\frac{1}{6}$ ABCDE ist. Man ziehe also nur in der Entfernung der gefundenen Höhe zu DI eine Parallele; so wird dadurch der Punct K bestimmet. Darauf theile man eben dieselbe Hälfte des 3ten Theiles durch $\frac{1}{2}$ DK, so ist der Quotient die Höhe eines Dreyeckes DKL, dessen Flächeninhalt = $\frac{1}{6}$ ABCDE ist. Man ziehe also nur in der Entfernung der gefundenen Höhe zu DK eine Parallele, so

ist

Fig. 92. ist dadurch auch der Punct L bestimmet. Wenn man nun K und L verbindet, so ist DIKL = DIK + DKL = $\frac{1}{6}$ABCDE + $\frac{1}{6}$ABCDE = $\frac{1}{3}$ABCDE; und folglich ist dadurch auch der zweyte gesuchte Theil gefunden. Endlich ist BCLK = ABCDE — DIKL — AIDE = ABCDE — $\frac{1}{3}$ABCDE — $\frac{1}{3}$ABCDE = $\frac{1}{3}$ABCDE, und folglich ist dadurch auch der letzte gesuchte Theil bestimmet.

Wäre nun ADE > $\frac{1}{3}$ABCDE, so ist es ganz begreiflich, daß man $\frac{1}{3}$ABCDE von ADE abziehen, und diesen Ueberrest durch $\frac{1}{2}$AD dividiren müsse, um die Höhe eines Dreyeckes zu finden, welches von ADE abgezogen den 3ten Theil des ganzen Flächeninhaltes zum Vorschein bringt.

Wäre endlich eine Figur in mehrere Theile zu theilen, die sich wie m, n, p verhalten sollen; so ist es ebenfalls sehr leicht einzusehen, daß man dieselbe nach der gegebenen Vorschrift einmahl in $(m+n+p)$ gleiche Theile theilen, und sodann m von solchen gleichen Theilen für den ersten, n für den zweyten, p für den dritten gesuchten Theil nehmen müsse, u. s. w.

Die Ursache, warum der $n$te (in unserem Beyspiele der 3te) Theil des ganzen berechneten Flächeninhaltes wieder in zwey gleiche Theile getheilet werde, ist diese, damit die gesuchten Theile, in welche die gegebene Figur zu theilen ist, nicht durch Dreyecke, sondern vielmehr durch viereckige Figuren ausgedrucket werden.

93. IX. Ein Dreyeck ABC durch die Gerade DE, welche durch den in der Seite AB gegebenen Punct D geht, in zwey gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Es sey AB = a, die größere Entfernung des gegebenen Punctes D von einem der anliegenden Winkel sey AD = c, die diesem Winkel anliegende Seite AC = b, und AE = x; so ist das Dreyeck AED : ACB = AE × AD : AC × AB = $cx : ab$, (455. III.) Nun aber ist AED : ACB = 1 : 2; folglich ist auch $cx : ab = 1 : 2$, und endlich $x = \frac{ab}{2c}$. Wenn nun a, b, c durch einen Maßstab bestimmet sind; so läßt sich nach eben diesem Maßstabe x = AE

und

und folglich der Punct E bestimmen, der mit D zu verbin- Fig.
den ist, damit das Dreyeck durch die Gerade DE in zwey 93.
gleiche Theile getheilet werde.

Der Werth von $x = \frac{ab}{2c}$ kann in folgende Proportion $c : \frac{1}{2}a = b : x$, nähmlich AD : $\frac{1}{2}$ AB = AC : x aufgelöset werden. Theilet man nun AB in dem Puncte F in zwey gleiche Theile, ziehet CD, und durch F die Parallele FE zu CD; so ist AD : AF = AC : AE, das ist, AD : $\frac{1}{2}$ AB = AC : AE; und folglich ist AE = x.

X. Es ist der Flächeninhalt a, und der Umfang b 55.
eines rechtwinkeligen Dreyeckes ACB gegeben; man soll die drey Seiten desselben finden.

Auflösung. Es sey die eine Kathete CA = x, die andere CB = y, und die Hypothenuse AB = z; so ist $\frac{xy}{2} = a$, $x + y + z = b$, und $z^2 = x^2 + y^2$. Nun ist aus der ersten Gleichung $y = \frac{2a}{x}$. Substituiret man diesen Werth in der zweyten und dritten Gleichung; so ist $x + \frac{2a}{x} + z = b$, und $z = x^2 + \frac{4a^2}{x^2}$, das ist $z = \frac{bx - x^2 - 2a}{x}$ aus der ersten, und $z = V\left(\frac{x^4 + 4a^2}{x^2}\right)$ aus der zweyten von diesen letzten Gleichungen. Es ist also auch $\frac{bx - x^2 - 2a}{x} = V\left(\frac{x^4 + 4a^2}{x^2}\right)$, oder $\frac{b^2x^2 - 2bx^3 + x^4 - 4abx + 4ax^2 + 4a^2}{x^2} = \frac{x^4 + 4a^2}{x^2}$, und endlich $x = \frac{4a + b^2 + V(16a^2 - 24ab^2 + b^4)}{4b}$. Substituiren wir diesen Werth für x in der Gleichung $y = \frac{2a}{x}$; so ist $y = \frac{8ab}{4a + b^2 + V(16a^2 - 24ab^2 + b^4)} = \frac{4a + b^2 - V(16a^2 - 24ab^2 + b^4)}{4b}$

Fig. Es sey z. B. $a = 6$ Quadrat-Schuhen, und $b = 12$ Schuhen; so ist die eine Kathete $x = 4$, die andere $y = 3$, und folglich die Hypothenuse $z = \sqrt{(16+9)} = \sqrt{25} = 5$ Schuhen.

III. Abschnitt.

Von der Lage und Stellung der Ebenen.

§. 462.

Wir haben schon einmahl erinnert (345.), daß eine Fläche, auf der sich durch was immer für zwey Puncte eine gerade Linie dergestalt ziehen läßt, daß sie nach ihrer ganze Länge auf der Fläche liegt, eine Ebene genannt wird. Nun sollen auch einige Eigenschaften, die aus der verschiedenen Lage und Stellung der Ebenen entspringen, aus einander gesetzet werden. Bey dieser Untersuchung wird angenommen, daß man jede Ebene nach allen Seiten in Gedanken soweit ausdehnen könne, als man es nur immer verlangt. Die vorzüglichsten Eigenschaften der Ebenen sind folgende.

95. I. Es ist unmöglich, daß ein Theil AB einer geraden Linie AC auf einer Ebene liege, und ein anderer Theil derselben MN außer diese Ebene (das ist oberwärts, oder unterwärts) falle. Denn würde ein Theil MN außer die Ebene PQ fallen, und der Theil AB in dieser Ebene liegen; so wäre entweder PQ keine Ebene, oder AC keine gerade Linie, welches wider die Voraussetzung läuft.

II. Eine gerade Linie AC muß nach ihrer ganzen Länge auf der Ebene PQ liegen, sobald sie zwey Puncte z. B. A und B mit der Ebene gemein hat. Denn würde z. B. der Theil MN außer die Ebene fallen, so müßte ein Theil MN der Geraden AC außer die Ebene fallen, und ein anderer Theil derselben AB auf der Ebene liegen, welches unmöglich ist.

III. Ein Dreyeck CBG muß ganz auf der Ebene PQ liegen, sobald ein Theil von der Fläche desselben (z. B. NRB, oder GNR, oder GNC) auf der Ebene

PQ

PQ liegt. Denn wenn z. B. GNR auf der Ebene PQ liegt; so hat die Seite GB mit der Ebene PQ zwey Puncte G und R gemein, und folglich liegt sie nach ihrer ganzen Länge in der Ebene PQ. Nun hat auch die Seite CB zwey Puncte N und B mit der Ebene PQ gemein (weil B in der Geraden GB liegt); folglich liegt auch CB nach ihrer ganzen Länge in der Ebene PQ. Endlich hat auch CG die zwey Puncte C und G mit der Ebene PQ gemein (weil jener in der Geraden CB, und dieser in der Geraden GB, nähmlich beyde in der Ebene PQ liegen); folglich liegt auch die dritte Seite CG nach ihrer ganzen Länge in der Ebene PQ. Da nun alle drey Seiten des Dreyeckes BCG in der Ebene PQ liegen, wenn der Theil GNR in derselben Ebene liegt; so liegt auch in dieser Voraussetzung das Dreyeck selbst in derselben Ebene. Eben so kann man erweisen, daß das ganze Dreyeck auf der Ebene PQ liegen müsse, wenn ein anderer Theil desselben, z. B. NGC auf dieser Ebene liegt. Fig. 95.

§. 463.

Wenn man nun durch einen Theil NBR des Dreyeckes BCG eine Ebene führen wollte, so würde diese Ebene mit der Ebene oder Fläche des Dreyeckes BCG, und folglich auch mit der Ebene PQ über einander fallen, und mit derselben nur eine einzige Ebene ausmachen. Es wird also durch die Lage eines Dreyeckes die Lage oder Richtung einer Ebene gänzlich bestimmet. Nun aber wird die Lage des Dreyeckes durch die drey Puncte B, C, G bestimmet; es wird also auch durch dieselben drey Puncte die Lage der Ebene PQ bestimmet; das heißt, durch drey Puncte, die nicht in einer geraden Linie liegen, läßt sich nur eine einzige Ebene führen. Hingegen können durch drey Puncte, die in einer geraden Linie liegen, das ist durch eine einzige gerade Linie unzählige Ebenen geführet werden.

§. 464.

Fig. 95.

§. 464.

Auch ist es leicht einzusehen, daß zwey Geraden BC und BG, AC und HG, die sich durchschneiden, beyde in derselben Ebene liegen, das ist, daß durch zwey sich durchschneidende gerade Linien nur eine einzige Ebene geführet werden könne. Denn man nehme nur auf den zwey sich durchschneidenden Geraden BC und BG die Puncte R und N, und verbinde sie mit der Geraden NR; so liegt das ganze Dreyeck BNR in einer einzigen Ebene PQ. Nun aber haben die zwey sich durchschneidenden Geraden HG und AC jede mit dieser Ebene PQ zwey Puncte gemein; folglich liegen sie beyde in dieser Ebene PQ.

§. 465.

96. Schneidet eine Gerade AB eine Ebene PQ dergestalt, daß sie auf allen Geraden senkrecht stehet, welche in dieser Ebene durch den Durchschnittspunct können gezogen werden; so heißt sie senkrecht auf die Ebene.

§. 466.

Wenn eine Gerade AB auf zwey Geraden CB und DB in ihrem Durchschnittspuncte B zugleich senkrecht steht, so ist sie senkrecht auf jede Gerade z. B. auf HG, die in derselben Ebene PQ durch den Durchschnittspunct B gezogen wird; das ist, sie ist senkrecht auf die Ebene PQ selbst.

Denn man verlängere nur CB und DB, mache BC = BE = BD = BF, und ziehe CD, DE, EF, FC, AC, AD, AE, AF, AH, und AG; so ist BH = BG, und FH = DG, weil HG durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunct der zwey Diagonalen des Parallelogramms CDEF gezogen ist (387. III.). Sodann ist in den zwey Dreyecken CFA und EDA die Seite CF = ED, CA = EA, FA = AD (358. I.) folglich sind sie einander vollkommen gleich, und es ist der Winkel AFC = ADE, oder AFH = ADG. Ferner ist in den zwey Dreyecken FHA und DGA die Seite

FA

FA = DA, FH = DG, und der eingeschlossene Winkel F. AFH = ADG; es sind also auch diese zwey Dreyecke ein- 90.
ander vollkommen gleich, und folglich ist HA = GA. Endlich ist in den zwey Dreyecken HBA und GBA die Seite BA = BA, BH = BG, HA = GA; es sind also auch diese Dreyecke einander vollkommen gleich, und der Winkel ABH = ABG = 90°. Folglich steht AB in dem Puncte B senkrecht auf HG. Da nun dieses sich von einer jeden anderen Geraden erweisen läßt, die in der Ebene PQ durch den Punct B gezogen wird; so ist AB auf eine jede solche Gerade, und folglich auf die Ebene PQ selbst senkrecht.

Hier ist noch zu merken:

I. Daß man aus einem außer einer Ebene PQ angenommenen Puncte A eine einzige Senkrechte AB auf diese Ebene führen könne. Denn wäre noch eine andere Senkrechte z. B. AG möglich; so würde das Dreyeck ABG, wenn man die Puncte B und G mit einer Geraden verbindet, zwey rechte Winkel ABG und AGB haben, welches unmöglich ist.

II. Daß auch aus einem in der Ebene PQ angenom- 95.
menen Puncte B eine einzige Senkrechte BD auf diese Ebene könne errichtet werden. Denn wäre noch eine andere Senkrechte in demselben Puncte auf dieselbe Ebene z. B. BE möglich; so müßten beyde Geraden BD und BE auf einer Geraden GH in einer und derselben Ebene in demselben Puncte zugleich senkrecht stehen (wenn man nähmlich durch die zwey sich durchschneidenden Geraden BD und BE in Gedanken eine Ebene führet, und sodann in der Ebene PQ die Gerade GH durch den Punct B dergestalt zieht, daß sie auch in der durch B, D, E geführten Ebene liegt); folglich müßte der Winkel EBH = DBH = 90°, das ist, es müßte ein Theil dem Ganzen gleich seyn, welches unmöglich ist.

III. Daß die Senkrechte AB aus allen Geraden die kür- 96.
zeste ist, die aus dem Puncte A auf die Ebene PQ gezogen werden können, und daß sie folglich die Entfernung des Punctes A von der Ebene PQ bestimmet.

Fig

Anmerkung. Aus einem außer der Ebene gegebenen Puncte kann in der Ausübung am füglichsten eine Senkrechte auf die Ebene gefället werden, wenn man in diesem Puncte eine Schnur befestiget, dann mit gleichförmiger Anspannung und einer und derselben Länge der Schnur auf der Ebene drey Durchschnittspuncte bemerket, ferner diese als drey Puncte eines Umkreises betrachtet, dazu (vermöge 368. II.) den Mittelpunct bestimmet, und endlich diesen mit dem gegebenen Puncte außer der Ebene verbindet. Daß diese Verbindungslinie senkrecht auf der Ebene stehen müsse, ist leicht einzusehen. Denn, wenn man die Senkrechte aus dem gegebenen Puncte als schon gezogen gedenket; so entstehen drey rechtwinkelige Dreyecke, welche eine gemeinschaftliche Kathete, und gleiche Hypothenusen haben, folglich einander gleich sind (359). Es liegt demnach der Durchschnitts-Punct der Senkrechten auf der Ebene in demjenigen Puncte, welcher von den drey auf der Ebene abgeschnittenen Puncten gleich weit entfernt ist, nähmlich, in dem Mittelpuncte des durch die drey Puncte gedachten Kreises. Aus einem in der Ebene liegenden Puncte kann eine Senkrechte auf die Ebene am sichersten durch Hülfe eines zuvor geprüften Winkelhakens errichtet werden, wenn man diesen an den gegebenen Punct in der Ebene anleget.

§. 467.

97. Der gemeinschaftliche Durchschnitt AB zweyer Ebenen DH und CG ist eine gerade Linie. Denn man verbinde nur zwey Puncte M und N des gemeinschaftlichen Durchschnittes (der eine Linie seyn muß, weil die Ebenen keine Dicke haben) durch die Gerade MN; so liegt diese nach ihrer ganzen Länge in beyden Ebenen zugleich, weil sie mit jeder derselben zwey Puncte gemein hat. Nun aber ist diejenige Linie der gemeinschaftliche Durchschnitt der zwey Ebenen DH und CG, die nach ihrer ganzen Länge in beyden zugleich liegt; folglich ist die gezogene Gerade MN der gemeinschaftliche Durchschnitt der zwey Ebenen DH und CG; das ist, die gezogene Gerade MN fällt mit der gemein-

meinschaftlichen Durchschnittslinie AB über einander, und macht mit derselben nur eine einzige Gerade aus. Fig. 97.

§. 468.

Wenn man durch was immer für einen Punct F der Durchschnittslinie AB zweyer Ebenen CG und DH auf AB zwey Senkrechten FE und FI, die erste in der Ebene DH, und die zweyte in der Ebene CG, fället; so heißt der Winkel EFI der Neigungswinkel der zwey Ebenen CG und DH. Ist nun dieser Neigungswinkel ein Rechter, nähmlich ist dieser $= 90°$; so heißen die zwey Ebenen senkrecht auf einander. Z. B. CG und PQ in Fig. 98., sind senkrecht auf einander, wenn $MAD = 90°$ ist.

§. 469.

Wenn die Ebene CG auf der Ebene PQ senkrecht steht, und man fället aus was immer für einem Puncte M der Ebene CG auf die Durchschnittslinie CT die Senkrechte MA, oder man errichtet aus dem Puncte A der Durchschnittslinie CT auf diese in der Ebene CG die Senkrechte AM; so steht sie senkrecht auf der Ebene PQ. 98.

Denn man errichte nur in dem Puncte A in der Ebene PQ die Senkrechte AD auf die gemeinschaftliche Durchschnittslinie CT; so ist MAD der Neigungswinkel der zwey Ebenen PQ und CG, und folglich ist dieser $= 90°$, weil diese zwey Ebenen vermöge der Voraussetzung auf einander senkrecht stehen. Nun aber ist auch MAC oder MAT $= 90°$, weil MA auf CT senkrecht steht. Es stehet also MA auf zwey Geraden in der Ebene PQ in ihrem Durchschnitts-Puncte zugleich senkrecht; folglich steht sie auch senkrecht auf allen Geraden, die durch denselben Punct A in der Ebene PQ können gezogen werden; nähmlich sie steht senkrecht auf der Ebene PQ selbst (466.).

Eben so läßt sich erweisen, daß jede andere Gerade ma auf der Ebene PQ senkrecht steht, wenn sie in der Ebene CG auf die Durchschnittslinie CT senkrecht gezogen

Fig. 98. ist. Nun sind bey den zwey Geraden MA und ma, die in einer und derselben Ebene CG liegen, und auf der Ebene PQ senkrecht stehen, die Winkel MAa + maA = 90°+90°; folglich laufen sie mit einander parallel (363).

§. 470.

Umgekehrt, wenn die Ebene CG auf der Ebene PQ senkrecht steht, und eine Gerade AM durch was immer für einen Punct A der Durchschnittslinie CT auf die Ebene PQ senkrecht gezogen ist, so liegt dieselbe in der Ebene CG.

Denn würde diese Senkrechte AM außer der Ebene CG liegen, so könnte durch diesen Punct A eine andere Senkrechte AN auf die Durchschnittslinie CT in der Ebene CG gezogen werden. Nun würde diese Senkrechte vermöge des Vorhergehenden auf der Ebene PQ senkrecht stehen. Es würden also in demselben Puncte A zwey gerade Linien auf der Ebene PQ senkrecht stehen, welches unmöglich ist (466. II.). Es ist also auch unmöglich, daß die Gerade AM außer der Ebene CG liege, wenn sie in dem Puncte A auf PQ senkrecht steht.

§. 471.

99. Wenn zwey sich durchschneidende Ebenen CD und EF beyde auf einer dritten Ebene PQ senkrecht stehen, so stehet auch ihre Durchschnittslinie BA auf derselben Ebene PQ senkrecht.

Denn man gedenke nur aus dem Durchschnitts-Puncte A eine Senkrechte AB auf die Ebene PQ, so muß diese Senkrechte vermöge des Vorhergehenden nach ihrer ganzen Länge in den beyden Ebenen CD und EF zugleich liegen; folglich muß sie mit der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie dieser zwey Ebenen über einander fallen, und mit derselben nur eine einzige Gerade ausmachen. Nun aber steht die gezogene Gerade AB auf der Ebene PQ senkrecht; es steht also auch die Durchschnittslinie der zwey Ebenen CD und EF auf der Ebene PQ senkrecht.

§. 472.

§. 472.

Fig. 100.

Wenn zwey Ebenen überall gleich weit von einander entfernt, das ist, wenn die Senkrechten, die man aus was immer für einem Puncte der einen Ebene auf die andere ziehen kann, alle einander gleich sind; so heißen die Ebenen gleichlaufend oder parallel.

Es folgt aus diesem, daß zwey parallele Ebenen niemahls zusammen stoßen können, wenn man sie noch so weit ausdehnet, weil ihre Entfernung von einander immer unverändert bleibt. Auch ist es leicht einzusehen, daß die Wechselwinkel, daß die äußeren und inneren Winkel auf eben derselben Seite einander gleich sind, wenn zwey parallele Ebenen von einer dritten geschnitten werden. Ingleichen, daß eine Ebene, oder auch eine gerade Linie, wenn sie auf eine von mehreren parallelen Ebenen senkrecht geführet ist, auf allen den übrigen parallelen Ebenen senkrecht stehet; u. s. w.

§. 473.

Wen zwey parallele Ebenen PQ und RS durch eine dritte Ebene AEDR durchschnitten werden, so laufen die Durchschnittslinien AE und RD mit einander parallel.

Denn die zwey geraden Durchschnittslinien AE und RD liegen beyde in einer und derselben Ebene AEDR, und sind also beschaffen, daß sie niemahls zusammenstoßen können, wenn man sie noch so weit verlängert, weil sie in den parallelen Ebenen PQ und RS liegen; folglich laufen sie mit einander parallel.

§. 474.

Wenn man aus einem außer der Ebene PQ gelegenen Puncte M auf die Ebene PQ mehrere gerade Linien MA, MB, MC, MG, MF, MN, ziehet, und sodann eine Ebene RS führet, die mit PQ parallel läuft, und die gezogenen Geraden in a, b, c, g, f, n durch-

Fig. durchschneidet; so können folgende Schlüsse abgeleitet
100. werden.

I. Die Abschnitte stehen sowohl unter einander, als auch mit den ganzen Geraden in Proportion; nähmlich Ma : Mb = aA : bB, oder Ma : Mb = MA : MB Mb : Mc = MB : MC, u. s. w. Denn wenn man durch die zwey sich durchschneidenden Geraden MA und MB eine Ebene MAB gedenket, so laufen die Durchschnittslinien ab, und AB mit einander parallel (473.); folglich findet in den zwey ähnlichen Dreyecken Mab und MAB folgende Proportion statt; Ma : Mb = MA : MB, oder Ma : Mb = aA : bB, und auch Ma : ab = MA : AB, u. s. w. Eben so läßt sich erweisen, daß Mb : Mc = MB : MC, oder Mb : bc = MB : BC u. s. w. statt findet, wenn man durch die zwey sich durchschneidenden Geraden BM und CM eine Ebene BMC gedenket.

II. Die zwey Vielecke ABCGF und abcgf sind einander ähnlich. Denn man zertheile nur diese Vielecke durch gleichnahmige Diagonalen GA, GB, und ga, gb in lauter Dreyecke; so wird man alsogleich einsehen, daß das Dreyeck abg ∽ ABG, bgc ∽ BGC u. s. w., und daß folglich das Vieleck abcgf ∽ ABCGF ist (415.). Die Aehnlichkeit der Dreyecke abg und ABG erhellet aus folgenden Proportionen; Ma : MA = ab : AB, und Ma : MA = ag : AG; also auch ab : AB = ag : AG; ferner ist Mb : MB = bg : BG, und Mb : MB = ab : AB; also auch bg : BG = ab : AB = ag : AG; folglich ist das Dreyeck abg ∽ ABG (400.). Eben so läßt sich erweisen, daß das Dreyeck bgc ∽ BGC, agf ∽ AGF ist, u. s. w.

III. Die Flächeninhalte dieser Vielecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer Entfernungen von dem Puncte M, nähmlich abcgf : ABCGF = Mn^2 : MN^2, wenn MN aus dem Puncte M auf die zwey parallelen Ebenen PQ und R*S* senkrecht gezogen ist. Denn es ist abcgf : ABCGF = ab^2 : AB^2; nun aber ist Mb : MB = ab : AB, oder Mb^2 : MB^2 = ab^2 : AB^2; es ist also auch abcgf : ABCGF = Mb^2 : MB^2. Endlich findet in den zwey ähnlichen Drey-

ecken

ecken Mbn und MBN, wenn die Puncte n mit b, und N mit B verbunden werden, wo die Senkrechte MnN die parallelen Ebenen RS und PQ durchschneidet, folgende Proportion statt; Mb : MB = Mn : MN, oder $Mb^2 : MB^2 = Mn^2 : MN^2$; folglich ist auch abcgf:ABCGF $= Mn^2 : MN^2$. Fig. 100.

§. 475.

Da bey den Dreyecken bcg und BCG die Seiten des einen mit den Seiten des anderen Dreyeckes wechselsweise parallel laufen, und diese Dreyecke einander ähnlich sind; so folgt, daß Dreyecke, deren Seiten mit einander parallel laufen, auch noch ähnlich seyn müssen, wenn sie schon in verschiedenen Ebenen liegen. Daß dieser Satz bey Dreyecken, die in einer und derselben Ebene liegen, statt findet, haben wir schon (383.) erwiesen.

§. 476.

Da über dieß in den ähnlichen Dreyecken bcg und BCG die Winkel c und C gleich sind, und ihre Schenkel mit einander wechselsweise parallel laufen; so folgt, daß auch zwey Winkel, deren Schenkel mit einander wechselsweise parallel laufen, einander gleich seyn müssen, wenn sie schon in verschiedenen Ebenen liegen.

Mann kann auch die Gleichheit der Winkel bcg und BCG erweisen, wenn man durch bc, bg und cg auf RS senkrechte Ebenen leget, und diese Ebenen so weit ausdehnet, bis sie die Ebene PQ durchschneiden. Da diese Gleichheit auch bey den Winkeln gbc und GBC, wie auch bey den Winkeln BGC und bgc statt findet; so läßt sich daraus die Aehnlichkeit der Dreyecke bgc und BGC folgeren, deren Seiten mit einander wechselsweise parallel laufen, wenn sie schon in verschiedenen Ebenen liegen.

Fig.

Drittes Hauptstück.

Von den Eigenschaften der Körper.

I. Abschnitt.

Begriffe von den geometrischen Körpern, oder Einleitung in die Stereometrie.

§. 477.

Ein Körper ABCcab von zwey vollkommen gleichen und
101. parallelen Vielecken ABC, abc, und von so vielen Parallelogrammen eingeschlossen, als jedes der zwey Vielecke Seiten hat, heißt ein **Prisma** (Eckſäule); die zwey vollkommen gleichen und parallelen Vielecke ABC, abc heißen die **Grundflächen**, und ihre Entfernung, das ist die Senkrechte von was immer für einem Puncte der einen Grundfläche auf die Ebene der anderen Grundfläche (die man in erforderlichen Falle auch verlängern kann) gezogen, heißt die **Höhe** des Prisma. Ein Prisma dessen alle Seitenflächen auf den Grundflächen senkrecht stehen, wird ein senkrechtes genannt; stehen hingegen nicht alle Seitenflächen auf den Grundflächen senkrecht, so heißt es ein schiefes Prisma. Ein Prisma heißt **dreyseitig**, **vierseitig**, **fünfseitig** u. s. w., nachdem die Grundflächen desselben Dreyecke, Vierecke, oder Fünfecke sind. Ein vierseitiges Prisma, dessen Grund- und Seitenflächen Parallelogramme sind, und welches demnach von sechs Parallelogrammen eingeschlossen ist, wird insbesondere ein **Parallelepipedum** genannt. Ein senkrechtes Parallelepipedum, dessen Grund- und Seitenflächen einander vollkommen gleich, und folglich Quadrate sind, heißt ein **Cubus** (Würfel), Fig. 1. Ein Prisma,
102. dessen Grundflächen Kreise sind, wird ein **Cylinder** (Rundsäule),

säule), und die Gerade, welche die Mittelpuncte der zwey Kreise verbindet, wird die Achse des Cylinders genannt. Ein Cylinder heißt senkrecht, wenn die Achse desselben auf den Grundflächen senkrecht, und schief, wenn die Achse desselben auf den Grundflächen schief steht. Wenn man von einem Prisma, oder von einem Cylinder ein Stück dergestalt abschneidet, daß die Durchschnittsebene mit der Grundfläche nicht parallel läuft; so heißt der Ueberrest ein schief abgeschnittenes Prisma, oder ein schief abgeschnittener Cylinder. Fig. 102.

§. 478.

Da der Raum, den eine Fläche beschreibt, wenn sie sich anders, als nach ihrer Lage beweget, drey Ausdehnungen hat, und folglich ein Körper ist; so ist ganz begreiflich, daß ein Prisma ABCcab erzeuget wird, wenn sich ein Vieleck ABC mit einem Puncte A längst einer Geraden Aa immer parallel fortbeweget, bis es in abc anlanget; und daß ein Cylinder enstehet, wenn eine Kreisfläche AMBN mit ihrem Mittelpuncte längst einer Geraden EF bis F sich immer parallel fortbeweget. Ein senkrechter Cylinder entstehet auch, wenn ein Rechteck FB sich um eine Seite FE wie um eine unbewegliche Achse herumdrehet, bis es wieder in die vorige Lage kommt. Diese Entstehungsart durch die Umdrehung findet bey einem schiefen Cylinder nicht statt, weil ein schiefer Cylinder, dessen Grundflächen Kreise sind, nichts anderes ist, als ein senkrechtes elliptisches (ovales) Prisma, welches an beyden Enden durch parallele Ebenen nach einer gewissen Richtung schief abgeschnitten ist, wie wir es in der Folge einmahl sehen werden. 101. 102.

§. 479.

Eine Pyramide (Spitzsäule) ACGFM ist ein Körper, der von einer ebenen Grundfläche, und von so vielen Dreyecken eingeschlossen ist, als die Grundfläche Seiten hat. Die senkrechte Entfernung MN der gemeinschaftlichen Spitze aller einschließenden Dreyecke von der Ebene der Grund- 100.

Fig. 100. fläche heißt die Höhe der Pyramide. Pyramiden heißen dreyseitig, vierseitig, fünfseitig, nachdem ihre Grundflächen Dreyecke, Vierecke, Fünfecke sind. Ueber dieß werden Pyramiden regelmäßig (oder vielmehr gleichseitig) genannt, wenn ihre Grundflächen regelmäßige Vielecke, und die einschließenden Dreyecke alle einander gleich sind. Eine

103. Pyramide ABC, deren Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten, nähmlich ein Kreis ist, wird ein Kegel genannt. Die Gerade CD, welche den Mittelpunct der Grundfläche mit der Spitze verbindet, heißt die Achse, und jede Gerade AC, BC von der Spitze an den Umkreis der Grundfläche gezogen, heißt die Seite des Kegels. Ein Kegel heißt senkrecht, wenn seine Achse auf der Grundfläche senkrecht, und schief, wenn die Achse auf der Grundfläche schief stehet. Pyramiden ACFfca Fig. 100, und Kegel ABFE Fig. 103, heißen abgestutzet oder abgekürzet, wenn ihre Spitzen mit einer zu der Grundfläche parallelen Ebene abgeschnitten sind.

§. 480.

100. Eine Pyramide entsteht, wenn ein Vieleck ABCGF mit dem Puncte A längst einer Geraden AM sich bis M vollkommen parallel fortbeweget, und seine Seiten während dieser Bewegung immer gleichförmig, nähmlich eben so abnehmen, wie die Entfernungen des Punctes A von M.

103. Ein Kegel ABC aber wird erzeuget, wenn ein Kreis AB mit seinem Mittelpuncte längst der Geraden DC sich immer parallel fortbeweget, und wenn sein Durchmesser während dieser Bewegung eben so abnimmt, wie die Entfernung des Mittelpunctes D von dem angenommenen Puncte C. Damit nähmlich bey der Bewegung der Kreisfläche ein Kegel entstehe, so ist erforderlich, daß sich $AB : EF = CD : CG$, oder $DB : GF = CD : CG$ verhalte, wenn der Punct D in G anlanget. Wenn hingegen der Durchmesser der Grundfläche während der Bewegung des Kreises nicht gleichförmig, sondern nach was immer für einem anderen Gesetze abnimmt, so heißt der dadurch erzeugte Körper ein Afterkegel. Eben

so

so wird ein Körper eine Afterpyramide genannt, wenn er aus der parallelen Bewegung eines Vieleckes erzeuget wird, dessen Seiten nicht gleichförmig, sondern nach was immer für einem anderen Gesetze abnehmen. Ein senkrechter Kegel ABC entstehet auch, wenn sich ein rechtwinkeliges Dreyeck CDB um die eine Kathete CD als um eine unbewegliche Achse herumdrehet, bis es wieder in die vorige Lage zurück kommt. Diese Entstehungsart durch die Umdrehung eines Dreyeckes findet bey dem schiefen Kegel nicht statt, weil ein schiefer Kegel nichts anderes ist, als eine senkrechte elliptische (ovale) Pyramide, welche durch eine ebene Fläche nach einer gewissen Richtung schief abgeschnitten ist. Fig. 103.

§. 481.

Eine Kugel oder Sphäre ist ein Körper, der von einer einzigen krummen Fläche dergestalt eingeschlossen ist, daß alle Puncte desselben von einem in dem Körper angenommenen Puncte, welcher daher der Mittelpunct heißt, gleich weit abstehen. Ein solcher Körper entsteht, wenn eine halbe Kreisfläche AEB sich um den Durchmesser AB herumdrehet. Die einschließende krumme Fläche heißt die Kugelfläche, oder die Oberfläche der Kugel. Jede Gerade durch den Mittelpunct beyderseits bis an die Kugelfläche gezogen, wird der Durchmesser der Kugel genannt. Ein Stück deB von einer Kugel durch eine ebene Fläche abgeschnitten heißt ein Kugelabschnitt. Ein solcher Kugelabschnitt wird durch die Umdrehung des halben Kreisabschnittes Bce um seine Höhe erzeuget. Ein Körper dCeBd, der durch die Umdrehung des Kreisausschnittes BCe um den einen Halbmesser CB entsteht, wird ein Kugelausschnitt genannt. Ein Stück DdeE durch zwey parallele Ebenen aus einer Kugel ausgeschnitten, heißt endlich eine Zone; sie wird erzeugt, wenn sich das trapezförmige Stück CEec zwischen zwey parallelen Ordinaten eines Halbkreises um den Durchmesser AB herumdrehet. 104.

§. 482.

Fig. §. 482.

104. **Wenn eine Kugel durch eine ebene Fläche geschnitten wird; so ist der Schnitt jederzeit ein Kreis.**

Wenn der Schnitt DE durch den Mittelpunct der Kugel geführet ist, so ist ganz begreiflich, daß er ein Kreis ist, weil alle Geraden CD, CM, CE, welche aus dem Mittelpuncte C an den Umfang des Schnittes DNEM in der Ebene DE gezogen werden, zugleich Halbmesser eben derselben Kugel, und folglich einander vollkommen gleich sind. Wäre hingegen der Schnitt de nicht durch den Mittelpunct der Kugel geführet, so gedenke man eine Senkrechte Cc aus dem Mittelpuncte der Kugel auf die Ebene de, ziehe durch diesen Punct c mehrere Geraden cm, ce, cn in der Ebene de, und aus den Puncten des Umfanges m, e, n die Halbmesser der Kugel mC, eC, nC bis in den Mittelpunct der Kugel C. Nun sind die Dreyecke mcC, ecC, ncC alle einander vollkommen gleich, weil sie rechtwinkelig sind, und über dieses eine gemeinschaftliche Kathete cC, und gleiche Hypothenusen Cm = Ce = Cn haben. Es ist also auch cm = ce = cn, und folglich der Schnitt dnemd ein Kreis, dessen Mittelpunct c ist.

§. 483.

Es ist leicht einzusehen, daß die Kugelschnitte, welche von dem Mittelpuncte einer und derselben Kugel gleich weit abstehen, einander gleich, daß jene kleiner, welche weiter, und daß jene größer sind, welche weniger von dem Mittelpuncte entfernt sind. Die Kugelschnitte, welche durch den Mittelpunct einer Kugel geführet sind, heißen größte Kreise. Sie sind alle einander vollkommen gleich, weil sie gleiche Halbmesser haben. Jede zwey größten Kreise auf einer und derselben Kugel, welche sich durchschneiden, theilen einander, sowohl in Hinsicht auf ihre Flächen als auch in Hinsicht auf ihre Umkreise, in zwey vollkommen gleiche Theile, weil ihre gemeinschaftliche Durchschnitts- oder Theilungslinie durch die Mittelpuncte beyder Kreise gehet.

§. 484.

§. 484. Fig. 104.

Wenn man durch den Mittelpunct C eines größten Kreises DMEN eine Senkrechte AB zieht, und dieselbe beyderseits bis an die Kugelfläche verlängert; so heißt sie die Achse, und ihre zwey äußersten Puncte A und B werden Pole des Kreises DMN genannt. Der Punct B oder A ist auch zugleich der Pol eines jeden zu EMN parallelen Kreises. Es folgt aus diesem:

I. Jeder Punct eines Umkreises DMEN ist von seinem Pole A gleich weit entfernt. Denn in den rechtwinkeligen Dreyecken ACM, ACE, ACN ist CA = CA, CM = CE = CN; folglich sind diese Dreyecke alle einander gleich, und MA = EA = NA, u. s. w.

II. Wenn ein größter Kreis BMAN durch den Pol B des Kreises DMEN gezogen ist, so steht er auf demselben senkrecht. Denn wenn man auf ihre gemeinschaftliche Durchschnittslinie MN in dem Puncte C zwey Senkrechten, eine in der Ebene MBN und die andere in der Ebene MEN errichtet; so wird dieser Winkel der Neigungswinkel der zwey erwähnten Kreisflächen seyn (468.). Nun aber ist dieser Winkel = 90°, weil BC auf DMEN senkrecht steht; folglich ist auch der Neigungswinkel dieser zwey Kreisflächen = 90°, und die zwey Kreisflächen stehen demnach senkrecht auf einander.

III. Und umgekehrt wenn ein größter Kreis BMA auf einem anderen größten Kreise DME senkrecht steht; so geht er durch den Pol des Kreises DME. Denn man errichte nur aus dem Mittelpuncte C der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie MN in der Ebene des Kreises MB die Senkrechte CB; so steht sie senkrecht auf der Ebene des Kreises DME (469.), und weil sie aus dem Mittelpuncte des Kreises CME gezogen ist; so ist ihr Endpunct B der Pol des Kreises DME. Nun aber geht der Kreis AMB durch den Punct B, weil CB sein Halbmesser ist; folglich geht auch eben dieser Kreis durch den Pol des Kreises DME.

Fig. 104. IV. Der Durchschnitts-Punct B von zwey Bogen größter Kreise BM und BD, die auf einem dritten DME zugleich senkrecht stehen, ist der Pol des Kreises DME oder des Bogens DM. Denn die gemeinschaftliche Durchschnittslinie BCA der Ebenen BDA und BMA steht senkrecht auf der Ebene DME (471.), und geht zugleich durch den Mittelpunct C; folglich ist ihr Endpunct, nähmlich der Durchschnitts-Punct B der zwey Kreisbogen BM und BD der Pol des Kreises DME, oder des Bogens DM.

V. Wenn ein größter Kreis BMAN oder ADBE durch den Pol B eines anderen größten Kreises DMN geführet ist; so ist der Bogen BM oder BD oder BN $= 90°$. Denn der Winkel BCM oder BCD oder BCN ist $= 90°$; es ist aber der Bogen BM das Maß des Winkels BCM, der Bogen BD das Maß des Winkels BCD; und der Bogen BN das Maß des Winkels BCN; folglich ist auch der Bogen BM $= 90°$, BD $= 90°$, BN $= 90°$, u. s. w.

VI. Da nun alle größten Umkreise auf einer und derselben Kugel einander gleich sind, so sind auch ihre vierten Theile, oder die Bogen von $90°$ einander gleich; folglich ist der Bogen BD$=$BM$=$BN, u. s. w. Es ist demnach der Pol eines größten Umkreises auf einer Kugelfläche von einem jeden Puncte des erwähnten Umkreises um $90°$ entfernt.

VII. Nun wird es nicht mehr schwer seyn zu einem auf der Kugelfläche gegebenen größten Umkreise DMEN den dazu gehörigen Pol A oder B zu finden; und auch aus einem angenommenen Pole A einen größten Umkreis DMEN auf einer gegebenen Kugel durch Hülfe des Taster-Zirkels zu ziehen. Das erste geschieht, wenn man aus zwey Puncten M und E des gegebenen größten Umkreises mit einem Halbmesser $MA = EA = \sqrt{(CA^2 + CE^2)} = \sqrt{2(CE)^2} = CE\sqrt{2} = \frac{1}{2}DE\sqrt{2}$ zwey sich in A durchschneidende Bogen auf der Kugelfläche zieht; und das zweyte, wenn man aus dem angenommenen Pole mit eben demselben Halbmesser $\frac{1}{2}DE\sqrt{2}$ einen Umkreis beschreibet.

§. 485.

Fig. 104.

Ein Winkel DBM, BNE, MBE u. s. w. von zwey Bogen größter Kreise auf der Kugelfläche eingeschlossen heißt ein sphärischer Winkel. Ein sphärischer Winkel DBM kommt mit dem Neigungswinkel DCM der zwey größten Kreise DBEA und MBNA in Hinsicht auf seine Größe überein; nun aber wird dieser Neigungswinkel durch den Bogen DM des größten Kreises DMEN gemessen, dessen Pol sich in der Spitze des sphärischen Winkels DBM befindet; es wird also auch ein sphärischer Winkel durch den Bogen eines größten Kreises gemessen, der aus der Spitze als aus einem Pole auf der dazu gehörigen Kugelfläche zwischen den Schenkeln des sphärischen Winkels in der Entfernung von 90° beschrieben wird. Da der Bogen dm des Parallelkreises dmen eben so viele Grade enthält als der aus dem Pole beschriebene Bogen DM des größten Kreises DMEN; so könnte man auch sagen, daß der Bogen dm das Maß des sphärischen Winkels DBM ist; allein es ist schon einmahl gewöhnlich, daß man die spärischen Winkel nur durch die Bogen von größten Umkreisen ausmißt.

Nun ist es leicht einzusehen, daß sphärische Nebenwinkel zusammen 180° enthalten; wie auch das sphärische Scheitelwinkel einander gleich sind: u. s. w.

§. 486.

Wenn zwey Bogen BD und BM von größten Kreisen, die auf einer Kugelfläche durch einen und denselben Punct B gezogen sind, durch einen dritten Bogen DM eines größten Kreises geschnitten werden, ehe sie das zweyte Mahl zusammenstoßen; so entsteht ein krummliniges Dreyeck BDM, welches ein spärisches Dreyeck genannt wird. Es ist demnach ein sphärisches Dreyeck nichts anderes als ein Stück einer Kugelfläche von drey Bogen größter Kreise eingeschlossen. Da nun die Bogen BD und BM, ehe sie noch das zweyte Mahl zusammenstoßen, von einem dritten Bogen müssen geschnitten werden, wenn ein Dreyeck entstehen soll,

Fig. 104. und da diese zwey Bogen in der Entfernung von 180° das zweyte Mahl zusammen stoßen (483.); so folgt, daß in dem Dreyecke BDM jeder der zwey Bogen BD und BM $< 180°$ seyn muß. Eben dieses läßt sich von DB und DM, und auch von MB und MD behaupten. Es ist also jede Seite (oder jeder Bogen) eines sphärischen Dreyeckes $< 180°$. Ein sphärisches Dreyeck heißt rechtwinkelig, wenn es einen, oder mehrere rechte Winkel hat. Das Dreyeck BDM hat zwey rechte Winkel BDM = BMD, weil die Kreise DBEA und BMAN auf DMEN senkrecht stehen. Wenn nun der Bogen $DM = 20°$ ist; so ist auch der Winkel $DBM = 20°$, weil der Bogen DM den Punct B zum Pole hat. Es sind demnach in dieser Voraussetzung alle drey Winkel des sphärischen Dreyeckes BDM zusammen $= 90 + 90 + 20 = 200°$. Der Winkel DBM kann größer und auch kleiner werden, ohne daß die zwey übrigen Winkel des sphärischen Dreyeckes BDM geändert werden. So z. B. enthalten alle drey Winkel in dem sphärischen Dreyecke MBE zusammen $90 + 90 + 160 = 340°$, weil wir $DBM = 20°$, und folglich $MBE = 180 - 20 = 160°$ gesetzet haben. Wir ersehen aus diesem, daß die Anzahl der Grade aller drey Winkel in einem sphärischen Dreyecke veränderlich ist. Man kann demnach bey den sphärischen Dreyecken aus zwey gegebenen Winkeln den dritten nicht bestimmen.

§. 487.

Ein körperlicher Winkel (angulus solidus) ist ein Winkel, der von mehr als zwey geraden Linien eingeschlossen ist, welche alle in einem Puncte zusammen stoßen, und davon je zwey und zwey in einer andern Ebene liegen. So z. B. ist jedes Eck in einem Zimmer, jedes Eck an einem Würfel, jede Spitze an einer Pyramide ein körperlicher Winkel. Ein körperlicher Winkel besteht demnach aus mehr als zwey ebenen Winkeln, welche alle in einem Puncte zusammenstoßen. Alle diese ebenen Winkel zusammen genommen sind dem körperlichen Winkel gleich. Sie müssen alle zusammen weniger als vier rechte Winkel oder 360° enthalten;

weil

weil sie sonst in eine und eben dieselbe Ebene fallen müssen, sobald sie 360° enthalten. Fig. 104.

§. 488.

Regelmäßige Körper werden diejenigen genannt, die von gleichen regelmäßigen Vielecken, und von vollkommen gleichen körperlichen Winkeln eingeschlossen sind. Deren gibt es nur fünf. I. Die dreyeckige gleichseitige Pyramide, die von vier gleichseitigen Dreyecken eingeschlossen ist; sie heißt wegen der vier einschließenden Flächen ein Tetraedrum. Jeder körperliche Winkel an diesem Körper ist $= 3 . 60° = 180°$. II. Der Würfel, Cubus oder das Hexaedrum ist von 6 Quadraten eingeschlossen. Jeder körperliche Winkel desselben enthält $3 . 90° = 270°$. III. Das Oktaedrum ist von acht gleichseitigen Dreyecken eingeschlossen, davon je vier Dreyecke zusammen den körperlichen Winkel machen, der folglich $4 . 60° = 240°$ enthält. Ein Oktaedrum ist nichts anderes als das Doppelte einer viereckigen gleichseitigen Pyramide. IV. Das Dodekaedrum ist von zwölf regelmäßigen Fünfecken eingeschlossen, davon je drey zusammen den körperlichen Winkel machen; und welcher daher $3 . 108 = 324°$ enthält, weil jeder Vieleckswinkel in einem regelmäßigen Fünfecke $= \frac{5 . 180° - 360°}{5} = 108°$ ist. V. Das Ikosaedrum ist in zwanzig gleichseitige Dreyecke eingeschlossen, davon je fünf zusammen den körperlichen Winkel machen, der daher $5 . 60° = 300°$ enthält. Andere regelmäßige Körper gibt es nicht; denn sechs gleichseitige Dreyecke, vier Quadrate, drey regelmäßige Sechsecke, wenn man sie mit ihren Vieleckswinkeln in einem Puncte zusammen fügen wollte um einen körperlichen Winkel zu machen, würden um diesen Punct herum schon 360° enthalten und folglich in einer und eben derselben Ebene liegen. Noch viel weniger würden mehr als vier Quadrate, mehr als drey regelmäßige Fünfecke, mehr als drey regelmäßige Sechsecke dazu taugen; weil sie gar nicht zusammen passen, und folglich keinen körperlichen Winkel einschließen können. Da

Fig. übrigens drey Vieleckswinkel von anderen regelmäßigen Vielecken auch schon über 360° enthalten; so können ne ebenfalls keinen körperlichen Winkel einschließen, und folglich auch keinen Körper allenthalben begrenzen.

II. Abschnitt.

Von der Ausmessung der Oberflächen der Körper.

§. 489.

101. Die Oberfläche eines jeden senkrechten Prisma ABCcba ohne die beyden Grundflächen ist gleich dem Producte aus dem Umfange der Grundfläche multiplicirt mit der Höhe, das ist mit einer Seite des Prisma. Z. B. wenn die Höhe dieses Prisma $= p$ gesetzet wird, so ist die Oberfläche $= (AB + BE + EC + CD + DA) \cdot p$.

Denn diese Oberfläche ist gleich der Summe der Rechtecke $Ba + Eb + Ce + Dc + Ad$; nun aber ist $Ba = AB \cdot Bb = AB \cdot p$, $Eb = BE \cdot Ee = BE \cdot p$, u. s. w.; folglich ist die Summe dieser Rechtecke, das ist die Oberfläche dieses senkrechten Prisma $= AB \cdot p + BE \cdot p + EC \cdot p + \ldots = (AB + BE + EC + \ldots) \cdot p =$ dem Producte aus dem Umfange der einen Grundfläche in die Höhe oder Seite des senkrechten Prisma.

Wäre das Prisma schief, so müßte man ein jedes einschließende Parallelogramm besonders berechnen, und sodann die Flächeninhalte aller einschließenden Parallelogramme zusammen addiren, um die Oberfläche des schiefen Prisma zu erhalten.

§. 490.

Da nun ein senkrechter Cylinder nichts anderes ist, als ein senkrechtes Prisma, dessen Grundflächen Kreise sind; so ist auch die Oberfläche eines senkrechten Cylinders ohne die beyden Grundflächen dem Producte aus dem Umkreise der einen Grundfläche in die Höhe des Cylinders gleich. Das ist, wenn wir den Durchmesser der Grundfläche mit b und die Höhe eines senkrechten Cylinders mit a be-

bezeichnen; so ist seine krumme Oberfläche = abn. Setzen wir die Höhe $a = b =$ dem Durchmesser der Grundfläche des senkrechten Cylinders, so ist sodann seine krumme Oberfläche $= b^2\pi$, und folglich viermahl so groß, als seine Grundfläche, weil diese $= \frac{1}{4}b^2\pi$ ist. Die ganze Oberfläche eines solchen gleichseitigen Cylinders ist endlich $= b^2\pi + \frac{1}{4}b^2\pi + \frac{1}{4}b^2\pi = \frac{3}{2}b^2\pi$. Fig:

Anm. Die Oberfläche eines schief abgestutzten senkrechten Cylinders ist gleich dem halben Producte aus dem Umfange der auf die Achse senkrechten Grundfläche in die Summe der größten und kleinsten Höhe dieses Cylinders. Die Oberfläche aber eines schiefen Cylinders von parallelen Grundflächen ist gleich dem Producte aus dem Umfange des auf die Achse senkrechten Durchschnittes in die Achse des Cylinders. Die Ursache hiervon ist leicht einzusehen, und es wird dem eigenen Nachdenken der Anfänger überlassen, sie abzuleiten. Dessen ungeachtet läßt sich die Oberfläche eines schiefen Cylinders nach den bisher gegebenen Gründen noch nicht berechnen, weil der Umfang des auf die Achse senkrechten Durchschnittes kein Kreis, sondern eine Ellipse ist, wovon weiter unten gehandelt werden wird.

§. 491.

Die Oberfläche einer regelmäßigen Pyramide ist gleich dem halben Producte aus dem Umfange der Grundfläche multipliciret mit der Senkrechten, welche aus der Spitze der Pyramide auf was immer für eine Seite der Grundfläche gezogen wird.

Denn die Oberfläche einer solchen Pyramide besteht aus so vielen gleichschenkeligen einander vollkommen gleichen Dreyecken, als die Grundfläche Seiten hat. Nun ist ein jedes dieser Dreyecke gleich dem halben Producte aus einer Seite der Grundfläche multipliciret mit der Senkrechten, welche von der Spitze der regelmäßigen Pyramide auf was immer für eine Seite der Grundfläche gezogen wird. Es ist also auch die Summe dieser Dreyecke, das ist die Oberfläche der

Fig. Pyramide gleich dem halben Producte aus der Summe aller Seiten, nähmlich aus dem Umfange der Grundfläche multipliciret mit der Senkrechten, welche aus der Spitze der regelmäßigen Pyramide auf was immer für eine Seite der Grundfläche gezogen wird.

§. 492.

Da nun bey einer unregelmäßigen Pyramide die einschließenden Dreyecke ungleich sind; so muß man ein jedes Dreyeck besonders berechnen, und sodann alle diese Dreyecke zusammen addiren um die Oberfläche einer solchen Pyramide zu erhalten.

§. 493.

Ein senkrechter Kegel kann als eine regelmäßige Pyramide angesehen werden (479.). Es ist also auch die Oberfläche eines senkrechten Kegels gleich dem halben Producte aus dem Umkreise der Grundfläche in die Seite des Kegels.

Die Oberfläche eines schiefen Kegels läßt sich nach den bisher gegebenen Gründen noch nicht berechnen.

§. 494.

103. Die Oberfläche eines abgestutzten senkrechten Kegels hingegen läßt sich bestimmen. Sie ist gleich dem Producte aus der halben Summe der Umkreise beyder Grundflächen multipliciret mit der Seite des abgestutzten Kegels; nähmlich es ist die Oberfläche $ABFE = \frac{1}{2}(2DB.\pi + 2GF.\pi) \times BF = (DB + GF)\pi \times BF = (a+b)\,c\pi$, wenn wir $DB = a$, $GF = b$, und $BF = c$ setzen.

Denn die Oberfläche ABFE ist = der Oberfläche ABC — der Oberfläche EFC; nun aber ist die Oberfläche $ABC = a\pi . BC = a\pi . (BF + FC) = a\pi . (c + FC) = a\pi . (c + \frac{bc}{a-b})$, weil BP $(a - b :$ BF $(c =$ FG $(b :$ FC $= \frac{bc}{a-b}$ statt findet. Und die Oberfläche EFC

ist

ist $= b\pi \times FC = b\pi \cdot \frac{bc}{a-b}$. Folglich ist die Oberfläche Fig. 103.

$$ABFE = a\pi \cdot (c + \frac{bc}{a-b}) - b\pi \cdot \frac{bc}{a-b} = (a+b)\,c\pi =$$

$$BF \times (BD + GF)\,\pi = \tfrac{1}{2}\,(2DB \cdot \pi + 2GF \cdot \pi) \cdot BF.$$

§. 495.

Nun ist $(a+b) = BD + GF = 2 \cdot QN = MN$, wenn BF in N in zwey gleiche Theile getheilet, und MN parallel zu AB oder zu EF gezogen wird; es ist also auch die Oberfläche eines gestutzten senkrechten Kegels $ABFE = 2QN \cdot c\pi = 2QN\,\pi \cdot c = MN \cdot \pi \times BF =$ dem Umkreise von MN multipliciret mit der Seite BF.

Es ist leicht einzusehen, daß in der angenommenen Voraussetzung $2QN = DB + GF$, nähmlich $QN = \frac{DB+GF}{2}$ ist. Denn es ist $QN = QR + RN = GF + \frac{1}{2}PB$, weil folgende Proportion $FB : FN = 2 : 1 = PB : RN = \frac{1}{2}PB$ statt findet. Es ist aber $\frac{1}{2}PB = \frac{1}{2}(DB - DP) = \frac{1}{2}(DB - GF)$; folglich ist auch $QN = GF + \frac{1}{2}(DB - GF) = \frac{DB+GF}{2}$.

§. 496.

Die Oberfläche 1) einer Zone, 2) eines Kugelabschnittes, und 3) der ganzen Kugel ist gleich der Oberfläche eines Cylinders, welcher einen größten Durchschnitt der Kugel zur Grundfläche, und in 1) die Höhe der Zone, in 2) die Höhe des Kugelabschnittes, und in 3) den Durchmesser der Kugel zur Höhe hat. Oder welches einerley ist: Die Oberfläche a) einer Zone, b) eines Kugelabschnittes, und c) der ganzen Kugel ist gleich dem Producte aus dem Umfange eines größten Kreises der Kugel multipiciret in a) mit der Höhe der Zone, in b) mit der Höhe des Kugelabschnittes, und in c) mit dem Durchmesser der Kugel. 105.

Fig. 105. Um diese Wahrheiten einzusehen sey BMAC der vierte Theil eines größten Kreises der Kugel, BCAF ein Quadrat auf dem Halbmesser BC $= a$. Man setze ein beliebiges Stück des Halbmessers AC, nähmlich PN $= b$, und $Pp = \frac{b}{n}$; man theile ferner Pp in dem Puncte G in zwey gleiche Theile, und führe durch die Puncte P, G, p und N zu CB die Parallelen PD, GM, pb und NR. Dann errichte man in dem Puncte M die Tangente Qm, mache $mn = Pp$ parallel zu AC, und ziehe an den Berührungspunct M den Halbmesser MC. Dadurch entstehen zwey ähnliche Dreyecke CMG und Qmn, weil die Seiten derselben wechselsweise auf einander senkrecht stehen (383.). Daher ist $Qm : mn = MC : MG = 2MC.\pi : 2MG.\pi$, und $Qm \times 2MG.\pi = mn \times 2MC.\pi = mn \times 2a.\pi$.. (A). Drehet sich die ganze Figur um die unbewegliche Achse AC, so wird die Fläche des Quadranten BAC die Halbkugel, das Stück NLEPN des Quadranten eine Zone, das Trapez QpPm einen abgekürzten Kegel, das Quadrat BCAF und die Rechtecke RNPD, bpPD werden gerade Cylinder beschreiben, welche alle eine größte Durchschnittsfläche der Kugel zur Grundfläche haben. Die Oberfläche des entstandenen abgekürzten Kegels ist $= Qm \times 2MG.\pi$ (vermöge 495.). Die Oberfläche des durch die Umdrehung von bpPD entstandenen Cylinders ist $= mn \times 2PD.\pi = mn \times 2a.\pi$. Da nun $Qm \times 2MG.\pi = mn \times 2a.\pi$ ist (A); so sind auch diese beyden Oberflächen einander gleich. Ist nun Pp ein unendlich kleiner Theil von NP, das heißt, ist $n = \infty$; so fallen der unendlich kleine Bogen hE und die Tangente Qm über einander. Daher ist die Oberfläche der durch hpPE entstandenen unendlich kleinen Zone der Oberfläche des abgestutzten Kegels, und also auch der Oberfläche des durch bpPD entstandenen Cylinders gleich; des Cylinders nähmlich, welcher einen größten Kreis der Kugel zur Grundfläche, und die unendlich kleine Höhe mn zur Höhe hat. Dieser Schluß gilt von einem jeden unendlich kleinen Theil-

chen

chen Pp der Höhe PN, man mag es auf derselben wo immer abschneiden. Folglich ist die Summe der Oberflächen aller der zwischen P und N enthaltenen unendlich kleinen Zonen der Summe der Oberflächen der zwischen P und N enthaltenen unendlich kleinen Cylinder gleich. Es ist aber die Summe der Oberflächen aller unendlich kleinen Zonen die Oberfläche der durch die Umdrehung von LNPE entstandenen Zone, und die Summe der Oberflächen aller unendlich kleinen Cylinder ist die Oberfläche des durch RNPD entstandenen Cylinders; folglich sind diese beyden Oberflächen einander gleich; das heißt, die Oberfläche einer Zone ist gleich der Oberfläche eines Cylinders, welcher eine größte Durchschnittsfläche der Kugel zur Grundfläche, und die Höhe der Zone zur Höhe hat. Fig. 105.

Je näher der Punct P der Oberfläche kommt, desto mehr nähert sich die oben genannte Zone einem Kugelabschnitte; und fällt der Punct P in A, so geht die Zone in denjenigen Kugelabschnitt über, welcher durch die Umdrehung des halben Kreisabschnittes LNA entsteht. Es ist also auch die Oberfläche eines Kugelabschnittes gleich der Oberfläche eines Cylinders, welcher eben dieselbe Höhe, und den größten Durchschnitt der Kugel zur Grundfläche hat. Setzen wir die Höhe des Kugelabschnittes $= c$, so ist dessen Oberfläche $= 2a\pi \times c$. Die Halbkugel ist ein Kugelabschnitt, welcher den Halbmesser der Kugel zur Höhe hat; es ist also deren Oberfläche $= 2a\pi \times a$. Folglich ist die Oberfläche der ganzen Kugel $= 2a\pi \times 2a$. Die Oberfläche der Kugel ist demnach gleich der Oberfläche eines Cylinders, welcher die größte Durchschnittsfläche der Kugel zur Grundfläche, und den Durchmesser derselben zur Höhe hat: oder welches einerley ist, sie ist gleich dem Producte aus dem Umfange eines größten Kreises in den Durchmesser der Kugel.

§. 497.

Aus diesem aufgestellten Satze kann man folgern:

1. Daß die Kugelfläche viermahl so groß ist, als der Flächeninhalt eines dazu gehörigen größten Kreises.

Denn

Fig. Denn es sey der Halbmesser einer Kugel $= a$; so ist ein dazu gehöriger größter Umkreis $= 2a\pi$, und folglich ist die Kugelfläche $= 2a\pi \cdot 2a = 4a^2\pi$; der Flächeninhalt eines dazu gehörigen größten Kreises hingegen ist nur $2a\pi \cdot \frac{1}{2}a = a^2\pi$.

II. Daß die Kugelfläche der krummen Oberfläche eines herumbeschriebenen gleichseitigen Cylinders gleich ist. Denn der herumbeschriebene gleichseitige Cylinder hat eine größte Durchschnittsfläche der Kugel zur Grundfläche, und den Durchmesser derselben zur Höhe.

III. Daß die Kugelflächen sich gegen einander verhalten wie die Quadrate der Halbmesser, wie die Quadrate der Durchmesser, u. s. w. Denn es sey der Halbmesser einer Kugel $= a$, die Oberfläche derselben $= s$, der Halbmesser einer anderen Kugel $= A$, die Oberfläche derselben $= S$; so ist $s = 4a^2\pi$, und $S = 4A^2\pi$; folglich ist auch $s : S = 4a^2\pi : 4A^2\pi = 4a^2 : 4A^2 = a^2 : A^2$.

106. IV. Daß die Kugelfläche, die ganze Oberfläche des herumbeschriebenen Cylinders, und die ganze Oberfläche des herumbeschriebenen gleichseitigen Kegels sich gegen einander verhalten, wie 4 : 6 : 9: Denn es sey der Halbmesser der Kugel $CK = a$; so ist die Kugelfläche $= 4a^2\pi$, die ganze Oberfläche des Cylinders $= 4a^2\pi + a^2\pi + a^2\pi = 6a^2\pi$, und die ganze Oberfläche des herumbeschriebenen gleichseitigen Kegels $= \frac{1}{2}\,IL.\pi \times ID + IL.\pi \times \frac{1}{4}IL = \frac{1}{2}ID.\pi \times ID + ID.\pi \times \frac{1}{4}ID = \frac{3}{4}ID^2.\pi = 9a^2\pi$; weil $DK = DE + EC + CK = a + a + a = 3a$, und $ID^2 = DK^2 + IK^2 = DK^2 + \frac{1}{4}IL^2 = DK^2 + \frac{1}{4}ID^2$, nähmlich $ID^2 = \frac{4}{3}DK^2 = \frac{4}{3}\ 9a^2 = 12a^2$ ist, und endlich ist $\frac{3}{4}ID^2.\pi = \frac{3}{4}.12a^2.\pi = 9a^2\pi$. Folglich verhält sich die Kugelfläche zur ganzen Oberfläche des herumbeschriebenen Cylinders, zur ganzen Oberfläche des herumbeschriebenen gleichseitigen Kegels, gleichwie $4a^2\pi : 6a^2\pi : 9a^2\pi = 4 : 6 : 9$.

§. 498.

Eben so läßt sich erweisen, daß die Kugelfläche, die ganze Oberfläche des eingeschriebenen gleichseitigen Cylinders,

und

und die ganze Oberfläche des eingeschriebenen gleichseitigen Kegels sich gegen einander verhalten wie 16 : 12 : 9. Fig. 106.

§. 499.

Daß die Oberfläche einer Zone dem Producte aus einem größten Umkreise in die Höhe, die halbe Kugelfläche dem Producte aus dem größten Umkreise in den Halbmesser, die ganze Kugelfläche dem Producte aus dem größten Umkreise in den Durchmesser, und die Oberfläche eines Kugelabschnittes dem Producte aus einem größten Umkreise der dazu gehörigen Kugel in die Höhe des Kugelabschnittes gleich ist; läßt sich auch durch die Summirung der Elemente auf folgende Art erweisen.

Es sey DAPND der Durchschnitt oder Erzeugungskreis einer Kugel; ein Stück $CM = x$ des Halbmessers $= a$ sey in unendlich viele und gleiche Theile getheilet; und aus den Theilungspuncten gedenke man die senkrechten Ordinaten CA, cd, ef....qr, MB bis an den Umkreis gezogen; so sind die Elemente der Kugelfläche die unendlich kleinen Zonen, welche bey der Umdrehung durch die unendlich kleinen Bogen Ad, df....rB erzeuget werden. Diese Elemente von AC bis BM zusammengezählet oder summiret, geben die krumme Oberfläche der Zone, welche durch den Bogen AB erzeuget wird. Das letzte, oder allgemeine Glied in dieser Reihe der Elemente ist die Oberfläche der Zone, welche durch den unendlich kleinen Bogen rB beschrieben wird. Es ist aber (494.) diese Oberfläche $=$ $rB \times (MB + qr)\pi$, (weil man rB für eine gerade Linie, und die unendlich kleine Zone für einen abgestutzten Kegel ansehen kann), das ist, diese Oberfläche ist $= rB \times [V(CB^2 - CM^2) + V(CB^2 - (CM - qM)^2)].\pi = rB \times [V(a^2 - x^2) + V(a^2 - (x - \frac{x}{\infty})^2)].\pi = rB \times 2V(a^2 - x^2).\pi =$ dem Elemente des Bogens multipliciret mit dem Umkreise der dazu gehörigen Ordinate MB. Ferner findet wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke CBM und rBp folgende Proportion statt; Fig. 87.

MB

Fig. 87. MB : BC = Bp oder Mq : rB, nähmlich $\sqrt{(a^2 - x^2)} : a = \frac{x}{\infty} : rB = \frac{ax}{\infty \sqrt{(a^2 - x^2)}}$; folglich ist eben dieselbe Oberfläche des Elementes $= rB \times [2 \sqrt{(a^2 - x^2)}] . \pi = \frac{ax}{\infty \sqrt{(a^2 - x^2)}} \times 2 \sqrt{(a^2 - x^2)} . \pi = 2a\pi . \frac{x}{\infty}$. Eben so kann man erweisen, daß die Oberfläche eines jeden der übrigen Elemente $= 2a\pi . \frac{x}{\infty}$ ist. Es ist demnach die Summe der Oberflächen aller dieser Elemente, nähmlich die Oberfläche der Zone, welche durch den Bogen AB erzeuget wird,

$$= 2a\pi . \frac{x}{\infty} + 2a\pi . \frac{x}{\infty} + 2a\pi . \frac{x}{\infty} + 2a\pi . \frac{x}{\infty} + \ldots =$$

$$\infty \times 2a\pi . \frac{x}{\infty} = 2a\pi . x =$$ dem größten Umkreise $2a\pi$ der Kugel multipliciret mit der Höhe x der Zone. Setzen wir nun $x = a$, so ist die halbe Kugelfläche $= 2a\pi . a = 2a^2\pi$, und folglich die ganze Kugelfläche $= 2a\pi . 2a =$ dem größten Umkreise multipliciret mit dem Durchmesser; wie oben (§. 496.).

§. 500.

104. Wenn man sich einbildet, das ein größter Umkreis DMEN in n gleiche Theile getheilet sey, und daß durch diese Theilungspuncte und durch die Pole A und B größte Kreise gezogen werden; so wird dadurch die ganze Kugelfläche in n Theile getheilet, die alle einander vollkommen gleich seyn müssen, weil sie alle auf eine gleiche Art bestimmet sind. Es seyen nun D und M zwey von diesen Theilungspuncten, nähmlich es sey der Bogen $DM = \frac{DMEND}{n}$; so ist die Fläche ADBMA = dem $n$ten Theile der ganzen Kugelfläche $= \frac{DMEND \times AB}{n} = \frac{DMEND}{n} \times AB =$

DM

DM $\times$ AB, wenn wir DM statt $\frac{DMEND}{n}$ substituiren; Fig. 104.

das ist, ein Stück der Kugelfläche von zwey größten Halbkreisen BDA und BMA eingeschlossen ist gleich dem Producte aus dem Durchmesser AB in den Bogen DM des größten Kreises, der aus der Spitze B oder A beschrieben wird. Da nun dieser Bogen den sphärischen Winkel B oder A mißt; so kann man auch sagen, daß ein Stück der Kugelfläche von zwey größten Halbkreisen eingeschlossen gleich ist dem Producte aus dem Durchmesser der Kugel multipliciret mit dem Längenmaße des sphärischen Winkels, welchen die zwey Halbkreise einschließen.

III. Abschnitt.

Von der Ausmessung des Cubikinhaltes der Körper.

§. 501.

Der Cubikinhalt (volumen) eines Körpers ist nichts anderes, als die Größe der Ausdehnung, die von der ganzen Oberfläche des Körpers eingeschlossen wird. Zwey Kugeln von gleichen Durchmessern, die eine von Bley, die andere von Eisen, haben gleiche Cubikinhalte, obschon ihre Massen (massae) das ist die Menge der Materie, und auch ihre Gewichte verschieden sind.

§. 502.

Der Cubikinhalt eines Körpers wird ausgemessen, wenn man untersuchet, wie oft ein bekannter für die Einheit angenommener Körper in demselben enthalten ist; das ist, wenn man untersuchet, wie oft sich der bekannte für die Einheit angenommene Körper in dem auszumessenden herumlegen lasse. Die Zahl nun, welche dieses anzeiget, bestimmet den Cubikinhalt des auszumessenden Körpers. Der für die Einheit angenommene Körper, mit dem andere Körper ausgemessen werden, ist gemeiniglich ein Würfel, oder

Cu-

Fig. Cubus, dessen Seite bald einen Zoll, bald einen Schuh, bald eine Klafter, zuweilen auch eine Meile beträgt; und der sodann in Hinsicht auf die Seite Cubik-Zoll, Cubik-Schuh, Cubik-Klafter u. s. w. genannt wird.

§. 503.

107. Wenn die Seite des für die Einheit angenommenen Würfels m in der Länge AB der Grundfläche eines senkrechten Parallelepipedums $a$mahl (z. B. 5mahl), in der Breite AD der Grundfläche $b$mahl (4mahl), und in der Höhe AF oder BC oder DE des Parallelepipedums $c$mahl (z. B. 3mahl) enthalten ist; so ist der Cubikinhalt desselben $= a \cdot b \cdot c \times m = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot m = 60\,m$.

Denn man theile nur die Länge AB in a, die Breite AD der Grnudfläche in b, und die Höhe AF des senkrechten Parallelepipedums in c gleiche Theile, wenn die Seite des für die Einheit angenommenen Würfels m in AB $a$mahl, in AD $b$mahl, und in AF $c$mahl enthalten ist, und lege sodann in Gedanken parallele Ebenen; erstlich zur Seitenfläche AE durch die Theilungspuncte der Geraden AB, dann zur Seitenfläche AC durch die Theilungspuncte der Geraden AD, endlich zu der Grundfläche DB durch die Theilungspuncte der Geraden AF; so wird dadurch der Cubikinhalt dieses Parallelepipedums in lauter vollkommen gleiche Würfel zertheilet. Die Anzahl dieser Würfel ist $= a \cdot b \cdot c$, weil jede Schichte deren $a \cdot b$ enthält, und c solcher Schichten über einander liegen. Es ist ein jeder von diesen Würfeln z. B. $G = m$, weil sie vollkommen auf eine und dieselbe Weise bestimmet sind. Es ist also auch $a \cdot b \cdot c \times G = a \cdot b \cdot c \times m$. Es ist aber $a \cdot b \cdot c \times G =$ dem Cubikinhalte des Parallelepipedums AG; folglich ist auch $a \cdot b \cdot c \times m =$ dem Cubikinhalte eben desselben Parallelepipedums. Setzet man z. B. $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$; so ist in diesem Falle der Cubikinhalt dieses Parallelepipedums $= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot m = 60\,m$.

§. 504.

Fig. 107.

Setzet man die Seite des für die Einheit angenommenen Würfels $= s$, so ist $AB = a.s$, $AD = b.s$, und $AF = c.s$, nähmlich $\frac{AB}{s} = a$, $\frac{AD}{s} = b$, und $\frac{AF}{s} = c$, weil vermöge der Voraussetzung s in AB $a$mahl, in AD $b$mahl, und in AF $c$mahl enthalten ist. Es ist demnach auch der Cubik-Inhalt des senkrechten Parallelepipedums $AG = \frac{AB}{s} . \frac{AD}{s} . \frac{AF}{s} \times m = \frac{AB.AD.AF}{s^3} \times m$, wenn man für die Größen a, b, und c ihre Werthe fustituiret. Setzet man ferner $s = 1$ z. B. $= 1$ Schuhe, so ist $m = 1$ Cubik-Schuhe, und der Cubik-Inhalt des Parallelepipedums $AG =$ AB . AD . AF Cubik-Schuhen; das ist: der Cubik-Inhalt eines senkrechten Parallelepipedums ist gleich dem Producte aus seinen drey Abmessungen, wenn man nähmlich seine Länge, Breite und Höhe mit einander multipliciret. Da über dieß AB . AD = der Grundfläche BD ist; so kann man auch sagen, daß der Cubik-Inhalt eines senkrechten Parallelepipedums gleich ist dem Producte aus der Grundfläche BD multipliciret mit der Höhe AF, allwo für die Einheit ein Würfel auf derjenigen Linie genommen werden muß, mit der die Länge, Breite und Höhe des Parallelepipedums ausgemessen sind.

§. 505.

Da nun ein jeder Würfel nichts anderes ist, als ein senkrechtes Parallelepipedum, bey dem alle drey Abmessungen einander gleich sind; so ist der Cubik-Inhalt eines jeden Würfels = einer Abmessung, nähmlich einer Seite desselben, dreymahl durch die Multiplication angesetzet. Ein Würfel z. B., dessen Seite 6 Schuhe beträgt, das ist, eine Cubik-Klafter ist $= 6.6.6 = 6^3 = 216$ Cubik-Schuhen; ein Würfel dessen Seite 12 Zolle beträgt, nähmlich ein Cubik-Schuh ist $= (12)^3 = 1728$ Cubik-

Zol-

Fig. Zollen; ein Cubik-Zoll ist = $(12)^3$ = 1728 Cubik-Linien, u. s. w.

§. 506.

Sind die Abmessungen eines senkrechten Parallelepipedums in Klaftern, Schuhen und Zollen ausgedrucket, so muß man alle diese Größen in Zolle verwandeln, wenn die Zolle die kleinste gegebene Gattung seyn sollten, damit alle drey Abmessungen mit einer und derselben Einheit gemessen werden; und sodann muß man diese drey Zahlen mit einander multipliciren um den Cubik-Inhalt in Cubik-Zollen zu erhalten. Dieser Ausdruck wird sodann in Cubik-Klaftern und Cubik-Schuhe verwandelt, wenn man ihn durch 1728 . 216 = 373248, und den Ueberrest durch 1728 dividiret.

Man wird gemeiniglich mit der Rechnung geschwinder fertig, wenn man die Größen der kleineren Gattung als Brüche von der größeren Gattung vorstellet (92.), und sodann die Multiplication (nach 89.) verrichtet. Es sey. z. B. die Länge der Grundfläche eines senkrechten Parallelepipedums = $7^\circ\ 3^\prime$, die Breite = $2^\circ\ 4^\prime$, und die Höhe = $0^\circ\ 5^\prime\ 9^{\prime\prime}$; nun ist $7^\circ\ 3^\prime = \frac{15^\circ}{2}$, $2^\circ\ 4^\prime = \frac{8^\circ}{3}$, und $0^\circ\ 5^\prime\ 9^{\prime\prime} = \frac{23}{24}{}^\circ$; folglich ist der Cubik-Inhalt dieses Parallelepipedums $= \frac{15}{2} . \frac{8}{3} . \frac{23}{24} = \frac{5}{2} . 1 . \frac{23}{3} = \frac{115}{6} = 19\frac{1}{6}$

Cubik-Klaftern = 19 Cb° und $\frac{1 . 216}{6}$ Cubik-Schuhen = 19 Cb° und 36 Cb′.

§. 507.

Eben dieselben practischen Meßkünstler, welche die Quadrat-Klafter in 6 Klafterschuhe (oder Riemenschuhe) abtheilen (437.), pflegen auch die Cubik-Klafter in 6 Cubik-Klafterschuhe, einen Cubik-Klafterschuh in 12

Cubik-

Cubik-Klafterzolle, einen Cubik-Klafterzoll in 12 Cubik-Klafterlinien u. s. w. zu zertheilen. Fig.

Ein Cubik-Klafterschuh (Cbkl^{I}) ist nähmlich ein senkrechtes Parallelepipedum von der Grundfläche = 1 □° und Höhe = 1^{I}; ein Cubik-Klafterzoll (Cbkl^{II}) ist ein senkrechtes Parallelepipedum von der Grundfläche = 1 □° und Höhe = 1^{II}; eine Cubik-Klafterlinie (Cbkl^{III}) ist ein senkrechtes Parallelepipedum von der Grundfläche = 1 □° und Höhe = 1^{III}; u. s. w.

Es ist demnach vermöge dieser Eintheilung, Benennung und Bezeichnung.

1 Cbkl^{I} = $\frac{1}{6}$ Cb° = 36 Cb^{I};
1 Cbkl^{II} = $\frac{1}{12}$ Cbkl^{I} = 3 Cb^{I};
1 Cbkl^{III} = $\frac{1}{12}$ Cbkl^{II} = $\frac{1}{4}$ Cb^{I} = 432 Cb^{IV};
1 Cbkl^{IV} = $\frac{1}{12}$ Cbkl^{III} = 36 Cb^{II};
1 Cbkl^{V} = $\frac{1}{12}$ Cbkl^{IV} = 3 Cb^{II};
1 Cbkl^{VI} = $\frac{1}{12}$ Cbkl^{V} = $\frac{1}{4}$ Cb^{II} = 432 Cb^{III}.

Und

1 Cb^{I} = $\frac{1}{36}$ Cbkl^{I} = $\frac{1}{3}$ Cbkl^{II} = 4 Cbkl^{III};
1 Cb^{II} = $\frac{1}{36}$ Cbkl^{IV} = $\frac{1}{3}$ Cbkl^{V} = 4 Cbkl^{VI};
1 Cb^{III} = $\frac{1}{36}$ Cbkl^{VII} = $\frac{1}{3}$ Cbkl^{VIII} = 4 Cbkl^{IX}; u. s. w.

Nach dieser Eintheilung und Benennung enthält nun das vorerwähnte Parallelepipedum einen Cubikinhalt von 19Cb° 1Cbkl^{I}.

Die Ausrechnung des Cubikinhaltes eines senkrechten Parallelepipedums in Cb°, in Cbkl^{I}, Cbkl^{II}, Cbkl.^{III}, u. s. w. wenn die Abmessungen in Klaftern, Schuhen, Zollen, Linien u. s. w gegeben sind, wird sehr bequem durch den (im §. 437.) angeführten Rechnungsvortheil verrichtet z. B.

Fig.

Länge =	3°	0ᴵ	4ᴵᴵ	
Breite =	0	5	3	
	0	15	0	40
			9	0	24.
Grundfläche =	2	4	0	6
Dicke =	0	4	6	—
	0	8	32	0	48
			12	48	0	72.
Cubikinhalt =	2	0	0	4	6.

nähmlich = 2Cb° ,0Cbkl^{I}, 0Cbkl^{II}, 4Cbkl^{III}, 6Cbkl^{IV}.

Bey der Multiplication der in Q°, Qkl^{I}, Qkl^{II} ꝛc. ausgedruckten Grundfläche mit der in Klaftern, Schuhen, Zollen gegebenen Dicke werden eben so wie (§. 437.) diejenigen Partial-Producte verdoppelt, bey welchen keiner der Factoren ganze Klaftern bedeutet. Die in der angeführten Ordnung niedergeschriebenen Partial-Producte werden sodann rechts angefangen Colonenweise zusammen addiret, und durch die bekannten Reductions-Zahlen auf größere Benennungen gebracht.

Daß dieser Rechnungsvortheil richtig ist, erhellet aus folgender Betrachtung. Bey der Multiplication der Grundfläche $= AQ^{\circ} + BQkl^{I} + CQkl^{II}$ mit der Höhe oder Dicke des Parallelepipedums $= a^{\bullet} + b^{I} + c^{II}$ sind die einfachen Producte $a^{\circ} \times AQ^{\circ} = aACb^{\circ}$, $a^{\circ} \times BQkl^{I} = aBCbkl^{I}$, $a^{\circ} \times CQkl^{II} = aCCbkl^{II}$, $b^{I} \times AQ^{\circ} = bACbkl^{I}$, $c^{II} \times AQ^{\circ} = cACbkl^{II}$. Hingegen sind $b^{I} \times BQkl^{I} = b^{I} \times 6BQ^{I} = 6bBCb^{I} = 2bBCbkl^{II}$ wegen $1Cb^{I} = \frac{1}{3}\,Cbkl^{II}$. Eben so sind $b^{I} \times CQkl^{II} = 12b^{II} \times 72CQ^{II} = 864bCCb^{II} = 2bCCbkl^{III}$, weil $1Qkl^{II} = 72Q^{II}$ (vermöge §. 437.), und $1Cb^{II} = \frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2}\,Cbkl^{III}$ wegen der oben angeführten Gleichungen ist.

Vermittelst eben dieser Gleichungen ist es sehr leicht einen in Cbkl^{I}, Cbkl^{II}, Cbkl^{III} ꝛc. gegebenen körperlichen Inhalt in Cb^{I}, Cb^{II}, Cb^{III} und umgekehrt zu verwandeln.

Wenn

Wenn man zur Ausmessung des körperlichen Inhaltes den Cubik-Schuh für die Einheit annimmt, und denselben in 12 Cubik-Schuhzolle, den Cubik-Schuhzoll, in 12 Cubik-Schuhlinien 2c. eintheilet; so wird die Berechnung eben so geführet, wie es (im §. 437. II.) gezeiget worden ist. Fig.

Eben so wie bey der Berechnung der Flächen kann man sich hier folgender Tabelle bedienen, um in der wirklichen Ausübung Cubik-Klafterschuhe, Cubik-Klafterzolle, u. s w. wie auch Cubik-Schuhzolle, Cubik-Schublinien u. s. w. nähmlich um Schichten-Maß in Cubik-Maß, und umgekehrt, zu verwandeln.

Schichten-Maß	Cubik-Maß.	Schichten-Maß	Cubik-Maß.	Cubik-Maß.	Schichten-Maß.
1 Cbkl^{I}	36 Cb^{I}	1 CSch^{II}	144 Cb^{II}	1 Cb^{I}	4 Cbkl^{III}
1 Cbkl^{II}	3 Cb^{I}	1 CSch^{III}	12 Cb^{II}	1 Cb^{II}	4 Cbkl^{VI}
1 Cbkl^{III}	432 Cb^{II}	1 CSch^{IV}	1 Cb^{III}	1 Cb^{III}	4 Cbkl^{IX}
1 Cbkl^{IV}	36 Cb^{II}	1 CSch^{V}	144 Cb^{III}	1 Cb^{IV}	4 Cbkl^{XII}
1 Cbkl^{V}	3 Cb^{II}	1 CSch^{VI}	12 Cb^{III}	1 Cb^{V}	4 Cbkl^{XV}
1 Cbkl^{VI}	432 Cb^{III}	1 CbS^{VII}	1 Cb^{III}	1 Cb^{II}	1 CSch^{IV}
1 Cbkl^{VII}	36 Cb^{III}	1 CS^{VIII}	144 Cb^{IV}	1 Cb^{III}	1 CbS^{VI}
1 Cbkl^{VIII}	3 Cb^{III}	1 CSch^{IX}	12 Cb^{IV}	1 Cb^{IV}	1 CSch^{X}
1 Cbkl^{IX}	432 Cb^{IV}	1 CSch^{X}	1 Cb^{IV}	1 Cb^{V}	1 CS^{XIII}

§. 508.

Fig. 108. Zwey Parallelepipeden DFGA und EFHA von vollkommen gleichen Grundflächen und von gleichen Höhen sind am Cubik-Inhalte einander gleich, sie mögen noch so verschieden geneigt seyn, wenn sie nur also beschaffen sind, daß sie genau zwischen zwey parallelen Seitenebenen BCA und GER stehen, wenn sie mit ihren gleichen Grundflächen gehörig über einander gestellet werden.

Denn es ist in diesem Falle, wenn man durch die oberen Grundflächen BD und CE eine Ebene leget, das dreyseitige Prisma GFH = DAE (weil diese zwey Prismen vollkommen auf einerley Art bestimmt sind); es ist also auch GFH — DPH = DAE — DPH, oder GFPQD = EAPQH, und auch GFPQD + FPQSR = EAPQH + FPQSR, nähmlich es ist am Cubikinhalte das Parallelepipedum DFGA = EFHA.

§. 509.

Fig. 109. Zwey Parallelepipeden AB und AC von vollkommen gleichen Grundflächen und Höhen sind auch noch am Cubikinhalte gleich, wenn sie schon nicht also beschaffen sind, daß sie genau zwischen zwey parallelen Seitenebenen liegen, wenn sie mit ihren gleichen Grundflächen gehörig über einander gestellet werden.

Denn man bilde sich nur ein, daß zwey solche Parallelepipeden AB und AC mit ihren vollkommen gleichen Grundflächen gehörig auf einander gestellet, und bey einem jeden, zwey entgegengesetzte Seitenflächen, wie auch die oberen Grundflächen genugsam erweitert werden; so wird dadurch ein drittes Parallelepipedum AD von eben derselben Grundfläche und von gleicher Höhe zum Vorschein kommen. Nun ist vermöge des Vorhergehenden das Parallelepipedum AB = AD, und auch AC = AD (weil jedes dieser zwey Parallelepipeden AB und AC mit AD eben dieselbe Grundfläche und eine gleiche Höhe hat, und genau zwischen zwey

pa-

parallelen Seitenebenen steht): es ist also auch am Cubikin- Fig.
halte das Parallelepipedum AB = AC. 109.

§. 510.

Es folgt aus diesem, daß am Cubikinhalte ein wie immer schief stehendes Parallelepipedum einem senkrechten Parallelepipedum von gleicher Grundfläche und Höhe gleich ist. Es ist aber der Cubikinhalt eines senkrechten Parallelepipedums dem Producte aus der Grundfläche in die Höhe gleich (504.); folglich ist auch der Cubikinhalt eines schiefstehenden Parallelepipedums dem Producte aus der Grundfläche in die Höhe gleich.

§. 511.

Der Cubikinhalt eines jeden dreyseitigen Prisma 110.
ABF ist gleich seiner dreyseitigen Grundfläche ABC multipliciret mit der Höhe des Prisma DP.

Denn man lege nur durch die Gerade BE zur Seitenfläche AF eine parallele Ebene BG, durch die Gerade CF zur Seitenfläche AE eine parallele Ebene CG, und erweitere die Grundflächen ABC, DEF; so ist das Prisma ABF = BCG, weil beyde Prismen vollkommen auf eine und dieselbe Art bestimmet sind. Nun ist ABF + BCG = dem Parallelepipedum ABHGD; folglich ist auch ABF + ABF = ABHGD, nähmlich es ist $ABF = \frac{ABHGD}{2}$. Es ist aber $ABHGD = ABHC \times DP = 2ABC \times DP$; folglich ist $ABF = \frac{2ABC \times DP}{2} = ABC \times DP$; nähmlich der Cubikinhalt eines dreyseitigen Prisma ABF ist gleich der dreyseitigen Grundfläche ABC multipliciret mit der Höhe DP des Prisma, es möge dieses Prisma senkrecht oder schiefstehend seyn.

§. 512.

Der Cubikinhalt eines jeden vielseitigen Pris- 101.
ma ist gleich dem Producte aus seiner Grundfläche in

Fig. die Höhe; nähmlich es ist ABCdb = ABECD × *P*, wenn
101. wir die Höhe dieses Prisma = *P* setzen.

Denn man zertheile nur die zwey entgegengesetzten vieleckigen Grundflächen durch gleichnahmige Diagonalen in lauter Dreyecke, und lege durch diese parallelen Diagonalen die Ebenen Ac, Ae; so ist ABCdb = AaeEB + AaeECc + AacCd = AEB × *P* + AEC × *P* + ACD × *P* = (AEB + AEC + ACD). *P* = ABECD × *P*.

Es folgt aus diesem, daß Prismen von gleichen Höhen am Cubikinhalte einander gleich seyn müssen, wenn nur ihre Grundflächen einander am Flächeninhalte gleich sind, wenn sie schon aus Vielecken von verschiedener Gattung bestehen, und wie immer schiefstehend sind.

§. 513.

Da man nun einen Cylinder für ein Prisma ansehen kann; dessen Grundflächen regelmäßige Unendlichecke sind; so ist auch der Cubikinhalt eines jeden Cylinders dem Producte aus seiner Grundfläche in die Höhe gleich. Es sey z. B. der Halbmesser der Grundfläche = *a*, und die Höhe des Cylinders = *b*; so ist die Grundfläche = $a^2\pi$, und der Cubikinhalt des Cylinders = $a^2 b\pi$.

§. 514.

Es folget aus diesem:

I. Daß die Cubikinhalte der Prismen und Cylinder sich gegen einander verhalten, wie die Producte aus den Grundflächen in die Höhen; nähmlich es ist *S* : *s* = *AB* : *ab*, wenn des einen Prisma oder Cylinders Cubikinhalt = *S*, Grundfläche = *B*, Höhe = *A*, und des anderen Cubikinhalt = *s*, Grundfläche = *b*, und Höhe = *a* gesetzet wird.

II. Daß Prismen und Cylinder von gleichen Grundflächen wie ihre Höhen und von gleichen Höhen wie ihre Grundflächen sich verhalten. Denn man setze nur *B* = *b*, so ist *S* : *s* = *AB* : *aB* = *A* : *a*; ingleichen ist *S* : *s* = *AB* : *Ab* = *B* : *b*, wenn *A* = *a* gesetzet wird.

III.

III. Daß Prismen und Cylinder am Cubikinhalte Fig. einander gleich sind, wenn ihre Grundflächen mit den Höhen in einer verkehrten Proportion stehen. Denn wenn $B:b=a:A$ ist; so ist auch $AB=ab$, und folglich ist $S=s$.

IV. Daß man aus dem gegebenen Cubikinhalte und aus der Höhe eines Prisma oder Cylinders seine Grundfläche, und auch aus dem Cubikinhalte und aus der Grundfläche die Höhe desselben bestimmen kann. Denn wenn $s=ab$ ist; so ist $a=\frac{s}{b}$, und $b=\frac{s}{a}$.

Es sey z. B. der Cubikinhalt eines Cylinders $= s =$ $100\,Cb^{I}\ 96\,Cb^{II}$, und die Höhe $a = 8^{I}\ 6^{II}\ 8^{III}$; so ist die Grundfläche $b = \frac{100\,Cb^{I}.96\,Cb^{II}}{8^{I}6^{II}8^{III}} = \frac{1801}{18}\,Cb^{I} : \frac{77^{I}}{9} = \frac{1801}{154}$ Quadrat-Schuhen. Setzet man nun den Durchmesser der Grundfläche dieses Cylinders $= x$, so ist $\frac{1}{4}x^{2}\pi = \frac{1801}{154}$;

und folglich $x = \sqrt{(\frac{3602}{77\pi})} = 3{,}859$ Schuhen. Wenn man die gegebene Höhe $a = 8^{I}\ 6^{II}\ 8^{III}$ in Linien, und auch den gegebenen Cubikinhalt in Cubik-Linien verwandelt; so erhält man nach vollbrachter Division die gesuchte Grundfläche in Quadrat-Linien, woraus sich sodann der unbekannte Durchmesser der Grundfläche in Linien ergibt. Aus diesem Beyspiele erhellet, wie man sich bey dergleichen Divisionen zu verhalten habe.

Anmerkung. Der Cubikinhalt eines schief abgestutzten senkrechten Cylinders ist gleich dem halben Producte aus der auf die Achse senkrechten Grundfläche in die Summe der größten und kleinsten Höhe des Cylinders. Die Ursache hiervon wird eben so wie bey der Bestimmung der Oberfläche dieses Cylinders abgeleitet, nnd wird dem eigenen Nachdenken der Anfänger überlassen.

Fig. 111.

§. 515.

Wenn bey dem senkrechten dreyseitigen Prisma ABEFC, die Seite $AB = a$, $AD = b$, $AC = c$, und der Neigungswinkel $CAB = 90°$ gesetzet wird; so ist ABEFC $= \frac{ac}{2} . b = \frac{abc}{2}$ (vermöge 511.).

Man kann dieses auch durch die Summirung der Elemente auf folgende Weise finden. Man stelle sich vor, daß $CA = c$ in ∞ gleiche Theile getheilet, und daß ein solcher Theil $= \frac{AC}{\infty} = \frac{c}{\infty}$ sey. Durch die Theilungspuncte gedenke man parallele Ebenen zu AE; so wird dadurch das Prisma ABEFC in seine Elemente aufgelöset, welche von dem Rücken CF angefangen bis auf die Grundfläche AE in einer arithmetischen Reihe des ersten Ranges fortwachsen. Das letzte Glied in dieser Reihe der Elemente ist der Körper ABED $\times$ AG $= ab . \frac{c}{\infty} = \frac{abc}{\infty}$ (denn man kann ihn für ein Parallelepipedum ansehen, weil GP $=$ AB seyn muß, sobald man AG $= \frac{AC}{\infty}$ setzet), das erste Glied aber ist $= o$, nähmlich der Rücken CF selbst, und die Anzahl aller Glieder oder Elemente dieser arithmetischen Reihe ist $= \infty$. Folglich ist (232.) ihre Summe $= (o + \frac{abc}{\infty}) . \frac{\infty}{2} = \frac{abc}{2}$ = dem Cubikinhalte des Prisma ABEFC.

Diese Elemente, die wir eben summiret haben, sind eigentlich nichts anderes, als die eingeschriebenen Prismen oder Parallelepipeden, deren Grundflächen von dem Rücken CF angefangen bis auf die Grundfläche AE in einer arithmetischen Reihe des ersten Ranges fortwachsen, und deren Höhen unendlich klein und zwar alle einander gleich sind. Es erhellet daraus, daß in diesem Falle durch die Summirung der eingeschriebenen Prismen der wahre Ausdruck des Cubikinhaltes erhalten werde. Ueberhaupt lätzt es sich allgemein

auf

auf eine ähnliche Art, wie es bey der Bestimmung des Flä- Fig.
cheninhaltes (§. 442.) geschehen ist, zeigen, daß wenn man die Höhe was immer für eines Körpers in unendlich viele gleiche Theile theilet, und durch die Theilungspuncte parallele Ebenen führet, die Summe der eingeschriebenen, und die Summe der herumbeschriebenen Prismen, und folglich auch der Cubikinhalt des Körpers einander gleich sind. Man darf also nur in jedem Falle die Summe der eingeschriebenen oder die Summe der herumbeschriebenen Elementar-Prismen berechnen, um den Cubikinhalt des ganzen Körpers zu erhalten.

§. 516.

Wenn man die Höhe AE $= a$ einer dreyseitigen Py- 112.
ramide in m gleiche Theile theilet, sodann durch diese Theilungspuncte zur Grundfläche BCD $=$ b parallele Ebenen führet, und durch die Durchschnittslinien dieser geführten Ebenen und der Seitenfläche ACD zu der entgegengesetzten Seite AB parallele Ebenen leget; so ist die Summe der Cubikinhalte aller eingeschriebenen Prismen, welche auf diese Art zum Vorschein kommen, $= \frac{(m-1).(2m-1).ab}{6m^2}$.

Denn (vermöge 474. III.) ist $AE^2 (a^2 : AM^2 (\frac{a^2}{m^2} =$ BCD $(b : SgN = \frac{b}{m^2}$, ingleichen $AE^2 (a^2 : AR^2 (\frac{2^2 a^2}{m^2} =$ BCD $(b : PfQ = \frac{2^2 b}{m^2}$, u. s. w. und endlich $AE^2 (a^2 : AT^2 \frac{(m-1)^2 a^2}{m^2} =$ BCD $(b : FhG = \frac{(m-1)^2 b}{m^2}$. Folglich ist das erste Prisma NP $=$ SgN $\times$ MR $= \frac{b}{m^2} . \frac{a}{m} = \frac{ab}{m^3}$ (weil MR $= \frac{a}{m}$ die Höhe dieses Prisma ist), das zweyte

Pris-

Fig. 112. Prisma $QL = PfQ \times RO = \frac{2^2 b}{m^2} \cdot \frac{a}{m} = \frac{2^2 ab}{m^3}$, das dritte Prisma $= \frac{3^2 ab}{m^3}$, das vierte $= \frac{4^2 ab}{m^3}$, u. s. w., und endlich ist das letzte Prisma $GB = FhG \times TE = \frac{(m-1)^2 b}{m^2} \cdot \frac{x}{m}$ $= \frac{(m-1)^2 ab}{m^3}$. Es ist demnach die Summe aller dieser Prismen

$$= \frac{ab}{m^3} + \frac{2^2 ab}{m^3} + \frac{3^2 ab}{m^3} + \ldots\ldots + \frac{(m-1)^2 ab}{m^3}$$

$$= \frac{ab}{m^3} \cdot [1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots\ldots + (m-1)^2] =$$

$$\frac{ab}{m^3} \cdot \left[\frac{(m-1) \cdot m \cdot (2m-1)}{6}\right] = \frac{(m-1) \cdot (2m-1) \cdot ab}{6m^2}$$

wenn wir $m-1$ statt n in der Formel $s = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ substituiren (316.).

§. 517.

Setzen wir nun $m = \infty$, so ist die Summe der Cubikinhalte aller dieser eingeschriebenen Prismen

$$= \frac{(\infty - 1) \cdot (2\infty - 1) ab}{6\infty^2} = \frac{\infty \cdot 2\infty \cdot ab}{6\infty^2} = \frac{2ab}{6}$$

$= \frac{1}{3} ab =$ dem dritten Theile des Productes aus der Grundfläche b in die Höhe a der Pyramide. Es ist aber in diesem Falle die Summe der Cubikinhalte aller eingeschriebenen Prismen dem Cubikinhalte der Pyramide ABCD gleich (§. 515.). Es ist also auch $\frac{1}{3} ab =$ dem Cubikinhalte der Pyramide ABCD; nähmlich der Cubikinhalt einer dreyseitigen Pyramide ist gleich dem dritten Theile des Productes aus der Grundfläche in die Höhe der Pyramide, sie möge senkrecht oder schief stehend seyn.

§. 518.

§. 518. Fig.

Nun läßt sich eine jede vielseitige Pyramide in lauter dreyseitige Pyramiden von gleicher Höhe zerfällen, wenn man ihre Grundfläche in lauter Dreyecke zertheilet; es ist demnach der Cubikinhalt einer jeden vielseitigen Pyramide gleich dem dritten Theile des Productes aus der Grundfläche in die Höhe der Pyramide.

§. 519.

Daß der Cubikinhalt einer Pyramide dem dritten 113.
Theile des Productes aus der Grundfläche in die Höhe gleich ist, läßt sich auch also erweisen. Es sey ABG ein senkrechtes dreyseitiges Prisma, AB $=$ *a*, CD $=$ *b* und senkrecht auf AB, endlich AE $=$ *c*; so ist das Prisma ABG $= \frac{1}{2} ab.c = \frac{abc}{2}$. Man gedenke durch E, F, C eine Ebene; so ist das Prisma ABG $=$ der Pyramide ECFG $+$ der Pyramide EABFC. Nun sey *x* von der Beschaffenheit, daß $\frac{EFG \times GC}{x} =$ der Pyramide ECFG, und $\frac{EABF \times DC}{x} =$ der Pyramide EABFC sey, (weil der Cubikinhalt einer jeden Pyramide ganz gewiß von dem Producte der Grundfläche in die Höhe und zwar bey verschiedenen Pyramiden doch immer auf eben dieselbe Weise abhängt, und dabey kleiner seyn muß, als dieses Product; so ist das Prisma $ABG = \frac{EFG \times GC}{x} + \frac{EABF \times DC}{x} = \frac{ABC.AE + EABF.DC}{x}$, nähmlich es ist $\frac{abc}{2} = \frac{\frac{1}{2}ab.c + ac.b}{x}$, und endlich $x = 3$. Es ist demnach die Pyramide $ECFG = \frac{EFG \,.\, GC}{3}$, und die Pyramide EABFC $= \frac{EABF \times DC}{3}$, nähmlich jede Pyramide ist gleich dem dritten Theile des Productes aus der Grnndfläche in die Höhe.

§. 520

Fig.

§. 520.

Auch der Cubikinhalt eines jeden (senkrechten oder schiefen) Kegels ist gleich dem dritten Theile des Productes aus der Grundfläche in die Höhe; weil man einen Kegel für eine Pyramide ansehen kann, deren Grundfläche ein Kreis ist.

§. 521.

Es folgt aus diesem:

I. Daß jede Pyramide dem dritten Theile eines Prisma, und auch jeder Kegel dem dritten Theile eines Cylinders von gleichen Grundflächen und Höhen gleich ist.

II. Daß Pyramiden und Kegel sich am Cubikinhalte gegen einander verhalten, wie die Producte aus ihren Grundflächen und Höhen.

III. Daß Pyramiden und Kegel von gleichen Grundflächen wie ihre Höhen, und von gleichen Höhen wie ihre Grundflächen sich verhalten.

IV. Daß Pyramiden und Kegel am Kubikinhalte einander gleich sind, wenn ihre Grundflächen mit den Höhen in einer verkehrten Proportion stehen. Alles dieses sieht man sehr leicht ein, wenn man der einen Pyramide Cubikinhalt $= S$, Grundfläche $= B$, Höhe $= A$, und der anderen Pyramide Cubikinhalt $= s$, Grundfläche $= b$, und Höhe $= a$ setzet.

V. Daß man aus dem gegebenen Cubikinhalte einer Pyramide oder eines Kegels, und aus der Grundfläche die Höhe, wie nicht weniger aus dem Kubikinhalte und aus der Höhe die Grundfläche bestimmen kann. Es sey z. B. der Cubikinhalt eines Kegels $= s = 10\text{Cb}^{\circ}\ 72\text{Cb}^{\text{I}}$, die Grundfläche $= b = 7\text{Q}^{\circ}\ 18\text{Q}^{\text{I}}$, und die Höhe $= x$; so ist $s = \frac{1}{3}bx$, und folglich $x = \frac{3s}{b} = \frac{3 \times (10\text{Cb}^{\circ}\ 72\text{Cb}^{\text{I}})}{(7\text{Q}^{\circ}\ 18\text{Q}^{\text{I}})}$

$= 3.\ \frac{31}{3}\text{Cb}^{\circ} : \frac{15}{2}\text{Q}^{\circ} = \frac{62}{1}\frac{2}{5}$ Klafter $= 4^{\circ}\,0^{\text{I}}\,9^{\text{II}}\,7^{\text{III}}\,2^{\text{IV}}$.

Man erhält eben diesen Werth für x, wenn man das gegebene s in Cubik-Zolle, und b in Quadrat-Zolle verwandelt, und sodann gehörig reduciret.

§. 522.

§. 522.

Fig.

Auch der Cubikinhalt einer parallel abgestutzten Pyramide läßt sich aus den beyden gegebenen parallelen Grundflächen, und aus der Höhe bestimmen, wenn man die Höhe des abgeschnittenen Stückes der Pyramide aufsuchet, sodann die ergänzte Pyramide und auch den abgeschnittenen Theil berechnet, und endlich das zweyte Resultat von dem ersten abzieht. Es sey z. B. AF eine abgestutzte Pyramide, ihre Höhe DM $= a$, die untere Grundfläche $= B$, und die obere parallele Grundfläche $= b$. Man verlängere in Gedanken die Seiten AD, BE, CF, bis sie in dem Puncte P zusammenstoßen, ziehe aus dem Puncte P auf die Ebene der Grundfläche ABC die Senkrechte PN; so ist PN die Höhe der ergänzten Pyramide ACBP, und PQ ist die Höhe der abgeschnittenen Pyramide DEFP. Es sey $PQ = x$; so ist $PN = PQ + QN = PQ + DM = x + a$; es ist aber $DEF : ABC = PQ^2 : PN^2$ (474. III.), nähmlich $b : B = x^2 : x^2 + 2ax + a^2$; folglich ist auch $bx^2 + 2abx + a^2b = Bx^2$, nähmlich es ist

114.

$$x = \frac{ab + a\sqrt{Bb}}{B-b} = PQ \text{ und } x + a = \frac{aB + a\sqrt{Bb}}{B-b} = PN;$$

und endlich ist der Cubikinhalt $AF = ABCP - DEFP =$

$$\tfrac{1}{3} ABC \,.\, PN - \tfrac{1}{3} DEF \,.\, PQ = \tfrac{1}{3} B \,.\, \frac{aB + a\sqrt{Bb}}{B-b} -$$

$$\tfrac{1}{3} b \,.\, \frac{ab + a\sqrt{Bb}}{B-b} = \tfrac{1}{3} a \,.\, (B + b + \sqrt{Bb});$$ das ist: der Cubikinhalt einer abgestutzten Pyramide wird erhalten, wenn man zwischen der oberen und unteren Grundfläche eine mittlere geometrische proportionale Fläche suchet, diese drey Flächen zusammen adiret, und ihre Summe mit dem dritten Theile der Höhe multipliciret.

Es ist leicht einzusehen, daß sich dieser Satz auf alle Gattungen der Pyramiden, und auch auf die Kegel erstrecket; nur ist es erforderlich, daß die beyden Grundflächen mit einander parallel laufen.

§. 523.

Fig.

§. 523.

115. Auch der Cubikinhalt eines schief abgeschnittenen dreyseitigen Prisma AECDFB läßt sich bestimmen. Er ist gleich dem dritten Theile der Summe seiner drey parallelen Seiten multipliciret mit der senkrecht durchschneidenden Fläche MNP.

Denn der Cubikinhalt AECDFB ist = der vierseitigen Pyramide AENMC + der dreyseitigen Pyramide MCNP + der dreyseitigen Pyramide MDNP + der vierseitigen Pyramide MNFBD = $\frac{1}{3}$ AENM. QP + $\frac{1}{3}$ MNP . PC + $\frac{1}{3}$ MNP . PD + $\frac{1}{3}$ MNFB . QP = $\frac{1}{3}$ (AENM + MNFB) . QP + $\frac{1}{3}$ (PC + PD) . MNP = $\frac{1}{3}$ AEFB . QP + $\frac{1}{3}$ MNP . CD. Setzen wir nun AB = a, EF = b, CD = c, die eine Seite der senkrecht durchschneidenden Fläche MN = e, und die Senkrechte QP = f; so ist AEFB = $\frac{a+b}{2} . e$, und MNP = $\frac{ef}{2}$; folglich ist AECDFB = $\frac{1}{3} . \frac{a+b}{2} . e . f +$

$$\frac{1}{3} . \frac{ef}{2} . c = \frac{1}{3} . \left(\frac{aef + bef + cef}{2}\right) = \left(\frac{a+b+c}{3}\right) . \frac{ef}{2}$$

$$= \frac{AB + EF + CD}{3} \times MNP.$$

§. 524.

116. Durch Hülfe dieses Satzes lassen sich nun die Cubikinhalte von mehreren unregelmäßigen Körpern berechnen. So z B. ist der Cubikinhalt des schief abgeschnittenen vierseitigen Prisma

$$ABGFC = \frac{1}{2} MN . PQ . \left(\frac{AD + BC + HE}{3}\right) + \frac{1}{2} PR.$$

$$PQ . \left(\frac{AD + HE + GF}{3}\right),$$ wenn MNPR die senkrecht durchschneidende Fläche, und PQ die Entfernung der zwey parallelen Grundflächen, nähmlich die Höhe dieses Körpers vorstellet; denn durch die Ebene AHED wird dieses Prisma in zwey dreyseitige schief abgeschnittene Prismen zerleget.

In-

Ingleichen der zeltförmige Körper ABDEC ist = dem Drey- Fig.
ecke FGH $\times \left(\frac{AB+ED+CP}{3}\right)$ wenn die drey Seiten mit ein- 117.
ander parallel laufen, und von FGH senkrecht durchschnitten sind. Eben so ist der Cubikinhalt des Körpers AGHB Fig. 118. 118.
bey dem die einzigen vier Seiten AE, BF, DH, CG pa-
rallel laufen = PMN . $\left(\frac{DH+AE+CG}{3}\right)$ + PMQ.
$\left(\frac{DH+AE+BF}{3}\right)$, wenn man sich vorstellet, daß durch die zwey Parallelen Seiten DH und AE eine Ebene geleget, und der Durchschnitt MNPQ auf die vier parallelen Seiten senkrecht sey. Durch eben dieselbe Zerlegung in zwey schief abgeschnittene dreyseitige Prismen läßt sich der Cubikinhalt eines Grabens, einer Brustwehre, eines Dammes, eines Merlons, und einer Schußscharte bey einer regelmäßigen Batterie, und mehrerer anderer Körper dieser Art berechnen.

§. 525.

Wenn ein unregelmäßiger Körper also beschaffen ist, daß er sich weder in Pyramiden, noch in Prismen, noch in andere bekannte Körper zerlegen läßt; so pflegt man seinen Cubikinhalt durch verschiedene andere Kunstgriffe zu suchen, als z. B. durch das Einlegen in ein mit Wasser angefülltes senkrechtes Parallelepipedum, oder in einen mit Wasser gefüllten Cylinder. Man kann auch den Cubikinhalt eines Körpers aus seinem Gewichte bestimmen: z. B. es sey das Gewicht eines ausgebohrten metallenen Bombenpöllers = 1000 ℔, das Gewicht eines Wiener Cubik Schuhes von diesem Metalle ist = 480 Wiener ℔, und der Cubikinhalt des Pöllers ohne Bohrung sey = x Cubik-Schuhen; so ist x . 480 = 1000, und folglich $x = 2\frac{1}{12}$ Wiener Cb^x genau. Umgekehrt aus dem Cubikinhalte des Körpers, und aus dem Gewichte eines Cubik-Schuhes der Materie, woraus der Körper besteht, kann das Gewicht des Körpers bestimmet werden. Es sey z. B. der Cubikinhalt eines Körpers = a Cb^x, sein Gewicht = x ℔,

und

Fig. und das Gewicht eines Cubik-Schuhes der Materie des Körpers $= b$ ℔, so ist $x = ab$ ℔. Aus dieser Gleichung folgt auch $b = \frac{x}{a}$ ℔, das ist, wenn man das Gewicht x eines Körpers durch seinen in Cubik-Schuhen ausgedruckten Cubikinhalt a dividiret; so erhält man das Gewicht eines Cubik-Schuhes der Materie, woraus der Körper besteht; dieses Gewicht eines Cubik-Schuhes von was immer für einer Materie wird auch sonst die eigentliche Schwere (gravitas specifica) oder das eigenthümliche Gewicht dieser Materie genannt.

§. 526.

Der Cubikinhalt einer Kugel ist gleich dem dritten Theile des Productes aus der Oberfläche multipliciret mit dem Halbmesser derselben.

Denn man bilde sich nur ein, daß die Kugelfläche in eine unendliche Anzahl gleicher Theile (z. B. in unendlich kleine gleichseitige Dreyecke) getheilet sey, und daß aus den Spitzen dieser Dreyecke gerade Linien zu dem Mittelpuncte der Kugel gezogen werden; so wird dadurch die Kugel in Elementar-Pyramiden von gleicher Höhe zertheilet. Nun ist der Cubikinhalt einer jeden solchen Elementar-Pyramide = dem dritten Theile des Productes aus dem Halbmesser multipliciret mit dem unendlich kleinen Theile der Kugelfläche, welche dieser Pyramide zur Grundfläche dienet; es ist also auch die Summe der Cubikinhalte aller dieser Elementar-Pyramiden, nähmlich der Cubikinhalt der Kugel = dem dritten Theile des Productes aus dem Halbmesser multipliciret mit der Summe aller dieser unendlich kleinen Theile der Kugelfläche, das ist, multipliciret mit der Oberfläche der Kugel.

§. 527.

Da sich eben dieses von einem Kugelausschnitte sagen läßt; so ist auch der Cubikinhalt eines Kugelausschnittes gleich dem dritten Theile des Productes aus dem Halbmesser in die Oberfläche des Kugelausschnittes.

§. 528.

§. 528. Fig.

Setzen wir nun den Halbmesser einer Kugel = a Schuhen, so ist eine größte Kreisfläche = $a^2\pi$, die Kugelfläche = $4a^2\pi\mathfrak{Q}^1$ (497.), und folglich der Cubikinhalt = $\frac{1}{3}a \cdot 4a^2\pi = \frac{4}{3}a^3\pi\mathfrak{Cb}^1$; der Cubikinhalt der Halbkugel aber ist = $\frac{2}{3}a^3\pi$. So z. B. ist der Cubikinhalt unseres Erdballes, wenn man ihn für eine Kugel ansieht = 26590740000 geographischen Cubik-Meilen; und die Oberfläche ist nach dieser Voraussetzung = 9281922 geographischen Quadratmeilen, weil 15 geographische Meilen 1 Grad des größten Umkreises der Erdkugel ausmachen.

Daß der Cubikinhalt der Halbkugel = $\frac{2}{3}a^3\pi$ ist, läßt sich auch also erweisen. Eine Halbkugel entsteht, wenn sich 87.
ein Viertelkreis DCA um den Halbmesser CD herumdrehet. Bildet man sich nun ein, daß ein Stück CM des Halbmessers in eine unendliche Anzahl gleicher Theile getheilet sey, und daß durch die Theilungspuncte senkrechte Ordinaten gezogen werden; so wird ein jedes der Rechtecke Cd, cf.....qB einen Cylinder beschreiben. Diese Cylinder sind die Elemente der Zone, welche durch das Stück CMBA erzeuget wird. Die Summe dieser Elemente läßt sich bestimmen. Denn es ist der erste Cylinder, das ist das erste Element, welches durch das erste Rechteck Cd erzeuget wird, = $(cd)^2\pi$. Cc, das zweyte Element = $(ef)^2\pi$. ce, u. s. w.,

oder wenn wir x = CM, Cc = ce = $\frac{x}{\infty}$, und den Halbmesser CD = a setzen; so ist das erste Element $= [\sqrt{(a^2 - \frac{x^2}{\infty^2})}]^2\pi.\frac{x}{\infty} = \frac{a^2x\pi}{\infty} - \frac{x^3\pi}{\infty^3}$, das zweyte Element $= (a^2 - \frac{2^2x^2}{\infty^2})\pi.\frac{x}{\infty} = \frac{a^2x\pi}{\infty} - \frac{2^2x^3}{\infty^3}$, das dritte Element $= \frac{a^2x\pi}{\infty} - \frac{3^2x^3\pi}{\infty^3}$, u. s. w. und endlich ist das letzte Element $= (a^2 - x^2)\pi.\frac{x}{\infty} = (a^2 - .\frac{\infty^2x^2}{\infty^2})\pi.\frac{}{\infty}$

=

Fig. 87. $= \frac{a^2 x\pi}{\infty} - \frac{\infty^2 x^3 \pi}{\infty^3}$; folglich ist die Summe aller dieser Elemente $= \left(\frac{a^2 x\pi}{\infty} + \frac{a^2 x\pi}{\infty} + \frac{a^2 x\pi}{\infty} + \ldots\ldots\right)$

$- \frac{x^3\pi}{\infty^3}(1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots\ldots+\infty^2) = \frac{a^2 x\pi}{\infty}\,\infty$

$- \frac{x^3\pi}{\infty^3} \cdot \frac{\infty^2 \cdot \infty}{3} = a^2 x\pi - \frac{1}{3}x^3\pi =$ dem Cubikinhalte der Zone, welche durch das travezförmige Stück CMBA erzeuget wird. Setzen wir nun $x = a$, so ist $a^2 x\pi - \frac{1}{3}x^3\pi = a^3\pi - \frac{1}{3}a^3\pi = \frac{2}{3}a^3\pi =$ dem Cubikinhalte der Halbkugel, und $\frac{4}{3}a^3\pi =$ der ganzen Kugel.

Es ist leicht einzusehen, daß man die Summe aller Elemente $a^2 x\pi - \frac{1}{3}x^3\pi$ aus dem letzten Elemente

$= (a^2 - x^2)\pi \cdot \frac{x}{\infty} = \frac{a^2 x\pi}{\infty} - \frac{x^3\pi}{\infty}$, welches in dieser unendlichen Reihe der Elemente die Stelle des allgemeinen Gliedes vertritt, (nach 454.) bestimmen könne.

Anmerkung. Noch einleichtender, und eben so unabhängig von der Oberfläche einer Kugel läßt sich der Cubikinhalt derselben auf folgende Art bestimmen.

105. Es sey ACT der Quadrant eines größten Kreises; auf dem Halbmesser CT errichte man das Quadrat ACTS und verbinde die Puncte C und S. Bewegt sich die ganze Figur um die unbewegliche Achse AC, so wird der Quadrant ACT die Halbkugel, das Quadrat ACTS einen Cylinder, und das rechtwinkelige Dreyeck CAS einen geraden Kegel beschreiben. Alle diese Figuren haben eine gemeinschaftliche Höhe; diese ist der Halbmesser AC. Wenn man demnach diesen Halbmesser in eine unendliche Anzahl gleicher Theile theilet, und durch die Theilungspuncte Parallelen zu AS ziehet; so sind die erzeugenden Flächen, folglich auch die Körper selbst, in eine gleiche Anzahl der Elemente zerleget. Man setze den Halbmesser der Kugel $AC = a$, und $CP = x$; so ist auch $PI = x$, weil in dem

Dreyecke

Dreyecke CAS die Seiten AC und AS einander gleich sind, und PI parallel zu AS gezogen ist. Ferner ist PK $= \sqrt{(a^2 - x^2)}$ und PH $= a$. Nun ist in der Entfernung CP vom Mittelpuncte das Element der Kugel $= (a^2 - x^2) \cdot \pi \times \frac{a}{\infty}$, das gleichnahmige Element des Kegels $= x^2 \pi \times \frac{a}{\infty}$, und das gleichnahmige Element des Cylinders $= a^2 \pi \times \frac{a}{\infty}$. Ziehen wir die beyden letzteren von einander ab, so erhalten wir $a^2 \pi \times \frac{a}{\infty} - x^2 \pi \times \frac{a}{\infty}$ Fig. 105.

$= (a^2 - x^2) \pi \times \frac{a}{\infty}$ das Element der Kugel. Eben derselbe Schluß gilt von einem jeden anderen Elemente. Folglich ist auch die Summe aller Elemente des Cylinders, weniger die Summe aller Elemente des Kegels, gleich der Summe aller Elemente der Halbkugel; oder der Cubikinhalt einer Halbkugel ist der Differenz der Cubikinhalte eines Cylinders und Kegels gleich, welche beyde den Halbmesser der Kugel zur Höhe, und einen größten Kreis der Kugel zur Grundfläche haben. Es ist aber der Cubikinhalt dieses Cylinders $= a^2 \pi \times a = a^3 \pi$, und der Cubikinhalt des Kegels $= \frac{1}{3} a^2 \pi \times a = \frac{1}{3} a^3 \pi$; folglich ist der Cubikinhalt der Halbkugel $= a^3 \pi - \frac{1}{3} a^3 \pi = \frac{2}{3} a^3 \pi$, und der Cubikinhalt der ganzen Kugel $= \frac{4}{3} a^3 \pi = \frac{1}{3} a \times 4a^2 \pi =$ der Oberfläche der Kugel, multiplicirt mit dem dritten Theile des Halbmessers.

Wenn die Oberfläche der Kugel nicht schon aus (§. 496.) bekannt wäre, so könnte man dieselbe aus dem eben gefundenen Ausdrucke des cubischen Inhaltes auf folgende Art viel kürzer ableiten, als es dort möglich war. Nähmlich es ist klar, daß, wenn man die Kugel in pyramidalische in den Mittelpunct der Kugel zusammen stossende Elemente von unendlich kleiner Grundfläche zertheilet ge-

Fig. denket, der Cubikinhalt derselben dem dritten Theile des Productes aus dem Halbmesser in die Oberfläche welche wie immer beschaffen seyn mag, gleich ist (526). Setzen wir die unbekannte Oberfläche $= S$, so ist der Cubikinhalt $= \frac{1}{3}aS$. Eben dieser Cubikinhalt ist $= \frac{4}{3}a^3\pi$. Folglich ist $\frac{1}{3}aS = \frac{4}{3}a^3\pi$, nähmlich es ist die Oberfläche einer Kugel $S = 4a^2\pi$ viermahl so groß als eine größte Kreisfläche derselben, wie oben. Diejenigen Anfänger, deren Verstandeskräfte zu eingeschränkt sind, um die in §. 496. gegebene Ableitung der Oberfläche einer Kugel vollkommen einzusehen, können sich zu diesem Zwecke der hier gezeigten weit kürzeren Methode bedienen.

§. 529.

106. Der Cubikinhalt eines um die Kugel herumbeschriebenen Cylinders AG ist $= 2a^3\pi$, wenn wir den Halbmesser AK $=$ CE $= a$ setzen; und der Cubikinhalt der Kugel ist $= \frac{4}{3}a^3\pi$. Folglich verhält sich der Cylinder AG zu der Kugel MN $= 2a^3\pi : \frac{4}{3}a^3\pi$, oder AG : MN $= 3 : 2$, nähmlich es ist MN $= \frac{2}{3}$AG, das ist, die Kugel ist gleich zwey Drittheilen des herumbeschriebenen gleichseitigen Cylinders.

Eben so läßt sich erweisen, daß der herumbeschriebene gleichseitige Kegel, der herumbeschriebene Cylinder, und die Kugel sich am Cubikinhalte verhalten, wie $9 : 6 : 4$, nähmlich daß die Verhältnisse dieser Körper den Verhältnissen ihrer ganzen Oberflächen gleich sind (497. IV.).

§. 530.

104. Wenn wir bey dem Kugelausschnitte dCeBd die Gerade Bc $= x$, und den Halbmesser BC $= a$ setzen; so ist die Oberfläche dBe $= 2a\pi x$ (499.), und folglich der Cubikinhalt dieses Ausschnittes $= 2a\pi x \cdot \frac{1}{3}a = \frac{2}{3}a^2x\pi$. Ziehen wir nun von diesem Kugelausschnitte den Kegel deC ab; so erhalten wir den Cubikinhalt des Kugelabschnittes dceBd. Es ist aber der Kegel deC $= (dc)^2\pi] \cdot \frac{1}{3}$cC $=$

$[V(2ax - x^2)]^2\pi \cdot \frac{1}{3}(a - x) = \frac{2a^2x\pi - 3ax^2\pi + x^3\pi}{3}$ Fig.

Folglich ist dieser Kugelabschnitt dceBd 104.

$= \frac{2a^2x\pi - 2a^2x\pi + 3ax^2\pi - x^3\pi}{3} = ax^2\pi - \frac{1}{3}x^3\pi.$

Aus der Gleichung $y^2 = 2ax - x^2 = (dc)^2$ findet man $a = \frac{y^2 + x^2}{2x}$; folglich ist eben dieser Cubikinhalt

$= \frac{xy^2\pi + x^3\pi}{2} - \frac{1}{3}x^3\pi = \frac{xy^2\pi}{2} + \frac{x^3\pi}{6}$. Setzen wir de $= z = 2y$, so ist $y = \frac{1}{2}z$, und folglich eben dieser Abschnitt dceBd $= \frac{1}{8}xz^2\pi + \frac{1}{6}x^3\pi$.

§. 531.

Wenn der Halbmesser der Kugel CM $= a$ und CP $= x$ gesetzet wird; so ist die Zone ADEB $= a^2x\pi$ 119.
$- \frac{1}{3}x^3\pi$ (528.); und aus eben demselben Grunde, wenn CQ $= u$ gesetzet wird, ist die Zone AGFB $= a^2u\pi - \frac{1}{3}u^3\pi$; es ist also auch die Zone DGFE $= a^2u\pi - \frac{1}{3}u^3\pi - a^2x\pi$

$+ \frac{1}{3}x^3\pi = \pi \cdot (a^2u - a^2x + \frac{x^3 - u^3}{3})$ .... (A). Setzen

wir nun die Dicke dieser Zone PQ $= f$, den Halbmesser der größeren Grundfläche PE $= b$, und den Halbmesser der kleineren Grundfläche QF $= c$; so ist CQ $=$ CP $+$ PQ, nähmlich $u = x + f$; es ist demnach auch die Zone DGFE $= \pi f \cdot (a^2 - x^2 - fx - \frac{1}{3}f^2)$ .... (B), wenn man $x + f$ statt u in der Gleichung (A) substituiret. Ferner ist auch $CE^2 = CP^2 + PE^2$, nähmlich $a^2 = b^2 + x^2$. Es ist also auch die Zone DGFE $= \pi f \cdot (b^2 - fx - \frac{1}{3}f^2)$ .... (C), wenn man $b^2 + x^2$ statt a^2 in der Gleichung (B) setzet. Endlich ist $CF^2 = QF^2 + (CP + PQ)^2$, nähmlich $a^2 = c^2 + x^2 + 2fx + f^2$, und auch $b^2 + x^2 = c^2 + x^2 + 2fx + f^2$, weil auch $a^2 = b^2 + x^2$, das ist $CE^2 = PE^2 + PC^2$ statt findet. Es ist aus dieser Gleichung $fx = \frac{b^2 - c^2 - f^2}{2}$.

Fig. 119. Substituiren wir nun diesen Werth in der Gleichung (E), so ist endlich die Zone DGFE $= \frac{1}{6}\pi f.(3b^2 + 3c^2 + f^2)$ durch ihre Dicke und durch die Halbmesser ihrer Grundflächen ausgedrucket.

Eben diesen Ausdruck für den Cubikinhalt einer Zone erhält man, wenn schon eine Grundfläche diesseits und die andere parallele Grundfläche jenseits des Mittelpunctes der Kugel liegt.

Setzen wir in diesem Ausdrucke $c = 0$, so ist $f =$ PM, und $\frac{1}{6}\pi f.(3b^2 + 3c^2 + f^2) = \frac{1}{2}fb^2\pi + \frac{1}{6}f^3\pi =$ dem Kugelabschnitte DME. Setzen wir hingegen $f = 2a =$ MN, so ist b und $c = 0$, und $\frac{1}{6}\pi f.(3b^2 + 3c^2 + f^2) = \frac{4}{3}a^3\pi =$ dem Cubikinhalte der ganzen Kugel. Setzen wir endlich $b = c = \frac{1}{2}f$, so ist $\frac{1}{6}\pi f.(3b^2 + 3c^2 + f^2) = \frac{5}{12}f^3\pi =$ dem Cubikinhalte einer Zone, deren Dicke und die Durchmesser beyder Grundflächen alle einander gleich sind.

§. 532.

Wenn man den Cubikinhalt einer Kugel, deren Halbmesser $= a$ ist, mit s und den Cubikinhalt einer anderen Kugel, deren Halbmesser $= A$ ist, mit S bezeichnet; so ist $s = \frac{4}{3}a^3\pi$, und $S = \frac{4}{3}A^3\pi$. Folglich ist auch $s:S = \frac{4}{3}a^3\pi:\frac{4}{3}A^3\pi = a^3 : A^3 = 8a^3 : 8A^3 = (2a)^3:(2A)^3 = d^3 : D^3$, wenn man die Durchmesser mit d und D bezeichnet. Das ist die Cubikinhalte der Kugeln verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Halbmesser, oder ihrer Durchmesser, oder überhaupt wie die dritten Potenzen ihrer gleichnahmigen Abmessungen. Nun aber verhalten sich auch die Cubikinhalte der Kugeln von einerley Materie wie ihre Gewichte. Folglich verhalten sich auch die Gewichte der Kugeln von einer und derselben Materie wie die dritten Potenzen ihrer Halbmesser oder ihrer Durchmesser; und folglich auch die Durchmesser wie die Cubikwurzeln der Gewichte. Es sey z. B. der Durchmesser einer 1pfündigen eisernen Kugel $= a$ Zollen, so ist der Durchmesser D einer $b$pfündigen Kugel $= a\sqrt[3]{b}$ Zoll, oder $\log D = \log a$

+

$+\frac{1}{3}\log b$. Da nun bey der k. k. Artillerie, wenn man den Durchmesser einer 1pfündigen eisernen Kugel in Wiener Zollen ausdrucket, $\log a = 0{,}2764778$, und $\frac{1}{3}\log 24 = 0{,}4600704$ ist; so ist der Logarithmus des Durchmessers einer 24pfündigen eisernen Kugel $= 0{,}7365482$, und folglich der Durchmesser $D = 5{,}4519$ Wiener Zollen = 5 Zollen 5 Linien 5 Puncten. Der Logarithmus des Durchmessers einer sogenannten 1pfündigen eisernen Grenade oder Bombe, in Wiener Zollen ausgedrucket, ist $= 0{,}4582093$; und der Logarithmus des Durchmessers einer 1pfündigen bleyernen Kugel, in Wiener Zollen ausgedrucket, ist $= 0{,}2172676$. Aus diesen Logarithmen können nun die Durchmesser aller bey der k. k Artillerie gebräuchlichen Kugeln, Bomben, und Grenaden sehr leicht berechnet werden. Diese Logarithmen sind aus folgenden Gründen hergeleitet. 1) Nach dem bey der k. k. Artillerie vormahls gewöhnlichen in 12 Zolle getheilten Nürnberger Schuhe ist der Durchmesser einer 1pfündigen eisernen Kugel $= 2{,}04$, der Durchmesser einer 1pfündigen Grenade $= 3{,}1$, und der Durchmesser einer 1pfündigen bleyernen Kugel $= 1{,}78$ Zoll festgesetzet. 2) Dieser Nürnberger Schuh ist $= 1601$ solchen Theilen, deren der Wiener Schuh 1728 enthält. Es ist allhier wohl zu merken, daß das Gewicht, welches sich auf die angeführten Durchmesser beziehet, nicht Wiener Gewicht, sondern das ehevor bey der k. k. Artillerie gewöhnliche Nürnberger Gewicht ist, welches sich zum Wiener Gewichte sehr nahe verhält wie 5 : 6. Es ist nähmlich das Gewicht Einer unserer sogenannten 24pfündigen eisernen Kugeln nur $\frac{5}{6}.24 = 20$ Wiener Pfunden beynahe. Das Gewicht von den zugerichteten Grenaden und Bomben hingegen ist nach dem Wiener Gewichte beynahe doppelt so groß, als es die gewöhnliche Benennung anzeiget. Eine 10pfündige Bombe, und auch eine 10pfündige Haubitz-Grenade wiegt beynahe 20, und eine 100pfündige Bombe wiegt beynahe 200 Wiener Pfunde. Die Benennung 10, oder 100pfündig, u. s. w. ist von einer gewissen Gattung der steinernen Kugeln, welche vor der Erfindung der Bomben gebräuch-

Fig. bräuchlich waren, beybehalten. Eine solide steinerne Kugel von dem Durchmesser Einer unserer 100pfündigen Bomben aus einer gewissen Gattung des Steines verfertiget hat vormahls 100 Nürnberger Pfunde gewogen. Unser Wiener Gewicht ist also beschaffen, daß ein Wiener Cubik-Schuh Regenwasser $56\frac{3}{8}$ ℔ wieget.

Aus dem angeführten Satze (die Gewichte der Kugeln von einerley Materie verhalten sich gegen einander, wie die dritten Potenzen ihrer Durchmesser) folgt, daß das Gewicht einer Kugel 8mahl grösser wird, wenn man ihren Durchmesser verdoppelt, daß das Gewicht einer Kugel 64mahl kleiner wird, wenn man ihren Durchmesser um 4mahl kleiner macht, das ist durch 4 dividiret; mit einem Worte, daß der Durchmesser einer *a*pfündigen Kugel *n*mahl genommen den Durchmesser einer an^3pfündigen Kugel gibt u. s. w. Dieses heißt bey den Artilleristen 1 ℔ umgeschlagen gibt 8 ℔; 1 ℔ halbirt gibt $\frac{1}{8}$ ℔ oder 4 Loth, *p* ℔ durch 4 getheilet geben $\frac{1}{2}p$ Lothe u. s. w.

§. 533.

Bey allen ähnlichen Körpern verhalten sich die Cubikinhalte gegen einander, wie die dritten Potenzen der gleichnahmigen Abmessungen.

Denn man stelle sich nur zwey ähnliche Körper vor, z. B. zwey Pyramiden, die auf ähnlichen Grundflächen stehen, und von ähnlichen Dreyecken eingeschlossen sind, und setze den Cubikinhalt der ersten $= S$, den Cubikinhalt der zweyten Pyramide $= s$; die drey Abmessungen oder Factoren, durch deren Multiplication der Cubikinhalt der ersten Pyramide vorgestellet wird, bezeichne man mit A, B, C, und die drey ähnlichen Abmessungen oder Factoren der zweyten Pyramide mit a, b, e; so ist $S = ABC$, und $s = abc$. Es ist also auch $S : s = ABC : abc$. Es ist aber vermöge der vorausgesetzten Aehnlichkeit der zwey Körper,

$A : a = B : b$, nähmlich $b = \frac{aB}{A}$, und $A : a = C : c$,

nähm-

nähmlich $c = \frac{aC}{A}$; daher ist auch $b.c = \frac{aB}{A} . \frac{aC}{A}$, nähmlich Fig.

$bc = \frac{a^2BC}{A^2}$; und folglich $S : s = A.B.C : a.\frac{a^2BC}{A^2} =$

$A^3 : a^3 = B^3 : b^3 = C^3 : c^3$, weil $A.a = B : b$, und auch $A^3 : a^3 = B^3 : b^3$ statt findet.

Anmerkung. Bey der gegenwärtigen Entwicklung dieses Lehrsatzes werden die vorkommenden Linien, arithmetisch als Zahlen, in Erwägung gezogen. Man stellet sich nähmlich vor, daß jede dieser Linien durch eine kleine für die Einheit angenommene Linie ausgemessen sey. Durch die Zahlen nun, welche anzeigen, wie oft die für die Einheit angenommene Linie in jeder ganzen Linie enthalten ist, werden diese Linien selbst vorgestellet. Auf eben diese Art ist der (im §. 403.) gegebene erste Beweis des berühmten Pythagorischen Lehrsatzes durch Zahlen ausgeführet, welche die Seiten des rechtwinkeligen Dreyeckes vorstellen. Die zweyten Potenzen dieser Zahlen, sind die Quadrate der durch dieselben bezeichneten Seiten. Der zweyte Beweis dieses Lehrsatzes hingegen ist rein geometrisch. Bey dieser Gelegenheit ist es nicht überflüssig zu erinnern, daß es in vielen Fällen vortheilhaft ist, sowohl den Pythagorischen Lehrsatz, als auch den Lehrsatz von der Proportionalität der gleichnahmigen Seiten ähnlicher Dreyecke (§. 399.) in arithmetischer Bedeutung zu gebrauchen, so wie es bisher meistens geschehen ist, und auch noch im Folgenden vorkommen wird.

Ferner kann man hier noch erinnern, daß ein Product aus drey Linien oder Dimensionen jederzeit einen Körper vorstellet, wenn die Einheit dieses Productes durch einen Würfel auf derjenigen Linie ausgedrucket ist, mit der die drey Dimensionen ausgemessen sind. Es sey z. B. der Halbmesser der Grundfläche eines schiefen Kegels $= x$ Schuhen, der halbe Umkreis $= y$ Schuhen, und der dritte Theil der Höhe dieses Kegels $= z$ Schuhen; so ist dieser Kegel $= xyz$ Cubik-Schuhen. Eben diese xyz Cubik-Schuhe sind auch einem senkrechten Parallelepipedum gleich, dessen

Län-

Fig. Länge $= x$, Breite $= y$, und Höhe $= z$ Schuhen ist; u. s. w. Ein Product aus zwey Linien oder Dimensionen hingegen stellet eine Fläche vor, wenn die Einheit dieses Productes durch ein Quadrat auf derjenigen Linie ausgedrucket ist, mit der die zwey Dimensionen ausgemessen sind. Aus diesem Grunde pflegt man xyz, $2axy$, $3axz$, a^2x, $10x^3$, $\frac{x^4}{a}$, $\frac{a^2b^5}{c^4}$, $x^2 \vee ab$, u. s. w. körperliche, hingegen ax, $2ab$, $\frac{4a^3}{x}$, $x \vee (a^2 - x^2)$, u. s. w. flache und endlich x, $3a$, $\frac{2x^3}{5a^2}$, $\frac{y^3 \overset{3}{\vee} (a^3 + x^3)}{a^2 - x^2}$, u. s. w. linearische Ausdrücke zu nennen, wenn durch jeden dieser Buchstaben eine Linie angezeiget ist.

§. 534.

Wir wollen diese Abhandlung von den Körpern mit folgenden Aufgaben beschließen.

1. Es ist die Seite eines Würfels gegeben; man soll die Seite eines anderen Würfels finden, dessen Cubikinhalt sich zu dem gegebenen verhält, wie $n : m$.

Auflösung. Man messe die gegebene Seite des Würfels mit einem genau ausgetheilten beliebigen Maßstabe aus. Es sey z. B. die Länge dieser Seite $= a = 5000$ Puncten nach dem Wiener-Schuhe, die unbekannte Seite des gesuchten Würfels aber sey $= x$; ferner sey der Cubikinhalt des gegebenen $= S$, und des gesuchten Würfels $= s$: so ist vermöge der Bedingung der Aufgabe $S : s = m : n$; es ist aber $S : s = a^3 : x^3$; folglich ist auch $m : n = a^3 : x^3$; und endlich $x = a \overset{3}{\vee} \frac{n}{m}$. Es sey z. B. $n = 2$, und $m = 1$; so ist $x = 5000 \overset{3}{\vee} 2 = 5000 \cdot 1{,}25992 = 6299\frac{3}{5}$ Puncten eben desselben Wiener-Schuhes. Man verzeichne demnach nur durch Hülfe eben dieses Maßstabes eine gerade Linie von $6299\frac{3}{5}$ Puncten; so ist diese Gerade die gesuchte Seite des Wür-

Würfels, der am Cubikinhalte zweymahl so groß ist, als der Fig. gegebene Würfel.

Die eben angeführte Aufgabe von der Verdoppelung des Würfels hat in den ältesten Zeiten den Meßkünstlern viel Kopfbrechens verursachet. Sie suchten immer die unbekannte Seite des Würfels durch eine geometrische Verzeichnung zu bestimmen, weil ihnen die Kunstgriffe der heutigen Rechenkunst vielleicht nicht bekannt waren. Wäre ihnen die dermahlige Rechenkunst nebst dem geometrischen Maßstabe bekannt gewesen; so hätten sie gewiß nicht so viel Mühe auf die Erfindung der geometrischen Verzeichnungen verwendet, weil es eine ausgemachte Wahrheit ist, daß die bey der Auflösung einer Aufgabe gesuchten Linien durch die Rechnung und mit Beyhülfe eines gut ausgetheilten Maßstabes in der Ausübung viel genauer, als durch die geometrische Verzeichnung bestimmet werden können.

II. Man soll den Durchmesser einer gegossenen eisernen Kugel von 24 Wiener Pfunden nach dem Wiener Maße bestimmen; da es bekannt ist, daß ein Wiener-Cubik-Schuh des gegossenen Eisens $409\frac{1}{2}$ Wiener-Pfunde wiegt.

Auflösung. Es sey der Durchmesser dieser Kugel $= x$ Wiener-Schuhen; so ist der Cubikinhalt $= \frac{1}{6} x^3 \pi$ Cubik-Schuhen. Nun verhalten sich die Cubikinhalte der Körper von einer und derselben Materie, wie ihre Gewichte; hier nähmlich $1\ \mathfrak{Cb}^1 : \frac{1}{6} x^3 \pi\ \mathfrak{Cb}^1 = 409\frac{1}{2}$ ℔ : 24 ℔. Folglich ist

$$x = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 24}{409\frac{1}{2}\pi}}$$ Wiener-Schuhen; oder es ist $\log x =$

$\frac{1}{3}(\log 6 + \log 24 - \log 409\frac{1}{2} - \log \pi) = 0{,}6829862 - 1 =$ $\log 0{,}4819$; und endlich ist $x = 0{,}4819$ Wiener-Schuhen $= 5^{II}, 9^{III}, 5^{IV}$.

III. 1 Wiener-Cubik-Schuh Kriegspulver wiegt 50 Wiener Pfunde; man soll nun ein b ℔diges cylindrisches Pulver Cimment nach dem Wiener-Schuhe bestimmen, bey dem der innere Durchmesser der Grundfläche sich zur inneren Höhe verhält, wie $m : n$.

Auf-

Fig. Auflösung. Man setze den inneren Durchmesser $= x$ Wiener-Schuhen; so ist die Höhe $\frac{nx}{m}$, weil $m : n = x :$ Höhe sich verhält; und der Cubikinhalt dieses Cylinders ist $\frac{1}{4}x^2\pi . \frac{nx}{m} = \frac{nx^3\pi}{4m}$ Cb^{I}. Nun ist 1 Cb$^{\text{I}} : \frac{nx^3\pi}{4m}$ Cb$^{\text{I}} = 50$ ℔ : b ℔, und folglich ist $x = \sqrt[3]{\frac{4mb}{50n\pi}}$. Setzen wir nun $m = 1$, $n = 2$, $b = \frac{1}{4}$ ℔; so ist $x = \sqrt[3]{\frac{1}{100\pi}} = 0,1471$ Wiener-Schuhen $= 1^{\text{II}}\ 9^{\text{III}}\ 2^{\text{IV}} =$ dem Durchmesser der Grundfläche eines 8löthigen Pulver-Cimments, dessen Höhe $= 2 . (1^{\text{II}}\ 9^{\text{III}}\ 2^{\text{IV}}) = 3^{\text{II}}\ 6^{\text{III}}\ 4^{\text{IV}}$ ist. Auf eben dieselbe Weise können die Abmessungen aller übrigen Pulver-Cimmenter berechnet werden, wenn man nur für m, n, und b ihre erforderlichen Werthe setzet.

IV. Es ist die Seite einer vollkommen gleichseitigen viereckigen Pyramide gegeben; man soll die Seite eines Würfels finden, dessen Cubikinhalt dem Cubikinhalte dieser Pyramide gleich ist.

Auflösung. Es sey die gegebene Seite der Pyramide $= a$; so ist nach vorgenommener Untersuchung, die ich dem eigenen Nachdenken des Lesers überlasse, der Cubikinhalt dieser Pyramide $= \frac{1}{6}a^3\sqrt{2}$. Es sey ferner die unbekannte Seite des Würfels $= x$; so ist sein Cubikinhalt $= x^3$. Nun ist vermöge der Bedingung der Aufgabe $x^3 = \frac{1}{6}a^3\sqrt{2}$; folglich ist $x = \sqrt[3]{\frac{1}{6}a^3\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt[3]{18}}$.

V. Es ist der Durchmesser einer Kugel gegeben; man soll die Seite eines Würfels von gleichem Inhalte finden.

Auflösung. Es sey der gegebene Durchmesser der Kugel $= d$, und die gesuchte Seite des Würfels $= x$; so ist $x^3 = \frac{1}{6}d^3\pi$, und $x = d\sqrt[3]{\frac{1}{6}\pi} = d . 0,8059955977 = \frac{25d}{31}$.

beyn

beynahe, wenn man den Bruch 0,805995977 (nach 110. Fig. 111.) in $\frac{25}{31}$ verwandelt. Man theile demnach nur den Durchmesser der gegebenen Kugel in 31 gleiche Theile, so sind 25 solche Theile der gesuchten Seite des Würfels ziemlich genau gleich, welcher mit der Kugel einen gleichen Cubikinhalt enthält.

120. VI. Es sey DAQ eine After-Pyramide von der Beschaffenheit, daß sich die zur Grundfläche parallelen Schnitte am Flächeninhalte gegen einander verhalten, wie ihre Entfernungen von dem Scheitel Q, nähmlich der Schnitt DA : EF = PQ : RQ; die Grundfläche sey = B, und die Höhe dieser After-Pyramide sey = a, man soll ihren Cubikinhalt finden.

Auflösung. Man stelle sich vor, daß die Höhe PQ = a in ∞ gleiche Theile getheilet sey, und daß durch diese Theilungspuncte zur Grundfläche parallele Ebenen geleget werden; so wird dadurch die After-Pyramide DAQ in ihre Elemente aufgelöset, die man für Prismen von einer unendlich kleinen Höhe $\frac{a}{\infty}$ ansehen kann. Die Summe dieser Prismen oder Elemente ist der After-Pyramide DAQ gleich. Es ist aber die

$$\text{Summe dieser Elemente} = \frac{B}{\infty}\cdot\frac{a}{\infty} + \frac{2B}{\infty}\cdot\frac{a}{\infty} + \frac{3B}{\infty}\cdot\frac{a}{\infty}$$

$$+ \ldots\ldots + B.\frac{a}{\infty} = \frac{aB}{\infty^2}(1+2+3+4+\ldots\ldots\infty)$$

$= \frac{1}{2}aB$. Es ist also auch DAQ = $\frac{1}{2}aB$, nähmlich der Cubikinhalt dieser After-Pyramide ist gleich dem halben Producte aus der Grundfläche B multipliciret mit der Höhe a.

Auf eben diese Art wird der Cubikinhalt von mehreren Körpern berechnet, welche sich in Elemente auflösen lassen, die unter einander ähnlich sind, und nach einem bekannten Gesetze auf einander folgen. Man findet z. B. daß der Cubikinhalt des Gewölbes DAQ = $\frac{2}{3}aB = \frac{2}{3}$ des Productes aus der Grundfläche B in die Höhe a ist, wenn alle die Bogen DEQ, AFQ, u. s. w. Viertelkreise sind. Die Berechnung der Oberflächen und der Cubikinhalte der Gewölbe von verschie-

Fig. dener Zusammensetzung ist für die Grenzen dieses Lehrbuches zu weitläufig. Derjenige, welcher sich eine genaue Kenntniß hiervon verschaffen will, kann größere über diese Gegenstände handelnde Werke nachschlagen. Doch sind die gegebenen Gründe hinreichend, um in vorkommenden Fällen die dazu gehörigen Aufgaben richtig aufzulösen. Auch die Theorie der sogenannten regelmäßigen Körper kann nach den vorgetragenen Sätzen vollständig entwickelt werden, um daraus Regeln abzuleiten, nach welchen man diese Körper unter gegebenen Bedingungen sowohl verzeichnen, als auch verfertigen kann. Doch ist diese Theorie nach den Gründen des folgenden Hauptstückes weit leichter zu entwickeln. Ein mehreres hierüber ist in Schulze's Taschenbuch der Dreyeckmeßkunst Berlin bey Aug. Mylius 1783 anzutreffen.

Vier-

Viertes Hauptstück.

Von der Trigonometrie.

I. Abschnitt.

Von den trigonometrischen Functionen.

§. 535.

Fig.

Jedes Dreyeck enthält ohne seinen Flächeninhalt in Erwägung zu ziehen, sechs Stücke, nähmlich drey Seiten, und drey Winkel. Sind nun aus diesen sechs Stücken bey einem geradlinigen Dreyecke I. zwey Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel, oder II. zwey Winkel nebst einer Seite, oder III. alle drey Seiten, oder endlich IV. zwey Seiten nebst einem anliegenden rechten oder stumpfen Winkel gegeben; so ist dadurch jederzeit das Dreyeck bestimmet, und die drey übrigen Stücke können nach den bereits vorgetragenen Gründen durch die Verzeichnung gefunden werden. Durch zwey gegebene Seiten und einen anliegenden spitzigen Winkel wird ein geradliniges Dreyeck, welches keinen rechten Winkel enthält, nur dann hinlänglich bestimmt seyn, wenn die dem gegebenen spitzigen Winkel gegenüber stehende Seite größer als die anliegende ist; im entgegengesetzten Falle aber lassen sich jederzeit zwey verschiedene Dreyecke verzeichnen, welche die gegebenen drey Stücke enthalten. Sind z. B. (Fig. 121.) die Längen der zwey Seiten MB und 121.
ME nebst dem anliegenden spitzigen Winkel B gegeben, und man beschreibt aus dem Puncte M mit dem Halbmesser ME einen Kreisbogen; so muß die Gerade BD in zwey Puncten geschnitten werden. Ist nun ME > MB, so muß der Punct B zwischen den zwey Durchschnittspuncten liegen; und es kann daher nur ein einziges Dreyeck entstehen, welches den gege-

be-

Fig. benen Winkel B in sich faßt. Ist aber MB und MC nebst dem
121. Winkel B gegeben; so müssen die beyden Durchschnitte C und A des aus dem Puncte M mit der gegebenen Seite MC beschriebenen Bogens dem Winkel B gegenüber fallen, und daher zwey Dreyecke MAB und MCB entstehen, welche die gegebenen drey Stücke enthalten. Durch drey gegebene Winkel wird endlich ein geradliniges Dreyeck niemahls bestimmt;
41. denn es sind unzählige gleichwinkelige Dreyecke z. B. bpm, bca, BCA, u. s. w. möglich, die alle in Hinsicht auf ihre Seiten von einander sehr verschieden sind.

§. 536.

Die Wissenschaft aus drey gegebenen Stücken eines Dreyeckes, wodurch dasselbe bestimmt wird, die übrigen Stücke durch die Rechnung zu finden, wird die **Trigonometrie** genannt. Ins Besondere heißt sie die **ebene** oder geradlinige Trigonometrie (trigonometria plana), wenn sie sich mit geradlinigen Dreyecken beschäftiget: hingegen wird sie die sphärische Trigonometrie (trigonometria sphaerica) genannt, wenn sie sphärische Dreyecke (486.) zu ihrem Gegenstande hat. Die unbekannten Stücke eines bestimmten Dreyeckes werden aus den gegebenen drey Stücken durch Hülfe gewisser Linien berechnet, die in Zahlen ausgedrucket, und also beschaffen sind, daß sie uns die Winkel zu erkennen geben, sobald sie einmahl bekannt sind, und welche daher **Functionen der Winkel**, oder vielmehr **trigonometrische Functionen** (trigonometrische Hülfs-Linien) heißen. Wir wollen alsogleich zu ihrer Erkenntniß schreiten.

§. 537.

122. Wenn man aus der Spitze C eines Winkels MCN mit einem beliebigen Halbmesser CA einen Umkreis beschreibet, und sodann aus dem Endpuncte B des Bogens AB eine Senkrechte BD auf den Durchmesser Aa zieht, welcher durch den anderen Endpunct A eben dieses Bogens AB geht; so heißt diese Senkrechte BD der Sinus des Bogens AB, oder auch der Sinus des Winkels MCN, weil der Bogen AB

die

die Größe des Winkels MCN bestimmet; und wird also be- Fig.
zeichnet sin arc AB = BD, nähmlich der Sinus des Bo- 122.
gens (arcus) AB ist gleich BD. Verlängert man nun die Senkrechte BD, bis sie den Umkreis in F durchschneidet; so ist BD = $\frac{1}{2}$BF und BAF = 2AB (vermöge 367.); folglich ist sin arc AB = $\frac{1}{2}$BF; es ist aber BF gleich der Sehne des Bogens BAF, nähmlich BF = chord arc BAF, und $\frac{1}{2}$BF = $\frac{1}{2}$chord arc BAF, oder $\frac{1}{2}$BF = $\frac{1}{2}$chord arc 2AB, weil BAF = 2AB ist; folglich ist auch sin arc AB = $\frac{1}{2}$chord arc 2AB: das ist, der Sinus was immer für eines Bogens AB ist nichts anderes, als die Hälfte der Sehne des doppelten Bogens 2AB. Setzen wir nun den Bogen AB, nähmlich arc AB = a; so ist sin a = $\frac{1}{2}$chord 2a, und chord 2a = 2sin$a$; oder auch chord b = 2sin $\frac{1}{2}b$, und sin $\frac{1}{2}b$ = $\frac{1}{2}$chord b, wenn wir 2a = b setzen.

Die Sehne eines Bogens wurde vor Zeiten inscripta (eine eingeschriebene Linie), die Hälfte der Sehne semissis inscriptae, oder abgekürzt s. ins. genannt; und daraus entstand wahrscheinlicher Weise das Wort sinus, welches man deutsch durch Bogenhöhe ausdrucken könnte.

§. 538.

Wenn man aus dem Endpuncte A des Bogens AB auf den Durchmesser Aa die Senkrechte AT errichtet, so berühret diese Senkrechte den Umkreis in dem Puncte A (369.). Ziehet man nun an den anderen Endpunct B den Halbmesser CB, und verlängert denselben, bis er die Berührungslinie AT in dem Puncte T durchschneidet; so heißt das abgeschnittene Stück AT die Tangente des Bogens AB oder des Winkels MCN, und wird also bezeichnet, AT = tang arc AB. Das Stück des verlängerten Halbmessers CT aber wird die Secante eben dieses Bogens oder Winkels genannt, und also geschrieben, CT = sec arc AB. Endlich heißt das Stück AD des Halbmessers zwischen dem Anfangspuncte A des Bogens AB, und zwischen seinem Sinus BD, der Quer-Sinus (sinusversus), nähmlich es ist AD = sinvers arc AB.

Fig. 122. Eben so ist sin arc EB = BG, tang arc EB = EM, sec arc EB = CM, sinvers arc EB = EG.

§. 539.

Wenn der Bogen EB oder der Winkel ECB zu dem Bogen AB oder zu dem Winkel MCN hinzugefüget 90° hervorbringt, so heißt der Bogen EB das Complement (complementum) oder die Ergänzung zu 90° des Bogens AB; und umgekehrt der Bogen AB heißt das Complement des Bogens EB. Der Bogen EB wird auch das Complement des Bogens aB genannt, wenn EB von aB abgezogen 90° hervorbringet, und umgekehrt. Der Sinus BG, die Tangente EM, und Secante CM des Bogens EB, als des Complementes von AB, wird der Cosinus, die Cotangente und die Cosecante des Bogens AB genannt; und umgekehrt des Sinus BD, die Tangente AT, und die Secante CT des Bogens AB, als des Complementes von EB, heißt der Cosinus, die Cotangente, und die Cosecante des Bogens EB, und wird also bezeichnet, BD = cos arc EB, AT = cot arc EB, CT = cosec arc EB. Ingleichen ist cos arc AB = BG, cot arc AB = EM, cosec arc AB = CM, cosvers arc AB = EG, u. s. w. Da nun cos arc AB = BG, und in dem Vierecke CDBG, die Seite BG = DC ist; so ist auch cos arc AB = DC. Eben so ist cos arc EB = GC: das ist, der Cosinus eines Bogens ist nichts anderes als das Stück des Halbmessers zwischen dem Sinus und zwischen dem Mittelpuncte. Ingleichen da cos AB = BG = sin EB, und EB = AE — AB = 90° — AB; so ist cos AB = sin (90° — AB), oder wenn wir AB = *a* setzen, cos *a* = sin (90° — *a*). Eben so ist sin AB = BD = GC = cos EB = cos (AE — AB) = cos (90° — AB), nähmlich sin*a* = cos (90° — *a*).

Gleichwie man nun der Kürze wegen anstatt, der Sinus des Bogens AB ist gleich BD, und der Cosinus eben desselben Bogens AB ist gleich DC, zu schreiben pflegt, sin arc AB = BD, cos arc AB = DC; eben so wird auch

durch

durch AB = arc sin BD, AB = arc cos DC bezeichnet, daß zu dem Sinus BD der Bogen AB, daß zu dem Cosinus CD ebenfalls der Bogen AB gehöre. Ingleichen da tang arc AB = AT, und EM = cot arc AB ist; so ist auch AB = arc tang AT, arc cot EM = AB, u. s. w. Fig. 122.

Diese Linien, Sinus, Cosinus, Tangenten, Cotangenten, Secanten, u. s. w., oder ihre Logarithmen (wenn man sich diese Linien durch Zahlen ausgedrückt vorstellet) sind es, welche man trigonometrische Functionen nennet. Der Kürze wegen kann man die trigonometrischen Functionen der Complements-Winkel Cofunctionen derjenigen Winkel nennen, auf welche sich die Complements-Winkel beziehen.

§. 540.

Nun sind wir im Stande folgende Wahrheiten einzusehen.

I. Zwey Bogen AB und Ba, oder zwey Nebenwinkel ACB und BCa haben einen und eben denselben Sinus BD. Denn aus dem Endpuncte B des Bogens Ba kann auf den Durchmesser aA, welcher durch den anderen Endpunct a eben desselben Bogens gehet, nur die einzige Senkrechte BD gezogen werden, welche Senkrechte = sin arc AB, und auch = sin arc aB ist. Zu eben demselben Sinus BD gehören demnach zwey verschiedene Bogen, welche zusammen 180° gleich sind; und nur andere Nebenumstände müssen bestimmen, welcher aus beyden im erforderlichen Falle zu nehmen sey.

II. Die Sinus wachsen von 0° bis 90°, so daß in einem und demselben Kreise der Sinus von 90° aus allen der größte wird; man nennt ihn gemeiniglich sinus totus (den ganzen Sinus), weil man ihn, als den größten Sinus, für eine ganze Einheit annehmen, und sodann alle die übrigen Sinus in Theilen desselben ausdrucken kann. Es ist leicht einzusehen, daß der sinus totus dem Halbmesser gleich ist; denn wenn arc AE = 90° wird, so ist sin arc AE = sin 90° = EC = dem Halbmesser des Kreises. Wir werden in der Folge den sinus totus zuweilen mit *r*, gemeiniglich aber

Fig. 122. nur mit 1 bezeichnen. Von 90° bis 180° nehmen die Sinus wieder ab; so daß sin 180° = o wird, gleichwie sin 0° = o ist.

III. Die Cosinus nehmen von 0° bis 90° immer ab; so daß cos 90° = o hingegen cos o° = dem Halbmesser = sintot = r ist. Denn es ist augenscheinlich, daß der Cosinus CD des Bogens AB sich in CA = CE = sintot = r verwandelt, wenn der Punct B in A fällt, nähmlich wenn der Bogen AB = o wird; und daß eben derselbe Cosinus CD des Bogens AB verschwindet, und folglich D in C fällt, wenn der Punct B in E fällt. Von 90° bis 180° fangen die Cosinus wieder an zu wachsen, so daß der Cosinus von 180° abermahl = r wird. Nur haben die Cosinus der Bogen über 90° in Hinsicht auf die Cosinus von den Bogen unter 90° eine entgegen gesetzte Lage; z. B. die Lage oder Richtung des Cosinus CD von dem Bogen AB unter 90° aus dem Mittelpuncte gerechnet gehet dem Anfangspuncte A des Bogens AB entgegen; und die Lage oder Richtung des Cosinus Cd von dem Bogen Ab über 90° aus eben demselben Mittelpuncte gerechnet gehet von diesem Anfangspuncte A des Bogens AB hinweg. Aus dieser Ursache sind die Cosinus der Bogen über 90° oder die Cosinus der stumpfen Winkel negativ, da man die Cosinus der Bogen unter 90° für positiv annimmt. Da über dieses CD = cos arc AB, und auch CD = cos arc aB ist, AB + aB aber zusammen = 180° sind; so folgt, daß zwey Bogen, welche zusammen 180° enthalten, oder daß zwey Nebenwinkel einen und denselben Cosinus haben, und daß nur die Zeichen + und — zu erkennen geben; ob dem Cosinus CD der Bogen AB oder aB entspreche. Man muß nähmlich im erforderlichen Falle zu dem Cosinus + CD den Bogen AB, und zu dem Cosinus — CD den Bogen aB = aEA — AB = 180° — AB nehmen.

IV. Die Tangente von 0° ist = o, weil AT verschwindet, so bald B in A fällt, das ist, so bald AB = o wird. Von 0° bis 90° wachsen die Tangenten dergestalt, daß tang 90° = ∞ wird, weil sodann der Halbmesser CE

mit der Berührungslinie AT parallel läuft, und folglich dieselbe erst in einer unendlichen Entfernung, das ist, niemahls durchschneidet. Von 90° bis 180° nehmen die Tangenten wieder ab, so daß abermahl tang 180° = 0 wird. Nur sind die Tangenten der Bogen über 90° negativ, wenn man die Tangenten der Bogen unter 90° für positiv annimmt, weil sie eine entgegen gesetzte Lage haben. Und da abermahl zwey Bogen, welche zusammen 180° gleich sind, eine und dieselbe Tangente haben, weil tang arc AB = AT, und tang arc aB = at = AT ist; so folgt, daß auch in diesem Falle die Zeichen + und — zu erkennen geben, ob einer gegebenen Tangente ein Bogen über 90° oder unter 90° entspreche; nähmlich zu der gegebenen Länge einer Tangente + AT gehört der Bogen AB, und zu der Tangente — at = — AT der Bogen aB = 180° — AB: das ist, zu einer positiven Tangente gehört ein Bogen unter 90°, und zu einer negativen Tangente gehört ein Bogen über 90°, welchen man findet, wenn man den zu eben derselben als positiv betrachteten Tangente gehörigen Bogen unter 90° von 180° abzieht. Fig. 122.

V. Die Cotangente von 0° hingegen ist = ∞, weil der Punct M in eine unendliche Entfernung hinausrücket, sobald B auf A fällt. Von 0° bis 90° nehmen die Cotangenten ab, so daß cot 90° = 0 wird, weil EM immer kleiner wird, jemehr sich der Punct B dem Puncte E nähert. Ueber 90° nehmen sie wieder zu, so daß cot 180° abermahl unendlich wird. Nur sind die Cotangenten in diesem Falle negativ, weil sie auf der Linie EM nicht gegen M, sondern auf der entgegen gesetzten Seite abgeschnitten werden. Auch ist es leicht einzusehen, daß zwey Bogen, welche zusammen 180° ausmachen, gleiche Cotangenten haben, die nur in den Zeichen + und — von einander unterschieden sind; so daß daher zu einer positiven Cotangente ein Bogen unter 90°, und zu einer negativen Cotangente ein Bogen über 90° gehöret.

VI. Eben so wächst die Secante von 0°, wo sie dem Halbmesser gleich ist, bis 90°, wo sie unendlich groß wird; über 90° bis 180° nimmt sie wieder ab, so daß sec 180°

Fig. 122. abermahl dem Halbmesser gleich wird. Die Cosecante hingegen ist bey 0° unendlich groß, bey 90° dem Halbmesser gleich, und bey 180° abermahl unendlich groß.

§. 541.

Setzen wir den Bogen $AB = a$, und den dazu gehörigen Halbmesser $AC = r = BC = EC$; so ist $BD = \sin a$, und $CD = \cos a$. Es ist aber $BD^2 + CD^2 = BC^2$, $CD = \sqrt{(BC^2 - BD^2)}$, und $BD = \sqrt{(BC^2 - CD^2)}$. Folglich ist auch

I. $\sin^2 a + \cos^2 a = r^2$, $\cos a = \sqrt{(r^2 - \sin^2 a)}$, und $\sin a = \sqrt{(r^2 - \cos^2 a)}$. Es ist gewöhnlich was immer für eine Potenz m von $\sin a$ durch $\sin^m a$ zu bezeichnen, welche man eigentlich durch $(\sin a)^m$ ausdrucken sollte.

Ferner ist in den ähnlichen Dreyecken CDB und CAT, $CD : DB = CA : AT$, nähmlich $\cos a : \sin a = r : \text{tang } a$; und folglich ist

II. $\text{tang } a = r \cdot \frac{\sin a}{\cos a}$, $\sin a = \frac{\cos a \cdot \text{tang } a}{r}$ und $\cos a = \frac{r \cdot \sin a}{\text{tang } a}$.

Setzen wir $a = \text{arc } 90°$, so ist $\text{tang } a = \infty$; das heißt, die in dem Puncte A errichtete Tangente kann von dem anderen Schenkel BC niemahls durchschnitten werden, und muß folglich mit demselben parallel laufen, wenn der Winkel $ACB = 90°$ ist.

Eben so ist in den ähnlichen Dreyecken CGB und CEM, CG oder DB : GB oder CD = CE : EM, nähmlich es ist $\sin a : \cos a = r : \cot a$; und folglich

III. $\cot a = r \cdot \frac{\cos a}{\sin a}$, $\sin a = \frac{r \cdot \cos a}{\cot a}$ und $\cos a = \frac{\sin a \cdot \cot a}{r}$.

End-

Endlich ist auch CD : CB = CA : CT, und auch CG Fig.
oder BD : CB = CE : CM, das ist, cos $a : r = r : \sec a$, 122.
und sin $a : r = r : \operatorname{cosec} a$; folglich ist

IV. $\sec a = \frac{r^2}{\cos a}$, und $\operatorname{cosec} a = \frac{r^2}{\sin a}$ u. s. w.

Da ferner AD = CA — CD, und EG = CE — GC ist; so ist

V. sinvers $a = r - \cos a$, und cosvers $a = r - \sin a$.

Aus diesen Grund-Formeln, $\sin^2 a + \cos^2 a = r^2$, tang $a = r \cdot \frac{\sin a}{\cos a}$, $\cot a = r \cdot \frac{\cos a}{\sin a}$, $\sec a = \frac{r^2}{\cos a}$, $\operatorname{cosec} a = \frac{r^2}{\sin a}$, sinvers $a = r - \cos a$, können noch sehr viele hergeleitet werden, wenn man sie mit einander verbindet; das ist, wenn man z. B. den Werth von cos a, oder sin a aus einer oder der anderen Formel nimmt, und denselben in allen übrigen substituiret. Z. B. da in der Formel II. $\sin a = \frac{\cos a \cdot \text{tang } a}{r}$, und in der Formel III. $\sin a = \frac{r \cdot \cos a}{\cot a}$ gefunden worden; so ist auch $\frac{r \cdot \cos a}{\cot a} = \frac{\cos a \cdot \text{tang } a}{r}$, nähmlich:

VI. tang $a \cdot \cot a = r^2$, tang $a = \frac{r^2}{\cot a}$, $\cot a = \frac{r^2}{\text{tang } a}$,

und tang $a : r = r : \cot a$. Da überdieß auch tang $b \cdot \cot b = r^2$ ist, so ist auch tang $a \cdot \cot a =$ tang $b \cdot \cot b$, und tang a : tang $b = \cot b : \cot a$.

Wir überlassen die weitere Ausführung dieser Formeln dem eigenen Fleiße der Anfänger, und müssen noch einige andere Formeln entwickeln, ehe wir zeigen können, wie man die Sinus, Cosinus, Tangenten, u. s. w., z. B. von Minute zu Minute von 0° bis 90° für einen nach Belieben angenommenen Halbmesser in Zahlen berechnet habe.

Es

Fig. Es ist aus dem Vorhergehenden leicht einzusehen, daß es nur erforderlich ist die Sinus und Cosinus bis 45° zu berechnen um die Sinus und Cosinus bis 90° zu haben. Denn ist z. B. einmahl sin 10° und auch cos 10° gefunden, so ist auch zugleich cos 80° und sin 80° ohne weitere Rechnung bekannt, weil $\cos 80° = \sin(90° - 80°) = \sin 10°$, und $\sin 80° = \cos(90° - 80°) = \cos 10°$ ist. Sind einmahl die Sinus und Cosinus gefunden, so ergeben sich die Tangenten und Cotangenten sehr leicht nach den Formeln II. und III. Jedoch ehe wir zu der Berechnung der trigonometrischen Functionen schreiten können, müssen noch folgende Formeln entwickelt werden.

§. 542.

I. $\sin(a+b) = (\sin a . \cos b + \sin b . \cos a) : r$

II. $\cos(a+b) = (\cos a . \cos b - \sin a . \sin b) : r$

III. $\sin(a-b) = (\sin a . \cos b - \sin b . \cos a) : r$

IV. $\cos(a-b) = (\cos a . \cos b + \sin a . \sin b) : r$

123. Um diese Formeln abzuleiten, sey arc AB $= a$, arc BD $= b$, der Halbmesser AC $=$ BC $= r$, und BK $=$ BD; so ist arc AD $= a + b$, arc AK $= a - b$, BE $= \sin a$, EC $= \cos a$, DG $= \sin b$, GC $= \cos b$, DF $= \sin(a+b)$, FC $= \cos(a+b)$, KM $= \sin(a-b)$, und MC $= \cos(a-b)$. Nun finden in den ähnlichen Dreyecken CEB, CPG und DGL zur Berechnung der Stücke LF, DL, CP, GL folgende Proportionen statt:

$$CB : BE = CG : GP \text{ oder } LF; \text{ folglich ist } LF = \frac{BE . CG}{CB},$$

$$\text{und } CB : CE = DG : DL; \text{ folglich ist } DL = \frac{DG . CE}{CB}.$$

Es ist aber $LF + DL = DF$; folglich ist auch

$$DF = \frac{BE . CG}{CB} + \frac{DG . CE}{CB}, \text{ nähmlich es ist}$$

I. $\sin(a+b) = \frac{\sin a \,.\, \cos b}{r} + \frac{\sin b \,.\, \cos a}{r} = (\sin a \,.\, \cos b$ Fig. 123.
$+ \sin b \,.\, \cos a) : r.$

Ferner ist LF — DL = KM, weil wegen der vollkommenen Gleichheit der Dreyecke DGL, GKH die Seite DL = GH = LN ist; folglich ist auch

$KM = \frac{BE \,.\, CG}{BC} - \frac{DG \,.\, CE}{BC}$, nähmlich III. $\sin(a-b)$
$= (\sin a \,.\, \cos b - \sin b \,.\, \cos a) : r.$

Sodann ist CB : CE = CG : CP; folglich ist $CP = \frac{CE \,.\, CG}{CB}$. Endlich ist CB : BE = DG : GL; folglich ist $GL = \frac{BE \,.\, DG}{CB}$. Es ist aber CP — GL = FC wegen GL = PF, und CP + GL = CM wegen GL = KH = MP; folglich ist auch

$FC = \frac{CE \,.\, CG}{CB} - \frac{BE \,.\, DG}{CB}$, und $CM = \frac{CE \,.\, CG}{CB} + \frac{BE \,.\, DG}{CB}$,

nähmlich es ist II. $\cos(a+b) = (\cos a \,.\, \cos b -$
$\sin a \,.\, \sin b) : r$, und IV. $\cos(a-b) = \cos a \,.\, \cos b +$
$\sin a \,.\, \sin b) : r.$

Diese vier so eben entwickelten Formeln kommen in der so genannten trigonometrischen Analysis sehr häufig vor, uud sind daher besonders wohl dem Gedächtnisse einzuprägen.

§. 543.

Setzen wir nun $b = a$, so ist vermöge 542. I.).

I. $\sin 2a = \frac{2 \,.\, \sin a \,.\, \cos a}{r}$, und folglich $\sin a \,.\, \cos a$
$= \frac{1}{2} r \,.\, \sin 2a$. Eben so findet man nach der Formel II. (542.).

II. $\cos 2a = (\cos^2 a - \sin^2 a) : r$, oder $\cos 2a =$
$[\cos^2 a - (r^2 - \cos^2 a)] : r$, nähmlich $\cos 2a =$
$(2\cos^2 a - r^2) : r$, und folglich $2\cos^2 a - r^2 = r.\cos 2a$,

oder

Fig. oder $\cos^2 a = \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}r \cdot \cos 2a$, und endlich $\cos a = \sqrt{(\frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}r \cdot \cos 2a)}$.

Setzen wir ferner in dieser letzten Formel $a = \frac{1}{2}c$, so ist

III. $\cos \frac{1}{2}c = \sqrt{(\frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}r \cdot \cos c)}$ und

IV. $\cos c = \frac{2\cos^2 \cdot \frac{1}{2}c - r^2}{r}$.

Sodann erhalten wir, wenn wir in dieser letzten Formel statt $\cos^2 \frac{1}{2}c$ seinen Werth $r^2 - \sin^2 \frac{1}{2}c$ (aus 541. I.) substituiren.

V. $\cos c = \frac{r^2 - 2\sin^2 \frac{1}{2}c}{r}$, und

VI. $\sin \frac{1}{2}c = \sqrt{(\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}r \cdot \cos c)}$.

Die eben entwickelten Formeln IV. und V. werden uns in der Folge sehr gute Dienste leisten. So z. B. findet man durch Hülfe der Formel V, daß

VII. $\text{sinvers } c = \frac{2\sin^2 \frac{1}{2}c}{r}$ ist. Denn es ist (§. 541. V.)

$\text{sinvers } c = r - \cos c$, und folglich $\text{sinvers } c = r - (r^2 - 2\sin^2 \frac{1}{2}c) : r = 2\sin^2 \frac{1}{2}c : r$, wenn man statt $\cos c$ aus V. seinen Werth substituiret.

Wenn man nun in den Formeln (§. 542. I. und II.) $b = 2a$ setzet, und statt $\sin 2a$ und $\cos 2a$ die eben gefundenen Werthe I. und II. substituiret; so erhält man für $\sin 3a$ und $\cos 3a$ die zugehörigen Werthe, nähmlich $\sin 3a = (3\sin a \cdot \cos^2 a - \sin^3 a) : r^2$, $\cos 3a = (\cos^3 a - 3\cos a \cdot \sin^2 a) : r^2$. Eben so kann darauf $\sin 4a$ $\cos 4a$ gefunden werden, wenn man in eben diesen Formeln (§. 542. I. und II.) $b = 3a$, und für $\sin 3a$, $\cos 3a$ ihre Werthe setzet; u. s. w.

§. 544.

Nun sind wir im Stande einzusehen, wie man für einen angenommenen Halbmesser die Sinus und Cosinus aller Bogen von 0° bis 90° etwa von Minute zu Minute habe berechnen können. Man hat nähmlich bey dieser

Be-

Berechnung den Halbmesser $r = 10.000,000.000 =$ sintot Fig. $= \sin 90°$ gesetzet, um die übrigen Sinus und Cosinus in solchen Theilen zu bestimmen, deren der Halbmesser oder sintot zehn tausend Millionen enthält. Denn daraus folgt erstlich $\sin 30° = 5.000,000.000 = \frac{1}{2}r$, weil $\sin 30° = \frac{1}{2}$ chord $60°$ (vermöge §. 537.) ist. Es ist aber chord $60 = r =$ dem Halbmesser (393. II.); folglich ist auch $\sin 30° = \frac{1}{2}r$. Sodann ist $\cos 30° = \frac{1}{2}r\sqrt{3}$, weil $\cos 30° = \sqrt{(r^2 - \sin^2 30°)} = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}r^2)} = \sqrt{\frac{3}{4}r^2} = \frac{1}{2}r\sqrt{3}$ ist. Diese Größe $\frac{1}{2}r\sqrt{3}$ ist zugleich $\sin 60°$; nähmlich es ist $\sin 60° = \frac{1}{2}r\sqrt{3}$, und $\cos 60° = \frac{1}{2}r$, weil 30 und 60 einander zu 90 ergänzen.

Ferner ist $\sin 18° = \frac{1}{4}r.(-1+\sqrt{5})$. Denn es ist $\sin 18° = \frac{1}{2}$chord $36° =$ der halben Seite eines regelmäßigen Zehneckes, weil die Seite eines regelmäßigen Zehneckes einen Bogen von $36°$ abschneidet. Es ist aber die Seite eines regelmäßigen Zehneckes $= \frac{1}{2}r.(-1+\sqrt{5})$, wenn man den Halbmesser $= r$ setzet (408.), nähmlich es ist chord $36° = \frac{1}{2}r.(-1+\sqrt{5})$, und $\frac{1}{2}$chord $36° = \frac{1}{4}r.(-1+\sqrt{5})$; folglich ist $\sin 18° = \frac{1}{4}r.(-1+\sqrt{5}) = \cos 72°$. Daraus folgt $\cos 18° = \frac{1}{4}r.\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$; weil $\cos 18° = \sqrt{(r^2 - \sin^2 18°)} = \sqrt{[r^2 - \frac{1}{16}r^2.(-1+\sqrt{5})^2]} = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{16}r^2 + \frac{2}{16}r^2\sqrt{5} - \frac{5}{16}r^2)} = \sqrt{(\frac{10}{16}r^2 + \frac{2}{16}r^2\sqrt{5})} = \frac{1}{4}r.\sqrt{(10+2\sqrt{5})} = \sin 72°$ ist.

Sodann ist $\sin 15° = \frac{1}{4}r(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, und $\cos 15° = \frac{1}{4}r(\sqrt{6}+\sqrt{2})$. Denn es ist (vermöge §. 543. VI.) $\sin 15° = \sin \frac{1}{2}30° = \sqrt{(\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}r\cos 30°)} = \sqrt{(\frac{2}{4}r^2 - \frac{1}{2}r.\frac{1}{2}r\sqrt{3})} = \frac{1}{2}r.\sqrt{(2-\sqrt{3})} = \frac{1}{4}r.(\sqrt{6}-\sqrt{2}) = \cos 75°$. Daraus folgt $\cos 15° = \sqrt{(r^2 - \sin^2 15°)} = \sqrt{[r^2 - \frac{1}{16}r^2(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2]} = \sqrt{(r^2 - \frac{6}{16}r^2 + \frac{2}{16}r^2\sqrt{12} - \frac{2}{16}r^2)} = \frac{1}{4}.r\sqrt{(8+4\sqrt{3})} = \frac{1}{4}r(\sqrt{6}+\sqrt{2}) = \sin 75°$.

Aus $\sin 18°$ und $\cos 18°$, $\sin 15°$ und $\cos 15°$ findet man nun (nach den Formeln III. und IV. §. 542.)

sin

Fig. $\sin(18°-15°) = \sin 3°$, und auch $\cos(18°-15°) = \cos 3°$. Es ist nähmlich

$$\sin 3° = \tfrac{1}{15}r.[\sqrt{30}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{(15+3\sqrt{5})}+2\sqrt{(5+\sqrt{5})}] = 52335956{,}43;$$

und $\cos 3° = \tfrac{1}{16}r[\sqrt{30}+\sqrt{2}-\sqrt{6}-\sqrt{10}+2\sqrt{(15+3\sqrt{5})}+2\sqrt{(5+\sqrt{5})}] = 9986295347{,}55.$

Aus diesen wird endlich (nach den Formeln §. 543. III. und VI.) $\sin(1\frac{1}{2}°)$ und $\cos(1\frac{1}{2}°)$, und sodann $\sin\frac{3}{4}°$ und $\cos\frac{3}{4}°$ gefunden. Darauf wird (nach den Formeln §. 542. I. und II.) $\sin(1\frac{1}{2}°+\frac{3}{4}°) = \sin 2\frac{1}{4}°$ und auch $\cos 2\frac{1}{4}°$, ferner $\sin 3\frac{3}{4}°$, $\sin 4\frac{1}{2}°$, $\sin 5\frac{1}{4}°$, $\sin 6°$, $\sin 6\frac{3}{4}°$ .... nebst $\cos 3\frac{3}{4}°$, $\cos 4\frac{1}{2}°$, $\cos 5\frac{1}{4}°$, $\cos 6°$, $\cos 6\frac{3}{4}°$, u. s. w. bis $\sin 45°$ und $\cos 45°$ bestimmet, und in Zahlen entwickelt. Auf diese Art kommen endlich die Sinus und Cosinus von 0° bis 90° von $\frac{3}{4}$ zu $\frac{3}{4}$ Grad zum Vorschein, wenn man die Rechnung nur bis 45° fortsetzet. Da überdieß sin 45° auch aus anderen Gründen bekannt ist, (es ist nähmlich $\sin 45° = \frac{1}{2}\text{chord}\,90° =$ der halben Seite eines eingeschriebenen Quadrates $= \frac{1}{2}r\sqrt{2}$, und auch $\cos 45° = \frac{1}{2}r\sqrt{2} = 7071067812$); so dienet dieser Umstand zugleich zur Probe, ob bey der Berechnung der Sinus und Cosinus kein Fehler eingeschliechen sey. Diese Sinus und Cosinus von $\frac{3}{4}$ zu $\frac{3}{4}$ Grad von 0° bis 90° sind alle außer dem $\sin 90°$ und $\sin 30°$ irrational, und lassen sich nur durch eine Annäherung so genau in Zahlen berechnen, als man es immer verlangen kann.

Damit man nun die Sinus und Cosinus für alle einzelnen Minuten erhalte, ist es allerdings nothwendig einmahl $\sin 1'$ zu finden. Diesen hat man auf folgende Art erhalten. Aus dem $\sin\frac{3}{4}° = \sin 45'$ findet man (nach der Formel §. 543. VI.) $\sin\frac{45}{2}'$, sodann $\sin\frac{45}{4}'$, ferner $\sin\frac{45}{8}'$, aus diesem $\sin\frac{45}{16}'$, endlich $\sin\frac{45}{32}' = 4090615{,}32$, und darauf $\sin\frac{45}{64}' = 2045307{,}7$. Nun zeigte sich bey dieser Berechnung, daß bey dem angenommenen Halbmesser $r = 10.000{,}000.000$ der $\sin\frac{45}{64}'$ in soweit der Hälfte vom $\sin\frac{45}{32}'$ gleich ist gleichwie $\frac{45}{64}'$ genau der Hälfte von

$\frac{45}{128}'$

$\frac{4}{3}\frac{5}{2}'$ gleich ist, daß der Fehler keinen zehntausendmillionten Theil des Halbmessers beträgt. Aus diesem Grunde hat man geschlossen, daß zwischen $\frac{4}{3}\frac{5}{2}'$ und $\frac{4}{6}\frac{5}{4}'$ bey dem angenommenen Halbmesser die Sinus mit den dazu gehörigen Bogen in einer Proportion stehen, und hat sin 1′ durch nachstehende Proportion gefunden; $\frac{4}{6}\frac{5}{4}' : 1' = \sin\frac{4}{6}\frac{5}{4}' : \sin 1'$; das ist $\frac{4}{6}\frac{5}{4}' : 1' = 2045307{,}7 : \sin 1'$, und folglich ist $\sin 1' = \frac{6}{4}\frac{4}{5} . 2045307{,}7 = 2908882{,}06$. Nachdem einmahl sin 1′ bekannt war, so konnte man die Sinus und Cosinus für alle einzelnen Minuten von 1′ bis 90° (nach den Formeln §. 542. I. und II.) berechnen. Es gibt sehr viele Vortheile, durch welche diese sehr beschwerliche Arbeit um vieles abgekürzet, und erleichtert würde. Allein es ist hier der Ort nicht diese Vortheile aus einander zu setzen.

Aus den gefundenen Sinus und Cosinus hat man die Tangenten und Cotangenten nach den Formeln $\text{tang } a = r . \frac{\sin a}{\cos a}$, und $\cot a = r . \frac{\cos a}{\sin a}$ sehr leicht durch eine bloße Division berechnet. Diese berechneten Linien hat man nun in eine Tafel ordentlich eingetragen, und über dieß noch zur größeren Bequemlichkeit zu allen diesen in Zahlen ausgedruckten Linien die entsprechenden gemeinen Logarithmen derselben mit zehn Decimal-Ziffern aufgesuchet, und ebenfalls in die Tafeln ordentlich eingetragen. Da man nun bey der Berechnung dieser Linien $\text{sintot} = r = 10.000{,}000.000$ angenommen hat; so folgt, daß log sintot = 10 ohne Bruch ist.

Die Tafeln in denen sich die berechneten trigonometrischen Functionen befinden, sind unter dem Nahmen der Sinus- oder der trigonometrischen Tafeln hinlänglich bekannt. In den meisten Auflagen der trigonometrischen Tafeln hat man sowohl bey den Sinus und Tangenten, als auch bey ihren zustimmenden Logarithmen die drey letzten Ziffern rechts hinweggelassen, und doch wegen größerer Bequemlichkeit (damit nähmlich immer log sintot = 10 sey) die Kennziffer der Logarithmen ungeändert gelassen; so daß nun zu den in

Fig. Tafeln befindlichen Sinus, Cosinus, Tangenten, u. s. w. die darneben stehenden Logarithmen nur in Hinsicht auf die Dezimal-Ziffern, und nicht in Hinsicht auf die Kennziffer übereinstimmen, welcher Umstand dem bequemen und richtigen Gebrauche von dergleichen Tafeln gar nicht nachtheilig ist, sondern vielmehr denselben befördert, wie es weiter unten erhellen wird.

In einigen trigonometrischen Tafeln befinden sich auch die Secanten nebst ihren zustimmenden Logarithmen. Allein diese sind in der That entbehrlich, weil $\sec a = \frac{r^2}{\cos a}$, $\log \sec a = 2\log r - \log \cos a$, und $\operatorname{cosec} a = \frac{r^2}{\sin a}$, $\log \operatorname{cosec} a = 2\log r - \log \sin a$ ist. Wenn nun zu einer gegebenen Secante b der dazu gehörige Bogen u zu suchen, nämlich wenn aus der Gleichung $\sec u = b$ der unbekannte Bogen u zu finden wäre; so setze man nur $\frac{r^2}{\cos u} = b$, woraus $\cos u = \frac{r^2}{b}$ folget. Man suche demnach nur in den trigonometrischen Tafeln in der mit cosinus bezeichneten Spalte die Zahl $\frac{r^2}{b}$ auf, so sind die dazu gehörigen Grade und Minuten der gesuchte Werth von u. Sollte in der Tafel die Spalte cosinus nicht anzutreffen seyn, so suche man eben dieselbe Zahl $\frac{r^2}{b}$ in der Spalte sinus auf, und ziehe die dazu gehörigen Grade und Minuten von 90° ab; dieser Ueberrest ist der gesuchte Werth von u. Eben so kann zu einer gegebenen Cosecante, wie nicht weniger zu einem gegebenen log sec, log cosec, der dazu gehörige Bogen gefunden werden.

Aus eben derselben Ursache sind die Quer-Sinus entbehrlich, weil $\sin \operatorname{vers} a = \frac{2\sin^2 \frac{1}{2}a}{r}$, log sinvers $a =$

2log

$2\log \sin\frac{1}{2}a + \log 2 - \log r$, und $\log \sin\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}(\log \text{sinvers}a + \log r - \log 2)$ (vermöge §. 543. VII.) ist. Fig.

§. 545.

Die Sinus und Cosinus von 0° bis 90° hätte man durch unendliche Reihen um vieles leichter berechnen können, wenn man sintot $= r = 1$ gesetzet, und sodann alle die übrigen Sinus und Cosinus, welche nach dieser Voraussetzung ächte Brüche seyn müßten, in Decimal-Brüchen also entwickelt hätte, daß etwa allenthalben noch die zehnte Decimal-Stelle zuverlässig wäre. Dieses kann auf folgende Art erhalten werden.

Es ist (nach 451.), wenn man $CD = CA = 1 =$ sintot $CM = x$, und den Bogen $AB = z$ setzet, 87.

$$z = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \cdots$$

Aus dieser Gleichung findet man (nach 288.)

$$x = z - \frac{z^3}{2 \cdot 3} + \frac{z^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{z^7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots;$$

Es ist aber $x = \sin z$, weil $x = CM = EB = \sin AB = \sin z$ ist. Folglich ist

$$\sin z = z - \frac{z^3}{2 \cdot 3} + \frac{z^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{z^7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots$$

Es sey z. B. $z = \text{arc } 1' = \frac{\pi}{10800} = 0{,}0002908882$,

indem man den Halbmesser $= 1$ angenommen hat; so ist sin arc $1'$, nähmlich sin $1' = 0{,}0002908882$ auch in der zehnten Decimal-Ziffer noch vollkommen richtig, weil alle die übrigen Glieder auch an der eilften Stelle noch keine bedeutliche Ziffer geben. Auf diese Art könnten die Sinus von sehr vielen kleinen Bogen etwa bis 8° oder 10° von Minute zu Minute berechnet werden.

Da ferner $\cos z = \sqrt{(r^2 - \sin^2 z)} = \sqrt{(1 - \sin^2 z)}$ ist;

so ist auch $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{2.3.4} - \frac{z^6}{2.3.4.5.6} + \cdots$

wenn

Fig. wenn man den Werth von sin z nähmlich die gefundene unendliche Reihe in die zweyte Potenz erhebet, dieselbe von 1 subtrahiret, und sodann die Quadrat-Wurzel herauszieht. Durch eben diese Reihe könnten die Cosinus von sehr vielen kleinen Bogen etwa bis 10° berechnet werden, welche zugleich die Sinus von 80° bis 90° wären.

Damit die zwey gefundenen Reihen bey der Berechnung der Sinus und Cosinus von größeren Bogen eine bequemere Gestalt erhalten, so müssen dieselben auf folgende Art eingerichtet werden.

Man setze bey dem augenommenen Halbmesser die Länge des Bogens von $90° = c$, und $z = \frac{m}{n} . c$; so ist

$\sin z = \sin \frac{m}{n} . c$, und $\cos z = \cos \frac{m}{n} . c$ oder $\sin z = \sin \frac{m}{n} 90°$, und $\cos z = \cos \frac{m}{n} 90°$, weil der Bogen $c = 90°$ ist. Nun substituire man in den gefundenen zwey Reihen $\sin \frac{m}{n} 90°$ statt $\sin z$, $\cos \frac{m}{n} 90°$ statt $\cos z$, und $\frac{m}{n} . c$ statt z, $\frac{m^2}{n^2} . c^2$ statt z^2, u. s. w; so ist

$$\sin \frac{m}{n} 90° = \frac{m}{n} . c - \frac{m^3}{n^3} . \frac{c^3}{2.3} + \frac{m^5}{n^5} . \frac{c^5}{2.3.4.5} - \frac{m^7}{n^7} . \frac{c^7}{2..7} + ..$$

$$\cos \frac{m}{n} 90° = 1 - \frac{m^2}{n^2} . \frac{c^2}{2} + \frac{m^4}{n^4} . \frac{c^4}{2.3.4} - \frac{m^6}{n^6} . \frac{c^6}{2..6} + ..$$

Es ist aber, da der Halbmesser $= 1$ gesetzet worden, der Bogen von 90 Graden $c = \frac{1}{2}\pi$, nähmlich es ist $c = 1,57079632679$, $\frac{c^2}{2} = 1,2337005501 4$, $\frac{c^3}{2.3} = 0,64596409751$, u. s. w.; folglich ist auch nach gehöriger Substitution

sin

$$\sin \frac{m}{n} 90^\circ =$$

Fig.

$$\left\{\frac{m}{n} \cdot 1{,}57079632679\right\} - \left\{\frac{m^3}{n^3} \cdot 0{,}64596409751\right\}$$
$$+\left\{\frac{m^5}{n^5} \cdot 0{,}07969262625\right\} - \left\{\frac{m^7}{n^7} \cdot 0{,}00468175414\right\}$$
$$+\left\{\frac{m^9}{n^9} \cdot 0{,}00016044118\right\} - \left\{\frac{m^{11}}{n^{11}} \cdot 0{,}00000359884\right\}$$
$$+\left\{\frac{m^{13}}{n^{13}} \cdot 0{,}00000005692\right\} - \left\{\frac{m^{15}}{n^{15}} \cdot 0{,}00000000067\right\}$$
$$+\left\{\frac{m^{17}}{n^{17}} \cdot 0{,}00000000000\right\} - \left\{\frac{m^{19}}{n^{19}} \cdot 0{,}00000000000\right\}$$

$$\cos \frac{m}{n} 90^\circ = 1$$

$$\left\{\frac{m^4}{n^4} \cdot 0{,}25366950790\right\} - \left\{\frac{m^2}{n^2} \cdot 1{,}23370055014\right\}$$
$$+\left\{\frac{m^8}{n^8} \cdot 0{,}00091926027\right\} - \left\{\frac{m^6}{n^6} \cdot 0{,}02086348076\right\}$$
$$+\left\{\frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0{,}00000047109\right\} - \left\{\frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0{,}00002520204\right\}$$
$$+\left\{\frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0{,}00000000007\right\} - \left\{\frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0{,}00000000639\right\}$$
$$+\left\{\frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0{,}00000000000\right\} - \left\{\frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0{,}00000000000\right\}$$

Wäre nun nach diesen Formeln z. B. sin 9° zu berechnen, so setze man $\frac{m}{n} 90^\circ = 9^\circ$, nähmlich $\frac{m}{n} = \frac{9^\circ}{90^\circ} = \frac{1}{10}$; und substituire $\frac{1}{10}$ statt $\frac{m}{n}$, so wird man alsogleich sin 9° = 0,15643446504 erhalten, wenn man nur zwey positive, und zwey negative Glieder der vorhergehende Reihe entwickelt. Wäre sin (59° 30′) = cos (30° 30′) zu entwickeln

Fig. ckeln, so müßte man $\frac{m}{n} 90° = 30° 30' = 30\frac{1}{2}° = \frac{61°}{2}$, nähmlich $\frac{m}{n} = \frac{61}{2.90} = \frac{61}{180}$ setzen, und in der zweyten Gleichung $\frac{61}{180}$ statt $\frac{m}{n}$ substituiren; und so würde man sehr geschwinde $\cos(30° 30')$, nämlich $\sin(59° 30')$ erhalten.

Da in diesen beyden Reihen $\frac{m}{n}$ niemahls größer werden kann als $\frac{1}{2}$ (wenn man nähmlich $\sin 45°$, oder auch $\cos 45°$ berechnen will, muß $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ gesetzet werden); so ist es leicht einzusehen, daß diese Reihen sehr schnell abnehmen, und daß folglich die Sinus und Cosinus auf diese Art um vieles leichter zu berechnen wären, als nach der vorigen Methode.

§. 546.

Die Sinus und Cosinus, welche man durch diese unendlichen Reihen erhalten hätte, würden zu einem Kreise gehören, dessen Halbmesser $= 1$ ist. Auch die trigonometrischen Formeln, werden meistens für den Halbmesser $r = 1$ aufgestellet; weil sie dadurch eine einfachere Gestalt erhalten, und doch sehr leicht, wenn sie logarithmisch behandelt werden sollten, auf den Halbmesser $r = 10.000,000.000$ gebracht werden können. Man darf sie nur für diesen Fall mit r multipliciren, weil überhaupt die trigonometrischen Linien von ähnlichen Bogen in verschiedenen Kreisen sich gegen einander verhalten, wie die dazu gehörigen Halbmesser. Denn
124. in den ähnlichen Dreyecken BDC und bdC findet folgende Proportion statt; $bC : BC = bd : BD$, oder wenn wir $bC = 1$ und $BC = r$ setzen, $1 : r = bd : BD$; folglich ist $BD = r . bd$. Ingleichen $bC : BC = at : AT$, nähmlich $1 : r = at : AT$, folglich ist $AT = r . at$; u. s. w.

Umgekehrt, die für einen Halbmesser $= r$ berechneten Sinus, Cosinus, Tangenten u. s. w. lassen sich für den Halb-

Halbmesser = 1 einrichten, wenn man sie durch r dividiret. Fig. Z. B. Da in einigen Sinus-Tafeln sintot = r = 100000,00 und sin $1' = 29{,}09$, tang $89° = 5728996{,}2$ anzutreffen ist; so ist, wenn man sintot = 1 setzet, sin $1' = \frac{29{,}09}{100000{,}00}$

$= 0{,}0002909$, tang $89° = \frac{5728996{,}2}{100000{,}00} = 57{,}289962$,

u. s. w.

In eben dieser Voraussetzung sintot = 1, ist log sin $1' = 6{,}4637261 - 10 = 0{,}4637261 - 4$, log sin $30° = 0{,}6989700 - 1$, u. s. w.; es ist in dergleichen Fällen gemeiniglich vortheilhafter die Subtraction nur anzuzeigen, und nicht wirklich zu verrichten, wie es schon (im I. B. §. 265.) erwähnet worden ist.

§. 547.

Der Gebrauch der trigonometrischen Tafeln läßt sich am besten erlernen, wenn man eine solche Tafel in die Hände nimmt, und sich zuerst die Einleitung, welche gemeiniglich solchen Tafeln beygefüget ist, dann auch die innere Einrichtung derselben bekannt machet. Hierzu dürfte vorzüglich dienlich seyn, mein Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch, anstatt der kleinen Vlacquischen, Wolfischen, und anderen dergleichen meistens sehr fehlerhaften logarithmisch-trigonometrischen Tafeln, für die Mathematik-Beflissenen eingerichtet; 2te verbesserte und vermehrte Auflage, Leipzig in der Weidmannischen Buchhandlung 1800. Denjenigen welche sich mit der ausübenden Mathematik beschäftigen, dürften meine Logarithmisch-trigonometrische Tafeln; nebst anderen zum Gebrauche der Mathematik eingerichteten Tafeln und Formeln in zwey Bänden, Leipzig in der Weidmannischen Buchhandlung 1797, sehr nützlich seyn; so wie diejenigen, welche äußerst feine mathemathische Berechnungen zu machen haben, meine Vollständige Sammlung größerer logarithmisch-trigonometrischer Tafeln (Thesaurus logarithmorum completus in Folio) Leipzig in der Weidmannischen Buch-

Fig. Handlung 1794 hierzu geeignet finden. Jeder dieser Tafeln ist eine Anleitung zu deren Gebrauche beygefüget. Aus dieser Ursache merken wir hier davon nur Folgendes an:

I. Zu einem Winkel oder Bogen, der nebst den Graden und Minuten auch Secunden enthält, findet man in den Tafeln, die nur von Minute zu Minute berechnet sind, die zugehörige trigonometrische Linie oder ihren Logarithmus (mit einem Worte die trigonometrische Function) auf folgende Art:

60 Secunden verhalten sich zu den gegebenen Secunden, gleichwie die Differenz der Functionen von dem nächst größeren und nächst kleineren Winkel in den Tafeln sich zu einer 4ten Proportional-Zahl verhält. Diese gefundene Proportional-Zahl wird nun zu der Function des nächst kleineren Winkels addiret, wenn mit den Winkeln auch die Functionen wachsen, oder davon abgezogen, wenn die Functionen abnehmen, da die Winkel wachsen; und das Resultat hiervon ist die gesuchte Function von dem gegebenen Winkel, der nebst den Graden und Minuten auch Secunden enthält.

Z. B. Es sey zu suchen log sin $(53^\circ\ 28'\ 54'')$,

so ist	log sin $(53^\circ\ 29')$	$= 9{,}9050852$
und	log sin $(53^\circ\ 28')$	$= 9{,}9049916$
Differenz für 1′ oder 60″		$= +936$
folglich 60″:54″ = 936 : x, nähml. x		$= 842$
und weil .. .. log sin	$(53^\circ\ 28')$ ..	$= 9{,}9049916$
die vierte Zahl x wegen	54″	$= +842$
so ist	log sin $(53^\circ\ 28'\ 54'')$	$= 9{,}9050758$

Z gleichen es sey zu suchen log cot $(53^\circ\ 28'\ 54'')$

so ist	log cot $(53^\circ\ 29')$	$= 9{,}8694731$
und	log cot $(53^\circ\ 28')$	$= 9{,}8697372$
Differenz für 1′ oder 60″		$= -2641$
folgl. 60″:54″ = −2641 : x, nähml. x		$= -2377$
und weil	log cot $(53^\circ\ 28')$	$= 9{,}8697372$
die vierte Zahl x wegen	54″	$= -2377$
so ist	log cot $(53^\circ\ 28'\ 54'')$	$= 9{,}8694995$

II.

II. Zu einer gegebenen trigonometrischen Function, die in den Tafeln nicht genau anzutreffen ist, wird der dazu gehörige Winkel oder Bogen in Graden, Minuten und Secunden auf folgende Art gefunden: Fig.

Die Differenz der nächst größeren und nächst kleineren Function in den Tafeln verhält sich zu der Differenz zwischen der gegebenen und nächst kleineren Function, gleichwie sich 60″ zu einer 4ten Proportional-Zahl verhalten. Diese 4te Proportional-Zahl gibt eine Anzahl von Secunden, die man zu den Graden und Minuten der nächst kleineren Function addiren, wenn mit den Winkeln auch die Functionen wachsen, oder davon abziehen muß, wenn die Functionen abnehmen, da die Winkel wachsen.

Es sey z. B. 9,8807832 der Logarithmus des Cosinus eines gewissen Winkels, so findet man in den Tafeln, daß der zugehörige Winkel größer als 40° 32′, und kleiner als 40° 33′ ist.

Denn es ist .... log cos (40° 33′) =	9,8807215			
und ..... log cos (40° 32′) =	9,8808296			
Differenz für 1′ oder 60″ ..... =	—	1081		
der gegebene Logarithmus ..... =	9,8807832			
der nächst kleinere log cos (40° 33′) =	9,8807215			
Differenz ..... =		617		
folglich — 1081 : 617 = 60″ : x nähml. x =	—	34″		
da nun der nächst kleineren Function	40°	33′		
und der 4ten Zahl x entsprechen		—	34″	
so ist der gesuchte Winkel oder Bogen =	40°	32′	26″	

Fig. Ingleichen es sey 10,1948376 der Logarithmus von der Tangente eines gewissen Winkels,

so ist ..... log tang (57° 27′) = 10,1949767
und ..... log tang (57° 26′) = 10,1946981

Differenz für 1′ oder 60″ ..... = + 2786
der gegebene Logarithmus ..... = 10,1948376
der nächst kleinere log tang (57° 26′) = 10,1946981

Differenz ..... = 1395
folglich 2786: 1395 = 60″ : x nähml. x = + 30″
da nun der nächst kleineren Function 57°26′
und der 4ten Zahl x entsprechen + 30″
so ist der gesuchte Winkel oder Bogen = 57° 26′30″

124. Der Grund von der angeführten Proportion beruhet im Folgenden. Es sey MN = arc 1′ = arc 60″, und Mm = arc x'', z. B. Mm = arc 25″, so kann MmN für eine gerade Linie angesehen werden; und sodann ist das Dreyeck Mnm ∽ MpN; folglich MN : Mm = pN : nm, nähmlich 60″ verhalten sich zu x'' = TN — QM (die Differenz der Functionen z. B. der Sinus) sich zu nm verhält, welches Gefundene nm zu QM addiret wird um Sm als den Sinus von Pm zu erhalten. Ingleichen pN : nm = MN : Mm, oder TN — QM : Sm — QM = 60″ : x'', und diese gefundenen x'' werden zu PM addiret um Pm zu erhalten; u. s. w. Da ferner bey sehr großen Zahlen und bey kleinen Unterschieden derselben, sich die Differenzen der Zahlen so gegen einander verhalten, wie die Differenzen ihrer Logarithmen; so gilt die eben angeführte Proportion auch von den Logarithmen der Functionen, welche um eine sehr kleine Größe (hier nicht über 60 Secunden) von einander unterschieden sind.

Diese Proportion ist bey den Sinus und Cosinus von allen großen und kleinen Winkeln, wie nicht weniger bey den Tangenten von allen Winkeln unter 45°, wenn sie noch so klein sind, so gut als vollkommen richtig. Bey den Tangenten und deren Logarithmen nahe bey 90°, bey den Logarithmen der Sinus und der Tangenten von kleinen Winkeln hin-

hingegen entfernt sie sich etwas von der Wahrheit, und zwar hauptsächlich, wenn man zu dem Winkel die Function suchet. Aus dieser Ursache ist es sehr gut sich mit solchen Tafeln zu versehen, in denen die trigonometrischen Functionen für die ersten 3 oder 4, und auch für die letzten 3 oder 4 Grade des Quadranten von 10 zu 10 Secunden berechnet sind. Fig.

§. 548.

Wir wollen aus den (542.) gefundenen Gleichungen noch einige Formeln herleiten; als

I. $\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} r \cdot \cos(a - b) - \frac{1}{2} r \cdot \cos(a + b)$, wenn man II. von IV. in (542.) abzieht, und gehörig reduciret.

II. $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} r \cdot \cos(a + b) + \frac{1}{2} r \cdot \cos(a - b)$, wenn man II. und IV. in (542.) addiret.

III. $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} r \cdot \sin(a + b) + \frac{1}{2} r \cdot \sin(a - b)$, wenn man I. und III. in (542.) zusammen addiret.

IV. $\sin b \cdot \cos a = \frac{1}{2} r \cdot \sin(a + b) - \frac{1}{2} r \cdot \sin(a - b)$, wenn man III. von I. in (542.) abzieht.

§. 549.

In diesen 4 letzten Formeln setze man $a + b = p$, und $a - b = q$, nähmlich $a = \frac{1}{2}(p + q)$, und $b = \frac{1}{2}(p - q)$; so erhält man nachstehende vier Formeln

I. $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{1}{2}(p + q) \cdot \cos \frac{1}{2}(p - q) : r$, aus III.

II. $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{1}{2}(p - q) \cdot \cos \frac{1}{2}(p + q) : r$, aus IV.

III. $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{1}{2}(p + q) \cdot \cos \frac{1}{2}(p - q) : r$, aus II.

IV. $\cos q - \cos p = 2 \sin \frac{1}{2}(p + q) \cdot \sin \frac{1}{2}(p - q) : r$, aus I.

§. 550.

In den zwey letzten Formeln III. und IV. (549.) setze man $q = 0°$, so ist $\cos q = \cos 0° = \text{sintot} = r$, und folglich

I. $r + \cos p = \frac{2 \cos^2 \frac{1}{2} p}{r}$,

II. $r - \cos p = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} p}{r}$;

III.

Fig. III. $\text{tang}^2 \frac{1}{2}p = \frac{r^2(r - \cos p)}{r + \cos p}$, wenn man die Formel II. durch I. theilet, und gehörig reduciret. Aus den Formeln I. und II. findet man auch $\cos p = (2\cos^2 \frac{1}{2}p - r^2) : r$, und $\cos p = (r^2 - 2\sin^2 \frac{1}{2}p) : r$, welches mit §. 543. IV und V übereintrift.

§. 551.

Ferner ist auch

I. $\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{\text{tang} \frac{1}{2}(p+q)}{\text{tang} \frac{1}{2}(p-q)}$, oder

$\sin p + \sin q : \sin p - \sin q = \text{tang} \frac{1}{2}(p+q) : \text{tang} \frac{1}{2}(p-q)$.

Denn man dividire nur I. durch II. in (549.), so ist $\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q}$

$= \frac{2\sin \frac{1}{2}(p+q) \cdot \cos \frac{1}{2}(p-q) : r}{2\sin \frac{1}{2}(p-q) \cdot \cos \frac{1}{2}(p+q) : r} = \frac{\sin \frac{1}{2}(p+q)}{\cos \frac{1}{2}(p+q)} \times \frac{\cos \frac{1}{2}(p-q)}{\sin \frac{1}{2}(p-q)} = \frac{\text{tang} \frac{1}{2}(p+q)}{r} \times \frac{\cot \frac{1}{2}(p-q)}{r} =$

$\frac{\text{tang} \frac{1}{2}(p+q)}{\text{tang} \frac{1}{2}(p-q)}$, weil (vermöge 541. II. und III.)

$\text{tang}\ a = r \cdot \frac{\sin a}{\cos a}$, $\cot a = r \cdot \frac{\cos a}{\sin a}$, oder $\frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\text{tang}\ a}{r}$, $\frac{\cos a}{\sin a} = \frac{\cot a}{r}$, und (541. VI.) $\cot a = \frac{r^2}{\text{tang}\ a}$ ist.

II. $\frac{\sin p + \sin q}{\cos p + \cos q} = \frac{\text{tang} \frac{1}{2}(p+q)}{r}$, wenn man in (549.) I. durch III. theilet, und gehörig reduciret; u. s. w.

§. 552.

Aus (542.) können noch nachstehende Formeln hergeleitet werden.

I. $\text{tang}\ (a+b) = \frac{r^2 \cdot (\text{tang}\ a + \text{tang}\ b)}{r^2 - \text{tang} a \cdot \text{tang}\ b}$;

denn

denn es ist tang $(a+b) = r \cdot \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$ (vermöge 541. II.), Fig.

und folglich auch (nach 542. I. und II.) tang $(a+b)$

$$= r \cdot \frac{(\sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a) : r}{(\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b) : r} =$$

$$\frac{(r \cdot \sin a \cdot \cos b + r \cdot \sin b \cdot \cos a) : \cos a \cdot \cos b}{(\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b) : \cos a \cdot \cos b}$$

$$= \frac{\frac{r \cdot \sin a}{\cos a} + \frac{r \cdot \sin b}{\cos b}}{1 - \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \frac{\sin b}{\cos b}} = \frac{\tang a + \tang b}{1 - \frac{\tang a}{r} \cdot \frac{\tang b}{r}} =$$

$$\frac{r^2 \cdot (\tang a + \tang b)}{r^2 - \tang a \cdot \tang b}.$$

II. tang $(a-b) = \frac{r^2 (\tang a - \tang b)}{r^2 + \tang a \cdot \tang b}$, wenn man in (542.) III. durch IV. dividiret, sodann Zähler und Nenner durch $\cos a \cdot \cos b$ theilet, und endlich gehörig reduciret.

Eben so findet man

III. $\cot(a+b) = \frac{r^2 - \tang a \cdot \tang b}{\tang a + \tang b}$;

IV. $\cot(a-b) = \frac{r^2 + \tang a \cdot \tang b}{\tang a - \tang b}$.

Nun setze man in den Formeln I. und III. $a = b$, so ist

V. tang $2a = \frac{r^2 \cdot 2 \tang a}{r^2 - \tang^2 a}$; und VI. cotang $2a = \frac{r^2 - \tang^2 a}{2 \tang a}$.

Anmerkung.

Aus den bereits entwickelten Formeln können noch viele andere hergeleitet werden, wenn man sie ferner durch die Addition, Subtraction, Multiplication, Division und Substitution mit einander verbindet; wenn man einen Bogen a, oder b, oder p einmahl $= 90°$, ein andermahl $= 0°$, einmahl $= 30°$, ein andermahl $= 45°$ setzet; und sich dabey erinnert, daß sin $90° = r$, cos $90° = 0$, sin $0° = 0$,

cos

Fig. $\cos 0^\circ = r$, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2} r$, $\cos 30^\circ = \frac{1}{2} r \sqrt{3}$, $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{2} r \sqrt{2}$, $\operatorname{tang} 45^\circ = \frac{r \cdot \sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = r$ ist.

124. u. s. w. Daß $\operatorname{tang} 45^\circ = r$ ist, erhellet auch daher, weil das Dreyeck A I C gleichschenkelig, und folglich AT = AC = dem Halbmesser ist, so bald man den Bogen AB oder den Winkel ACT = 45° sezet. Die trigonometrischen Formeln erhalten eine etwas einfachere Gestalt, wenn man den Halbmesser r, oder den sinus immer = r annimmt. Alle diese bisher entwickelten, und noch mehrere andere trigonometrischen Formeln, welche bey dem Gebrauche vorkommen können, sind in einem Anhange diesem Lehrbuche beygefüget, damit man sie alle überblicken, und bey der Anwendung sogleich die Nöthige auswählen kann. Die fähigeren Anfänger können ihre Kräfte versuchen, um sich von der Richtigkeit derselben zu überzeugen.

§. 553.

Wenn man was immer für einen Kreisbogen $= z$, und seinen Halbmesser $r = 1$ sezet, so ist

$$\operatorname{tang} z = z + \frac{2z^3}{2.3} + \frac{16z^5}{2.3.4.5} + \frac{272z^7}{2.3..7} + \frac{7936z^9}{2.3..9} + \ldots;$$

denn es ist in dieser Voraussetzung $\operatorname{tang} z = \frac{\sin z}{\cos z}$; folglich auch (vermöge 545.).

$$\operatorname{tang} z = \frac{z - \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^5}{2.3.4.5} - \frac{z^7}{2.3....7} + ...}{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{2.3.4} - \frac{z^6}{2.3.4.5.6} + ...}$$

und endlich ist nach verrichteter Division

$$\operatorname{tang} z = z + \frac{2z^3}{2.3} + \frac{16z^5}{2.3.4.5} + \frac{272z^7}{2.3..7} + \frac{7936z^9}{2.3..9} + \ldots$$

Eben so kann cot z durch eine unendliche Reihe ausgedrucket werden. Diese zwey Reihen könnte man sodann eben so einrichten, wie es (545.) bey dem sin z und cos z ge-

gezeiget worden ist, wenn es erforderlich wäre die Tangenten und Cotangenten zu berechnen. Fig.

Nun setze man tang $z = y$, so ist

$$y = z + \frac{2z^3}{2.3} + \frac{16z^5}{2.3.4.5} + \frac{272z^7}{2.3.4.5.6.7} + \text{..... .....}$$

Aus dieser Gleichung findet man

$$z = y - \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 - \tfrac{1}{7}y^7 + \tfrac{1}{9}y^9 - \tfrac{1}{11}y^{11} + \text{.....}$$

wenn man $z = Ay + By^3 + Cy^5 + Dy^7 +$ .. setzet, und nach (288.) die unbekannten Größen A, B, C, D .. bestimmet.

Da nun $y =$ tang z ist, so ist umgekehrt ein Kreisbogen

$$z = \text{tang } z - \tfrac{1}{3}\text{tang}^3 z + \tfrac{1}{5}\text{tang}^5 z - \tfrac{1}{7}\text{tang}^7 z + \text{.....} \quad \mathfrak{A}$$

wenn der Halbmesser $= 1$ gesetzet wird.

Setzen wir nun $z =$ arc $45°$, so ist tang $z =$ tang $45°$ $= 1 =$ dem Halbmesser; und folglich

$$\text{arc } 45° = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} - \tfrac{1}{15} + \text{..}$$

$$= 2.\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \frac{1}{13.15} + \text{.. .. ..}\right)$$

Es ist aber arc $45° = \frac{1}{4}\pi$, weil man den Halbmesser $= 1$ gesetzet hat; folglich ist auch

$$\tfrac{1}{4}\pi = 2.\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \text{.. .. ..}\right), \text{ und}$$

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \frac{1}{13.15} + \frac{1}{17.19} + \text{..} = \tfrac{1}{8}\pi,$$

das ist die Summe der unendlichen Reihe, von der wir (313. Anmerk. I.) Erwähnung gemacht haben, ist $= \frac{1}{8}\pi$ $= 0{,}3926990817$. Wenn sich demnach diese Reihe vollkommen genau summiren ließe, so könnte auch der Werth von π vollkommen genau gefunden werden; und umgekehrt.

Setzen wir hingegen $z =$ arc $30° = \frac{1}{6}\pi$, so ist

$$\text{tang } z = \text{tang } 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3};$$ und

folglich auch, wenn wir in der Gleichung $\mathfrak{A}$ für z und tang z ihre Werthe $\frac{1}{6}\pi$ und $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ gehörig substituiren,

$\frac{1}{6}\pi$

Fig.

$$\tfrac{1}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{1.3} - \frac{\sqrt{3}}{3.3^2} + \frac{\sqrt{3}}{5.3^3} - \frac{\sqrt{3}}{7.3^4} + \frac{\sqrt{3}}{9.3^5} - \frac{\sqrt{3}}{11.3^6} + \ldots$$

Aus dieser Gleichung findet man, wenn man jede zwey neben einander stehende Glieder auf eine gleiche Benennung bringet und schicklich reduciret,

$$\pi = \frac{1}{1.3}.\left(\frac{16\sqrt{3}}{3^1}\right) + \frac{2}{5.7}.\left(\frac{16\sqrt{3}}{3^3}\right) + \frac{3}{9.11}.\left(\frac{16\sqrt{3}}{3^5}\right) + \frac{4}{13.15}.\left(\frac{16\sqrt{3}}{3^7}\right) + \frac{5}{17.19}.\left(\frac{16\sqrt{3}}{3^9}\right) + \ldots\ldots\ldots$$

Endlich ist, wenn man nach der Ordnung die in Klammern eingeschlossenen Glieder mit A, B, C, D, ... bezeichnet,

$$\pi = \frac{1}{1.3}.\left(\frac{16\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{2}{5.7}.\left(\frac{A}{9}\right) + \frac{3}{9.11}.\left(\frac{B}{9}\right) + \frac{4}{13.15}.\left(\frac{C}{9}\right) + \frac{5}{17.19}.\left(\frac{D}{9}\right) + \frac{6}{21.23}.\left(\frac{E}{9}\right) + \frac{7}{25.27}.\left(\frac{F}{9}\right) + \frac{8}{29.31}.\left(\frac{G}{9}\right) + \frac{9}{33.35}.\left(\frac{H}{9}\right) + \ldots\ldots\ldots$$

Durch diese unendliche Reihe, die sehr schnell abnimmt, könnte die Annäherung zu dem Werthe von π sehr leicht und geschwinde berechnet werden.

Endlich setze man auch in der Gleichung A einmahl a und dann b statt z, so ist $a = \text{tang}\,a - \frac{1}{3}\text{tang}^3 a + \ldots\ldots$ oder $2a = 2.(\text{tang}\,a - \frac{1}{3}\text{tang}^3 a + \frac{1}{5}\text{tang}^5 a - \frac{1}{7}\text{tang}^7 a + \ldots)$, und $b = \text{tang}\,b - \frac{1}{3}\text{tang}^3 b + \frac{1}{5}\text{tang}^5 b - \frac{1}{7}\text{tang}^7 b + \ldots$ folglich auch durch die Addition,

$$2a + b = \left[\begin{array}{l} 2.(\text{tang}\,a - \frac{1}{3}\text{tang}^3 a + \frac{1}{5}\text{tang}^5 a - \frac{1}{7}\text{tang}^7 a + \ldots) \\ + \text{tang}\,b - \frac{1}{3}\text{tang}^3 b + \frac{1}{5}\text{tang}^5 b - \frac{1}{7}\text{tang}^7 b + \ldots \end{array}\right] \text{B.}$$

Um diese Reihen zur Entwickelung des Werthes von π anwenden zu können, setze mau den Bogen $2a + b$ einem ausnehmenden Theile des Umfanges gleich, und bestimme dann für tang a und tang b die zugehörigen Werthe. Am

leich-

leichtesten wird dieses geschehen, wenn man $2a+b=\frac{1}{4}\pi=45°$ Fig. setzet; weil in diesem Falle tang $(2a+b)$ = tang $45° = 1$ wird. Es ist aber (552. I.) tang $(2a+b)=\frac{\text{tang}2a+\text{tang}b}{1-\text{tang}2a.\text{tang}b}=$

$$(\frac{2\text{tang}a}{1-\text{tang}^2a}+\text{tang}b):(1-\frac{2\text{tang}a}{1-\text{tang}^2a}.\text{tang}b)\,(552.\text{V.})=1$$

und $2\text{tang}a+\text{tang}b-\text{tang}^2a.\text{tang}b=1-\text{tang}^2a-2\text{tang}a.\text{tang}b$

nähmlich $\text{tang}b=\frac{1-\text{tang}^2a-2\text{tang}a}{1-\text{tang}^2a+2\text{tang}a}=1-\frac{4\text{tang}a}{1-\text{tang}^2a+2\text{tang}a}$.

Nun kann man für tang a einen beliebigen Werth annehmen, und daraus tang b bestimmen. Setzet man, da sowohl tang a als auch tang b echte Brüche seyn müssen, tang $a = \frac{1}{3}$, welches der einfachste Fall ist; so ist

$$\text{tang}\,b=1-\tfrac{4}{3}:(1-\tfrac{1}{9}+\tfrac{2}{3})=1-\tfrac{12}{9}:(\frac{9-1+6}{9})=$$

$1-\frac{12}{14}=\frac{1}{7}$. Substituiret man ferner alle diese Werthe nähmlich $2a+b=\frac{1}{4}\pi$, tang $a = \frac{1}{3}$, tang $b = \frac{1}{7}$ in der Gleichung (B); so ist

$$\frac{1}{4}\pi=\left\{\begin{array}{l}2.(\frac{1}{3}-\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}-\frac{1}{7.3^7}+\frac{1}{9.3^9}-\frac{1}{11.3^{11}}+..)\\ +\frac{1}{7}-\frac{1}{3.7^3}+\frac{1}{5.7^5}-\frac{1}{7.7^7}+\frac{1}{9.7^9}-\frac{1}{11.7^{11}}+..\end{array}\right\}$$

und endlich ist, wenn man in dieser Gleichung jede zwey neben einander stehende Brüche auf eine gleiche Benennung bringet, und schicklich reduciret;

$$\pi=8\left\{\begin{array}{l}\frac{26}{1.3}.(\frac{1}{3^3})+\frac{58}{5.7}.(\frac{1}{3^7})+\frac{90}{9.11}.(\frac{1}{3^{11}})+\frac{122}{13.15}.(\frac{1}{3^{15}})+..\\ +\frac{73}{1.3}.(\frac{1}{7^3})+\frac{169}{5.7}.(\frac{1}{7^7})+\frac{265}{9.11}.(\frac{1}{7^{11}})+\frac{361}{13.15}.(\frac{1}{7^{15}})+\end{array}\right\}$$

oder wenn man nach der Ordnung die in Klammern eingeschlossenen Glieder mit $A, B, C, D, \ldots a, b, c, d, \ldots$ bezeichnet

Fig.

$$\pi = 8\left\{\begin{array}{l} \frac{26}{1.3}\left(\frac{1}{27}\right)^{A} + \frac{58}{5.7}\left(\frac{A}{81}\right)^{B} + \frac{90}{9.11}\left(\frac{B}{81}\right)^{C} + \frac{122}{13.15}\left(\frac{C}{81}\right)^{D} + \ldots \\ + \frac{73}{1.3}\left(\frac{1}{343}\right)^{a} + \frac{169}{5.7}\left(\frac{a}{7^4}\right)^{b} + \frac{265}{9.11}\left(\frac{b}{7^4}\right)^{c} + \frac{361}{13.15}\left(\frac{c}{7^4}\right)^{d} + \end{array}\right\}$$

Diese doppelte Reihe (obschon die Zähler der Glieder um eine beständige Differenz, in der ersten um 32 und in der zweyten Reihe um 96 wachsen) läuft sehr schnell zusammen, und hat dabey eine gute Gestalt die Annäherung zu dem Werthe von π, wenn er noch nicht berechnet wäre, so weit zu treiben, als man es nur immer verlangen kann. Um z. B. die Annäherung zu dem Werthe von π in 127 Decimal-Stellen richtig zu erhalten, muß man die Glieder einer jeden Reihe wenigstens in 128 Decimal-Stellen entwickeln. Man findet auf diese Art die Summe.

der 1. Reihe = 0,32175 05543 96642 19340 14046
14358 66131 90207 55295 55765
61914 32803 05935 67562 37405
81054 43564 08422 35064 13744
39007 16937 71297 39148 20764 295

der 2. Reihe = 0,07094 85273 02081 96140 64258
08551 27654 15038 90879 36423
20361 89065 01468 17208 13379
96558 04720 95930 81712 32590
58761 34143 70305 49182 61908 760

Wenn man ferner die Summen beyder Reihen zusammen addiret; und dann die neue Summe mit 8 multiplicirt; so erhält man die Annäherung zu dem Werthe von π, so wie sie (453) aufgestellet ist: nähmlich

π = 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288
41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164
06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148
08651 32(8)23 06547 09384 46.....

allwo jede Decimal-Ziffer mit Einschluß der 127ten Stelle richtig ist, wovon ich mich durch die wiederhohlte Berechnung

nung nach einer anderen Formel laut meines Thesaurus Logarithm. Lipsiae 1794 pag. 633. überzeugte. Dabey kommt noch zu bemerken, daß die Ziffer an der 113ten Decimal-Stelle 8 und nicht 7 seyn muß, wie man es sonst in allen mathematischen Schriften, wahrscheinlich nur als einen Schreib- oder Druckfehler findet. Fig.

§. 554.

Auch für sin $(a+b)$, sin $(a-b)$, cos $(a+b)$, tang $(a+b)$, u. s. w. lassen sich unendliche Reihen finden. Es ist nähmlich bey dem angenommenen Halbmesser 1

$$\sin(a+b) = \sin a + b \cdot \cos a - \tfrac{1}{2}b^2 \cdot \sin a - \tfrac{1}{6}b^3 \cos a + \ldots$$

wenn man in der Formel I. (542.) statt sin b und cos b die unendlichen Reihen aus (545.) substituiret. Eben so ist

$$\cos(a+b) = \cos a - b \cdot \sin a - \tfrac{1}{2}b^2 \cdot \cos a + \tfrac{1}{6}b^3 \cdot \sin a + \ldots$$

Doch genug von diesem Gegenstande; man muß auch den Anfängern etwas zum eigenen Nachdenken überlassen.

II. Abschnitt.

Von der Auflösung geradliniger Dreyecke.

§. 555.

In einem jeden geradlinigen Dreyecke ABC verhalten sich die Seiten gegen einander, wie die in den Tafeln berechneten Sinus der gegen über stehenden Winkel; nähmlich es verhält sich AC : BC = sin B : sin A, oder AC : sin B = BC : sin A. 125.

Denn man stelle sich nur vor, daß aus A und B mit einem dem sintot in den Tafeln gleichen Halbmesser Am und Bp Kreisbogen beschrieben, und die Senkrechten mn, CD, pq gezogen seyn; so ist Am = Bp = sintot = r, mn = sin A, und pq = sin B in den Tafeln. Es finden aber in den ähnlichen Dreyecken Amn, ADC, und Bpq, BCD folgende Proportionen statt.

Am

Fig. 125. Am : mn = AC : CD, Bp : pq = BC : CD } nähmlich { r : sin A = AC : CD, r : sin B = BC : CD.

Nun ist aus der ersten und aus der zweyten } Proportion { sin A × AC = r × CD, sin B × BC = r × CD;

es ist also auch sin A × AC = sin B × BC, und endlich sin A : sin B = BC : AC, oder AC : sin B = BC : sin A. Eben so läßt sich erweisen, daß AB : AC = sin C : sin B, und auch sin A : BC = sin C : AB statt findet.

Ist das Dreyeck rechtwinkelig, wie z. B. DCB, so ist ebenfalls BC : CD = Bp : pq; es ist aber Bp = r = sin rot = sin 90° = sin D, und pq = sin B: folglich BC : CD = sin D (r : sin B. Ingleichen CD : DB = sin B : sin DCB, oder CD : DB = sin B : cos B, weil sin DCB = sin (90° — B) = cos B ist.

Eben so findet dieser Satz auch bey einem stumpfwinkeligen Dreyecke statt, wovon man sich gar leicht überzeugen kann, wenn man die Figur dazu gehörig verzeichnet.

§. 556.

Aus zwey Winkeln und aus einer Seite, oder aus zwey Seiten und aus einem anliegenden Winkel kann demnach ein geradliniges Dreyeck jederzeit gänzlich aufgelöset oder berechnet werden, wenn nur in dem letzten Falle das Dreyeck durch die zwey Seiten und durch den anliegenden Winkel nach (535.) hinlänglich bestimmet ist.

74. Es sey z. B. in Fig. 74. der Winkel A = 103°, B = 40°, und folglich der Winkel C = 180° — (103° + 40°) = 37°, die Seite AB aber sey = 240 Klaft.; so kann die Seite BC aus folgender Proportion gefunden werden.

$$\sin C : AB = \sin A : BC, \text{ nähmlich } BC = \frac{AB . \sin A}{\sin C},$$ oder

$$\log BC = \log AB + \log \sin A - \log \sin C.$$

Nun ist log sin A = log sin 103° = log sin (180° — 103°) = log sin 77° (vermöge 540. I.).

nähm-

nähmlich log sin A = log sin 77° = 9,9887239 Fig.
log AB = log 240 ..... = 2,3802112 74.

12,3689351

und log sin C = log sin 37° = 9,7794630

folglich log BC ..... = 2,5894721
und endlich BC = 388,5725° = 388° 3' 5'' 2''' 8''''.

In dergleichen Fällen ist es sehr gut sich der dekadischen Ergänzung zu bedienen (269.), weil es sehr leicht ist anstatt des Logarithmus dessen dekadische Ergänzung aus der Tafel herauszuschreiben. Es ist nähmlich in unserem Beyspiele

log AB = log 240 = 2,3802112
log sin A = log sin 77° = 9,9887239
Dek. Erg. log sin C .. = 0,2205370

folglich log BC ..... = x2,5894721
und endlich BC ..... = 388,5725°, wie ehevor.

Eben so kann die Seite AC durch folgende Proportion gefunden werden; sin C : AB = sin B : AC, und es ist

$AC = \frac{AB.\sin B}{\sin C}$, oder log AC = log AB + log sin B +

D. E. log. sin C.

Nachdem nun alle drey Seiten des Dreyeckes gefunden sind, so kann die Höhe desselben entweder nach (422.), oder auch nur aus einer Seite und aus dem anliegenden Winkel auf folgende Art gefunden werden. Es sey in Fig. 80. BC und auch der Winkel B gegeben, so ist in dem rechtwinkeligen Dreyecke CDB (wenn man die Senkrechte CD auf AB gedenket) die Seite BC, der Winkel B, und auch der rechte Winkel D bekannt; folglich sin D, BC = sin B: DC, nähmlich r : BC = sin B : DC, und es ist log DC = log BC + log sin B — 10, weil log r = log sintot = 10,0000000 = 10 ist. 80.

§. 557.

In einem jeden geradlinigen Dreyecke verhält sich die Summe zweyer Seiten zu ihrer Differenz, gleich-

wie

Fig. 131. wie sich die Tangente der halben Summe der gegen über stehenden Winkel zur Tangente der halben Differenz eben derselben Winkel verhält; nähmlich in dem Dreyecke ABC (Fig. 131.) ist $AC + AB : AC - AB = \text{tang } \frac{1}{2}(x+y) : \text{tang } \frac{1}{2}(x-y)$.

Dieser Satz kann durch eine ganz einfache Verzeichnung auf folgende Art bewiesen werden. Man verlängere in dem Dreyecke ACB an dem Scheitel des Winkels $BAC = m$ die größere einschließende Seite AC, mache die Verlängerung derselben AD gleich der kleineren einschließenden Seite AB, ferner schneide man auch auf AC das Stück $AF = AB$ ab, und verbinde F mit B, dann ziehe man durch D und B die Gerade DE: so ist FB senkrecht auf DE. Denn die Puncte D, B und F sind von A gleich weit entfernt; folglich liegen sie in dem Umfange eines Kreises, wovon DF der Durchmesser ist, und es ist der Winkel $DBF = 90°$ (vermöge 372. III.) Zieht man ferner aus dem Puncte C die Parallele CE zu FB, so ist auch CE senkrecht auf DE; daher $BE = \text{tang } t$, und $DE = \text{tang } (t+y)$, wenn man aus dem Puncte C mit dem Halbmesser CE einen Kreisbogen beschreibt. Nun ist (401.) $DC : FC = DE : BE$; nähmlich $AC + AB : AC - AB = \text{tang } (t+y) : \text{tang } t$. (A). Weil aber CE mit FB parallel läuft; so ist der Winkel $t = p$, und $u = y + t$. In dem gleichschenkeligen Dreyecke ABF ist $u = q$; folglich ist auch $q = y + t$. Es ist aber (379.) der Winkel $n = x + y$, und auch $n = q + u = 2q$; daher ist $2q = x + y$, und $q = y + t = \frac{1}{2}(x+y)$. Ferner ist $p = t = x - q = x - \frac{1}{2}(x+y) = \frac{1}{2}(x-y)$. Wenn man nun diese Werthe in der oben entwickelten Proportion (A) substituiret; so erhält man endlich

$AC + AB : AC - AB = \text{tang } \frac{1}{2}(x+y) : \text{tang } \frac{1}{2}(x-y)$.

§. 558.

Aus zwey gegebenen Seiten und aus dem eingeschlossenen Winkel, welcher von 180° abgezogen die Summe der zwey gegen über stehenden Winkel zu erkennen gibt, läßt sich demnach ein jedes geradliniges Dreyeck berechnen, wenn man

durch

durch die angeführte Proportion die Tangente der halben Differenz der zwey unbekannten Winkel suchet, und zu dieser gefundenen Tangente aus der Tafel die dazu gehörigen Grade und Minuten herausnimmt; diese Grade und Minuten zu der bekannten halben Summe der zwey unbekannten Winkel addiret geben den größeren Winkel, und eben diese in der Tafel gefundenen Grade und Minuten von der halben Summe der zwey unbekannten Winkel abgezogen bestimmen den kleineren Winkel, welcher der kleineren gegebenen Seite gegen über steht. Nachdem einmahl die zwey unbekannten Winkel gefunden sind, so ist es sehr leicht die dritte noch unbekannte Seite zu bestimmen. Fig.

Beyspiel. Da in dem Dreyecke A 1 C Fig. 72. die Seite 72.
$A1 = AB = 1000$, die Seite $AC = 900$ und der Winkel $CA1 = 1°$, und folglich $\frac{1}{2}(AC1 + A1C) = \frac{1}{2}(180° - 1°) = 89°\ 30'$ bekannt ist, weil man den Bogen $B1 = 1°$ gesetzet hat; so läßt sich der Winkel $AC1$ auf folgende Art bestimmen:

Es ist $A1 + AC : A1 - AC = \text{tang } \frac{1}{2}(AC1 + A1C) : \text{tang } \frac{1}{2}(AC1 - A1C)$,

nähmlich $1900 : 100 = \text{tang}(89° 30') : \text{tang } \frac{1}{2}(AC1 - A1C)$;

folglich ist $\text{tang } \frac{1}{2}(AC1 - A1C) = \frac{100.\text{tang}(89°\,30')}{1900} = \frac{\text{tang}(89°\ 30')}{19}$, und

$\log \text{tang } \frac{1}{2}(AC1 - A1C) = \log \text{tang}(89°\ 30') - \log 19$

nähmlich log tang 89° 30′	= 12,0591416
log 19	= 1,2787536
log tang $\frac{1}{2}$ (AC1 — A1C)	= 10,7803880
und endlich $\frac{1}{2}$(AC1 — A1C)	= 80° 35′
da nun $\frac{1}{2}$ (AC1 + A1C)	= 89° 30′ ist,
so ist	AC1 = 170° 5′
und	A1C = 8°55′

Fig. 72. Nachdem der Winkel AC1 bekannt ist, so lassen sich die Halbmesser A10 = Ag, A20 = Ah, u. s. w. trigonometrisch auf folgende Art berechnen. In dem Dreyecke ACg ist sin g : AC = sin C : Ag, nähmlich sin (9° 45′) : 900 = sin (170° 5′) : Ag, weil der Winkel AC1 = 170° 5′, CAg = 10′, und folglich AgC = 180 — (170° 5′ + 10′) = 9° 45′ ist. Es ist demnach $Ag = \frac{900.\sin(170°\,5')}{\sin(9°\,45')} = A10$;

nähmlich log 900 .... = 2,9542425
log sin (170° 5′) = log sin (9° 55′) = 9,2360726
Dek. Erg. log sin (9° 45′) .... = 0,7712161

folglich log A10 .... = 2,9615312
und endlich A10 = 915,2.

Eben so findet man Ah = A20 = 931 (weil in dem Dreyecke AhC der Winkel C = 170° 5′, der Winkel CAh = 20′, und folglich der Winkel AhC = 9° 35′, und auch die Seite AC bekannt ist); wie nicht weniger A30 = 947,4 u. s. w. Wir ersehen aus diesem, daß unsere gegebene Auflösung eben derselben Aufgabe (424.) beynahe so gut als vollkommen richtig ist. Auch wird es nun nicht mehr schwer seyn zu untersuchen, um wie viel die vor Zeiten gewöhnliche Transversal-Eintheilung auf jenen Winkelmessern von der Richtigkeit abweiche, bey denen der Rand BC in vollkommen gleiche Theile C10 = 10 20 = 20 30 u. s. w. abgetheilet ist.

Anmerkung. Daß sich in einem jeden geradlinigen Dreyecke die Summe zweyer Seiten zu ihrer Differenz verhält, wie die Tangente der halben Summe der gegen über stehenden Winkel zur Tangente der halben Differenz eben derselben Winkel, kann auch analytisch auf folgende Art bewiesen werden.

$125\frac{1}{2}$ Es sey (Fig. $125\frac{1}{2}$.) $\frac{1}{2}(a+b) = s$, und $\frac{1}{2}(a-b) = d$; so ist (nach §. 222. 1. Aufgabe) $a = s + d$, und $b = s - d$. Ferner ist $A : B = \sin a : \sin b$ (vermöge §. 555.). Wenn man nun in dieser Proportion für a und b die ge-

hö-

hörigen Werthe ſubſtituiret; ſo erhält man $A : B = \sin(s+d) : \sin(s-d)$; daraus folgt $A \cdot \sin(s-d) = B \cdot \sin(s+d)$. Es iſt aber (§. 542. Formel I. und III.) Fig. 125½
$\sin(s+d) = (\sin s \cdot \cos d + \cos s \cdot \sin d) : r$. und $\sin(s-d) = (\sin s \cdot \cos d - \cos s \cdot \sin d) : r$; folglich iſt auch
$A \cdot \sin s \cdot \cos d - A \cdot \cos s \cdot \sin d = B \cdot \sin s \cdot \cos d + B \cdot \cos s \cdot \sin d$
und $\frac{r \cdot A \sin s \cdot \cos d}{\cos s \cdot \cos d} - \frac{r \cdot A \cos s \cdot \sin d}{\cos s \cdot \cos d}$
$= \frac{r \cdot B \cdot \sin s \cdot \cos d}{\cos s \cdot \cos d} + \frac{r \cdot B \cos s \cdot \sin d}{\cos s \cdot \cos d}$
nähmlich $A \cdot \operatorname{tang} s - A \cdot \operatorname{tang} d = B \cdot \operatorname{tang} s + B \cdot \operatorname{tang} d$
und $(A - B) \cdot \operatorname{tang} s = (A + B) \cdot \operatorname{tang} d$
daher $A + B : A - B = \operatorname{tang} s : \operatorname{tang} d$.

Wenn man nun für s und d die gehörigen Werthe ſubſtituiret; ſo erhält man endlich $A + B : A - B = \operatorname{tang} \frac{1}{2}(a+b) : \operatorname{tang} \frac{1}{2}(a-b)$.

§. 559.

Der im vorigen §. 557. entwickelte Lehrſatz iſt mit dem erheblichen Vortheile verbunden, daß man ihn unmittelbar der bequemen logarithmiſchen Bearbeitung unterwerfen kann. Es läßt ſich aber auch aus den drey gegebenen oben angeführten Stücken ein anliegender Winkel unmittelbar durch folgende Gleichung beſtimmen.

$\operatorname{tang} a = \frac{r \cdot A \cdot \sin c}{r \cdot B - A \cdot \cos c}$, und $\operatorname{tang} b = \frac{r \cdot B \cdot \sin c}{r \cdot A - B \cdot \cos c}$.

Denn es iſt $b = 180° - (c+a)$; folglich iſt
$\sin b = \sin(c+a)$ (nach §. 540.)
daher auch $B : A = \sin(c+a) : \sin a$, (555.)
ferner iſt $B : A = \sin c \cdot \cos a + \sin a \cdot \cos c : r \cdot \sin a$ (542. I.)
und $B : A = \frac{r \cdot \sin c \cdot \cos a}{\cos a} + \frac{r \cdot \sin a \cdot \cos c}{\cos a} : \frac{r^2 \cdot \sin a}{\cos a}$
nähmlich $B : A = r \cdot \sin c + \cos c \cdot \operatorname{tang} a : r \operatorname{tang} a$ (541. II.).
oder $r \cdot B \cdot \operatorname{tang} a = r \cdot A \cdot \sin c + A \cdot \cos c \cdot \operatorname{tang} a$

Fig. 125 endlich tang $a = \frac{r \cdot A \cdot \sin c}{r \cdot B - A \cdot \cos c}$. Eben so kann man auch zeigen, daß tang $b = \frac{r \cdot B \cdot \sin c}{r \cdot A - B \cdot \cos c}$ ist.

Anmerkung. In dieser Formel ist $c < 90°$ angenommen. Sollte der eingeschlossene Winkel c stumpf seyn; so würde cos c negativ seyn; folglich müßte in diesem Falle das Glied $A \cdot \cos c$ des Nenners positiv genommen werden. Ist $c = 90°$; so ist sin $c = r$, cos $c = 0$, daher tang $a = \frac{r \cdot A}{B}$, und tang $b = \frac{r \cdot B}{A}$. Daraus folgt $B : A = r :$ tang a, und $A : B = r :$ tang b; nähmlich:

§. 560.

In einem jeden geradlinigen rechtwinkeligen Dreyecke verhält sich eine Kathete zu der anderen, gleichwie sich der ganze Sinus zur Tangente des an der ersten Kathete anliegenden Winkels verhält. Diese
125 Proportion erhellet auch deutlich aus (Fig. 125.). Denn es ist daselbst AD : DC = Af : fg. Setzet man nun Af = r; so ist fg = tang A; folglich ist AD : DC = r : tang A.

Dieser Satz wird bey den rechtwinkeligen Dreyecken anstatt des oben (557.) angeführten Lehrsatzes gebrauchet, wenn aus den zwey gegebenen Katheten, und aus dem eingeschlossenen Winkel einer der anliegenden Winkel zu berechnen ist. Aus den gegebenen zwey Katheten, oder aus einer Kathete und aus einem spitzigen Winkel eines rechtwinkeligen Dreyeckes lassen sich nähmlich alle übrigen Stücke desselben durch die Rechnung bestimmen. Z. B.

126 Bey einer k. k. zwölfpfündigen Feld-Kanone ist die über die zwey höchsten Puncte A und B gezogene Visir-Linie AB auf einen Gegenstand C gerichtet; man verlanget den Erhöhungswinkel der Kanone über diesen Gegenstand zu wissen.

Auflösung. Es sey DE die Mittel-Linie oder die Achse der Kanone, so ist der gesuchte Erhöhungswinkel = CFG =
BFE

BFE = ABP, wenn BP zu ED parallel gezogen wird. Nun findet in dem rechtwinkeligen Dreyecke ABP folgende Proportion statt, BP : AP = r : tang ABP. Es ist aber vermöge der eingeführten Tafeln zur Zeichnung des k. k. Geschützes Fig. 126.

BP = 15 ganzen Kugeldurchmessern und $\frac{9\frac{1}{2}}{32}$ eines Durchmessers $= \frac{979}{2.32}$ Durchmessern, und der Kern PA $= \frac{5\frac{5}{2}6}{32}$ Durchmesser $= \frac{135}{26.32}$ Durchmesser. Folglich $\frac{979}{2.32} : \frac{135.}{26.32}$ = r : tang ABP, oder 13 . 979 : 135 = r : tang ABP

nun ist log r = 10
log 135 . . . . = 2,1303338
D. E. log 979 = 7,0092173
D. E. log 13 . = 8,8860567

folglich ist log tang ABP = 8,0256078
und endlich ABP = 36′ 28″ = $36\frac{1}{2}$ Minut. beynahe.

Dieser Winkel ABP heißt bey den Artilleristen der Kernwinkel.

Eben so kann der Erhöhungswinkel gefunden werden, wenn auf dem hinteren höchsten Puncte A in der Verlängerung von PA noch etwas z. B. $1\frac{1}{2}$ Wiener-Zoll aufgesetzet, und sodann über diesen Aufsatz und über den vorderen höchsten Punct die Visir-Linie nach einem Gegenstande gerichtet wird. Nur muß in diesem Falle BP und PA ebenfalls in Wiener-Zollen ausgedrucket werden um den Erhöhungswinkel berechnen zu können.

Auch kann der Aufsatz gefunden werden, damit die Kanone um einen gegebenen Winkel erhöhet sey, wenn über den gesuchten Aufsatz und über den vorderen höchsten Punct die Visir-Linie auf einen Gegenstand gerichtet wird. Man sagt nähmlich in diesem Falle: der ganze Sinus verhält sich zur Tangente des gegebenen Erhöhungswinkels, gleichwie BP zu dem gesuchten Aufsatze. Von diesem gefundenen Aufsatze muß man sodann den Kern PA abziehen um denjenigen Aufsatz zu erhalten, den man auf den hinteren höchsten

Fig. 126. sten Punct aufsetzen muß, damit die Kanone um den gegebenen Winkel erhöhet sey, wenn die Visir-Linie über den gefundenen Aufsatz und über den vorderen höchsten Punct auf den Gegenstand gezogen wird.

Aus der Länge der Geraden BP und PA (oder aus BP und dem Kernwinkel ABP) und aus der Erhöhung der Schildpfannen-Einschnitte über die Bettung einer abgeprotzten Kanone läßt sich auch bestimmen, in welcher Entfernung von der Mündung der Kanone gegen den zu beschießenden Gegenstand hinaus gerechnet auf einem ebenen Boden die über die zwey höchsten Puncte des Metalles gezogene Visir-Linie die Erde erreichen müsse, damit die Achse der Kanone mit dem ebenen Boden parallel laufe, das ist (nach der Sprache der Artilleristen) damit das Stuck im Kern gerichtet sey, wenn ein solcher ebener Boden mit Schleiderschüssen (Gällschüssen) zu bestreichen ist.

Auch die Abweichung des Zündloches von der auf die Achse der Kanone senkrechten Richtung läßt sich durch den in diesem §. vorgetragenen Satz bestimmen. Man findet z. B., daß bey allen denjenigen k. k. Kanonen, welche am Stoßboden mit dem ganzen Durchmesser der Kugel abgerundet sind, der Abweichungswinkel des Zündloches $7\frac{3}{4}$ Grade beträgt, und daß man folglich die Kanonen um $7\frac{3}{4}°$ senken müsse um das Zündloch in eine verticale Lage zu bringen, welches gemeiniglich bey der Einsetzung neuer Zündlöcher erforderlich ist.

§. 561.

In einem jeden geradlinigen Dreyecke ist der Cosinus eines Winkels gleich dem Producte aus der Summe der Quadrate der beyden einschließenden Seiten, weniger dem Quadrate der gegen über stehenden Seite multipliciret mit dem gangen Sinus und dividiret durch das doppelte Product der beyden einschließenden
30. Seiten: nähmlich es ist, wenn man (Fig. 80.) AB = b,

AC

AC = a, BC = c; und die halbe Summe aller drey Sei- Fig.
ten, das ist $\frac{1}{2}(a+b+c) = P$ setzet, $\cos A = \frac{r(a^2+b^2-c^2)}{2ab}$. 80.

II. In einem jeden geradlinigen Dreyecke ABC verhält sich das Product aus zwey Seiten AB × AC zu dem Producte aus den Differenzen, wenn man einmahl eine Seite AB und dann die andere AC von der halben Summe aller drey Seiten abzieht, gleichwie das Quadrat des ganzen Sinus zu dem Quadrate des Sinus von dem halben Winkel A, welchen die zwey Seiten AB und AC einschließen; nähmlich es ist $ab : (P-a).(P-b) = r^2 : \sin^2 \frac{1}{2}A$.

III. In einem jeden geradlinigen Dreyecke verhält sich auch das Product zweyer Seiten zu dem Producte aus der halben Summe aller drey Seiten multiplicirt mit der Differenz, wenn man von der halben Summe aller drey Seiten die dritte Seite abzieht, gleichwie das Quadrat des ganzen Sinus zu dem Quadrate des Cosinus von dem halben eingeschlossenen Winkel: nähmlich es ist $ab : P(P-c) = r^2 : \cos^2 \frac{1}{2}A$.

Denn es ist in dem rechtwinkeligen Dreyecke ADC, wenn man die Senkrechte CD gedenket, AD : AC = sin DCA : sin ADC, oder AD : AC = cos A : sin ADC, weil die Winkel A und DCA sich auf 90° ergänzen. Nun ist weil wir AC = a, AB = b, BC = c gesetzet haben,

AD = $\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$ (vermöge 422.), und sin ADC = r;

folglich ist $\frac{a^2+b^2-c^2}{2b} : a = \cos A : r$, nähmlich

I, $\cos A = \frac{r(a^2+b^2-c^2)}{2ab}$.

Ferner ist auch (543. IV. und V.) $\cos A = \frac{r^2-2\sin^2\frac{1}{2}A}{r}$,

und $\cos A = \frac{2\cos^2\frac{1}{2}A-r^2}{r}$; folglich ist auch

Fig. 80. $\frac{r.(a^2+b^2-c^2)}{2ab} = \frac{r^2-\sin^2\frac{1}{2}A}{r}$ (A), und

$\frac{r.(a^2+b^2-c^2)}{2ab} = \frac{2\cos^2\frac{1}{2}A-r^2}{r}$ (B).

Aus der ersten Gleichung (A) findet man

$$\sin^2\tfrac{1}{2}A = \frac{r^2}{ab}\left(\frac{c^2-a^2+2ab-b^2}{4}\right) = \frac{r^2}{ab}\left[\frac{c^2-(a-b)^2}{4}\right]$$

$$= \frac{r^2}{ab}\left(\frac{c+a-b}{2}\right)\left(\frac{c-a+b}{2}\right) = \frac{r^2}{ab}\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)$$

$$= \frac{r^2}{ab}.(P-a).(P-b).$$

Aus der zweyten Gleichung (B) ist

$$\cos^2\tfrac{1}{2}A = \frac{r^2}{ab}\left(\frac{a^2+2ab+b^2-c^2}{4}\right) = \frac{r^2}{ab}\left[\frac{(a+b)^2-c^2}{2.2}\right]$$

$$= \frac{r^2}{ab}.\frac{(a+b+c)}{2}.\frac{(a+b-c)}{2} = \frac{r^2}{ab}\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)$$

$= \frac{r^2}{ab}.P.(P-c)$. Wenn man nun beyde Gleichungen in Proportionen auflöset, so erhält man endlich

II. $ab:(P-a).(P-b) = r^2:\sin^2\frac{1}{2}A$

III. $ab:P.(P-c) = r^2:\cos^2\frac{1}{2}A$.

Auf eben dieselbe Weise findet man $\cos B = \frac{r(b^2+c^2-a^2)}{2bc}$.

ferner $\sin^2\frac{1}{2}B = \frac{r^2(P-b).(P-c)}{bc}$ und $\cos^2 B\frac{1}{2} = \frac{r^2.P(P-a)}{bc}$

u. s. w.

Durch Hülfe dieses Satzes kann aus drey gegebenen Seiten eines geradlinigen Dreyeckes ein Winkel desselben sehr leicht sowohl analytisch ausgedrucket, als auch durch die Rechnung gefunden werden. Zur letzteren sind die Sätze II. und III. vorzüglich anzuwenden, weil sie den Vortheil der logarithmischen Bearbeitung darbiethen. Dabey ist zu bemerken, daß wenn der zu berechnende Winkel sehr spitzig

ist

ist, die erste, und wenn er ein sehr stumpfer Winkel ist, die zweyte Proportion ausschließend genommen werden muß, weil die Sinus nahe gegen 90° oder die Cosinus nahe gegen 0° unbedeutende Unterschiede geben. Die Bearbeitung selbst aber kann auf folgende Art vorgenommen werden. Fig. 80.

Es ist $\log \sin \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}[\log (P-a) + \log(P-b) + \text{D.E.} \log a + \text{D. E.} \log b]$, und eben so ist

$\log \cos \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}[\log P + \log(P-c) + \text{D.E.} \log a + \text{D.E.} \log b]$

Das ist, wenn aus drey gegebenen Seiten eines Dreyeckes was immer für ein Winkel desselben zu suchen ist, so addire man die drey gegebenen Seiten zusammen, und subtrahire von der Hälfte dieser Summe einmahl eine, und dann die andere der zwey Seiten, welche den gesuchten Winkel einschließen; ferner addire man zu den Logarithmen dieser zwey Differenzen die dekadischen Ergänzungen von den Logarithmen der zwey Seiten, die den gesuchten Winkel einschließen; so ist (ohne an der Kennziffer etwas zu ändern) die Hälfte dieser Summe der logarithmische Sinus des halben gesuchten Winkels. Oder man ziehe von der halben Summe aller drey Seiten die dem gesuchten Winkel gegen über stehende Seite ab, addire dann zu dem Logarithmus der halben Summe aller drey Seiten und zu dem Logarithmus der Differenz die dekadischen Ergänzungen von den Logarithmen der einschließenden Seiten; so ist die Hälfte dieser Summe der logarithmische Cosinus des halben gesuchten Winkels.

Beyspiel.

$AC = a = 150$	$P = 210$
$AB = b = 140$	$a = 150$
$BC = c = 130$	$b = 140$

420	2	$P-a = 60$
210		$P-b = 70$

log

Fig. 80.

$\log (P-a) = \log 60 \ldots\ldots = 1{,}7781513$
$\log (P-b) = \log 70 \ldots\ldots = 1{,}8450980$
$\mathfrak{D}.\mathfrak{E}.\log a = \mathfrak{D}.\mathfrak{E}.\log 150 = 7{,}8239087$
$\mathfrak{D}.\mathfrak{E}.\log b = \mathfrak{D}.\mathfrak{E}.\log 140 = 7{,}8538720$

$19{,}3010300 \mid 2$

$\log \sin \frac{1}{2} A \ldots\ldots\ldots\ldots = 9{,}6505150$
folglich $\frac{1}{2} A = 26^\circ 33' 54''$, und endlich $A = 53^\circ 7' 48''$

Anmerkung. Man kann in einem Dreyecke aus den gegebenen drey Seiten auch die Winkel berechnen, wenn man (nach 422.) einen Abschnitt AD oder den anderen Abschnitt BD bestimmet, und sodann folgende Proportion ansetzet, BC : sin D (r = BD : sin DCB, das ist BC : sin tot = BD : cos B. Wenn man die größte aus den gegebenen drey Seiten für die Grundlinie annimmt, so können die Abschnitte auf folgende Art sehr leicht berechnet werden: die Grundlinie verhält sich zu der Summe der zwey übrigen Seiten, wie die Differenz eben derselben zwey Seiten zu der Differenz der Abschnitte auf der Grundlinie. Die Hälfte dieser Differenz zu der halben Grundlinie addiret gibt den größeren Abschnitt; und die Hälfte dieser gefundenen Differenz von der halben Grundlinie abgezogen gibt den kleineren Abschnitt, der an der kleineren Seite anlieget. Man vergleiche diese Proportion mit (422.) und man wird alsogleich ihre Richtigkeit einsehen.

Ferner kann man aus den gegebenen zwey Seiten a und b und aus dem eingeschlossenen Winkel A eines geradlinigen Dreyeckes ABC die dritte Seite c finden, wenn man sich (nach §. 557. oder auch nach 559.) die beyden übrigen Winkel, und dann vermittelst des im §. 555. aufgestellten Lehrsatzes (daß sich nähmlich die Seiten gegen einander verhalten, wie die Sinus der gegen über stehenden Winkel) die dritte Seite bestimmet. Es läßt sich aber auch für diese dritte Seite durch die oben genannten Stücke ein analytischer Ausdruck angeben, nähmlich:

§. 562.

Aus der Gleichung $\cos a = \frac{r.(B^2 + C^2 - A^2)}{2BC}$ (§. 561. Fig. 125½

I.) findet man $A = \sqrt{(B^2 + C^2 - \frac{2BC.\cos a}{r})}$ eine Formel,

nach der sich aus zwey gegebenen Seiten B, C, und aus dem eingeschlossenen Winkel bey jedem geradlinigen Dreyecke die dritte Seite unmittelbar berechnen läßt. Nur muß man in diesem Falle nicht vergessen das Zeichen — in + zu verändern, wenn $a > 90°$, und folglich cos a negativ ist (540. III.). Die dritte Seite A kann man durch die zwey anderen B, C, und durch den eingeschlossenen Winkel a auch mittelst folgender Formel ausdrucken,

$$A = \sqrt{[(B - C)^2 + \frac{2B.2C.\sin^2 \frac{1}{2}a}{r^2}]}.$$

wenn man $\frac{r^2 - 2\sin^2 \frac{1}{2}a}{r}$ anstatt cos a aus (§. 543. V.) substituiret.

Anmerkung. Die vier angeführten Sätze (555.557. 560. 561.) erstrecken sich auf alle Gattungen der geradlinigen Dreyecke, und sind hinlänglich um alle möglichen Fälle, die bey Auflösung der Dreyecke vorkommen, zu entwickeln. Zur Uebersicht sind im Anhange zwey Tabellen beygefüget, welche die Auflösung der rechtwinkeligen, und auch der schiefwinkeligen Dreyecke enthalten. Im vorkommenden Falle darf man nur die nöthige Formel darin aufsuchen, um sich ihrer bedienen zu können.

§. 563.

Durch Hülfe der trigonometrischen Functionen läßt sich auch die Lehre von den regelmäßigen Vielecken auf eine allgemeine Art, und zwar sehr kurz zusammen ziehen. Es sey nähmlich die Seite eines regelmäßigen nEckes $= AB = b$, 50.

der Mittelpuncts-Winkel $ACB = \frac{360°}{n} = v$, und der Halb-

mes-

Fig. 50. messer des herumbeschriebenen Kreises AC = a; so ist $a = \frac{br}{2\sin\frac{1}{2}v}$, $b = \frac{2a.\sin\frac{1}{2}v}{r}$, und der Umfang $p = \frac{2an.\sin\frac{1}{2}v}{r}$.

Denn in dem rechtwinkeligen Dreyecke AGC ist sinACG:AG = sin AGC : AC, nähmlich $\sin\frac{1}{2}v : \frac{1}{2}b = r : a$; folglich $a = \frac{br}{2\sin.\frac{1}{2}v}$, $b = \frac{2a.\sin\frac{1}{2}v}{r}$, und $nb = \frac{2an.\sin\frac{1}{2}v}{r}$ = dem Umfange.

Wenn man ferner den Halbmesser des eingeschriebenen Kreises, das ist die Senkrechte CG = c setzet; so ist $b = \frac{br}{2\,\text{tang}\frac{1}{2}v}$.

Denn in dem rechtwinkeligen Dreyecke AGC ist CG: AG = sintot : tang ACG, nähmlich $c : \frac{1}{2}b = r : \text{tang}\frac{1}{2}v$, und folglich $c = \frac{br}{2\,\text{tang}\frac{1}{2}v}$.

Der Flächeninhalt des Dreyeckes ABC ist = $\frac{1}{2}$ AB . GC = $\frac{1}{2}bc = \frac{b^2r}{4\,\text{tang}\frac{1}{2}v}$. Da nun der Flächeninhalt eines regelmäßigen nEckes aus n solchen vollkommen gleichen Dreyecken besteht, deren eines = ACB = $\frac{b^2r}{4\text{tang}\frac{1}{2}v}$ ist; so ist der Flächeninhalt eines regelmäßigen nEckes $s = \frac{nb^2r}{4\text{tang}\frac{1}{2}v}$.

Aus dieser Gleichung findet man auch $b = \sqrt{\frac{4s.\text{tang}\frac{1}{2}v}{nr}}$, das ist, aus dem gegebenen Flächeninhalte s eines regelmäßigen nEckes kann die Seite b desselben durch die Rechnung gefunden werden.

Man substituire statt b seinen vorigen Werth, so ist auch $s = \frac{na^2.\sin^2\frac{1}{2}v}{r.\text{tang}\frac{1}{2}v} = \frac{na^2.\sin^2\frac{1}{2}v}{r} : \text{tang}\frac{1}{2}v =$

$\frac{na^2.\sin^2\frac{1}{2}v}{r} : \frac{r.\sin\frac{1}{2}v}{\cos\frac{1}{2}v} = \frac{na^2.\sin\frac{1}{2}v.\cos\frac{1}{2}v}{r^2} = \frac{na^2.\frac{1}{2}r.\sin v}{r^2}$ Fig.

(vermöge 543. I.), nähmlich $s = \frac{na^2.\sin v}{2r}$.

§. 564.

Aufgaben.

I. In dem Dreyecke ABC ist die Seite $AB = b$ 80.
nebst den daran liegenden Winkeln A und B gegeben; man soll den Flächeninhalt desselben bestimmen.

Auflösung. Es sey die Höhe $CD = x$; so ist $CD : DA = \text{sintot} : \text{tang}\, DCA$. Nun ist $CD = x$. $\text{sintot} = r$, und $\text{tang}\, DCA = \text{tang}\,(90° - A) = \cot A$;

folglich $x : DA = r : \cot A$, und es ist $DA = \frac{x.\cot A}{r}$.

Eben so ist $DB = \frac{x.\cot B}{r}$. Es ist aber $DA + DB = AB$,

nähmlich $\frac{x.\cot A}{r} + \frac{x.\cot B}{r} = b$; folglich ist $x = \frac{br}{\cot A + \cot B} = CD$. Endlich ist der Flächeninhalt des

Dreyeckes $ABC = \frac{1}{2} AB.CD = \frac{1}{2} b.\frac{br}{\cot A + \cot B} = \frac{\frac{1}{2}b^2 r}{\cot A + \cot B}$.

Es ist bey dieser Auflösung wohl zu merken, daß (vermöge 540. V.) cot A oder cot B negativ seyn muß, wenn A oder B ein stumpfer Winkel ist.

II. Es ist in dem Dreyecke CAB die Seite $CA = a$, $AB = b$, nebst dem eingeschlossenen Winkel A gegeben, man soll den Flächeninhalt desselben bestimmen.

Auflösung. Es ist in dem rechtwinkeligen Dreyecke ADC, wenn man die Senkrechte CD gedenket,
$\sin D : AC = \sin A : CD$, das ist $r : a = \sin A : CD$,

nähmlich es ist die Senkrechte $CD = \frac{a.\sin A}{r}$; folg-

lich

Fig. lich ist der Flächeninhalt des Dreyeckes ABC $= \frac{1}{2}$AB$\times$CD
80. $= \frac{1}{2}b \times \frac{a.\sin A}{r} = \frac{1}{2}ab.\frac{\sin A}{r} = \frac{1}{2}$AC.AB$\times\frac{\sin A}{r}$.

III. Es ist in dem Dreyecke ACB die Summe der zwey Seiten AC und CB $= a$, die Senkrechte CD $= b$, und die Grundlinie AB $= c$ gegeben; man soll den Winkel A bestimmen.

Auflösung. In dem Dreyecke ACD ist für sintot $= 1$, $\sin A : 1 = b : \text{AC} = \frac{b}{\sin A}$, daher CB $= a - \frac{b}{\sin A}$.

Ferner ist in eben demselben Dreyecke AD $: b = 1 : \text{tang } A$, nähmlich es ist AD $= \frac{b}{\text{tang } A} = b.\cot A$ und DB $= c - b.\cot A$.

In demrechtwinkeligen Dreyecke CDB ist $\text{CD}^2 = \text{CB}^2 - \text{BD}^2$,

nähmlich $b^2 = (a - \frac{b}{\sin A})^2 - (c - b.\cot A)^2$

$$= a^2 - \frac{2ab}{\sin A} + \frac{b^2}{\sin^2 A} - c^2 + 2bc.\cot A - b^2.\cot^2 A$$

$$= a^2 - \frac{2ab}{\sin A} + \frac{b^2}{\sin^2 A} - c^2 + \frac{2bc.\cos A}{\sin A} - \frac{b^2\cos^2 A}{\sin^2 A},$$

wenn man $\frac{\cos A}{\sin A}$ statt cot A substituiret.

Schaffet man ferner die Brüche hinweg; so ist $b^2\sin^2 A = a^2.\sin^2 A - 2ab.\sin A + b^2 - c^2.\sin^2 A + 2bc\sin A\cos A - b^2.\cos^2 A$, und $b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) - b^2 = a^2.\sin^2 A - 2ab.\sin A - c^2.\sin^2 A + 2bc.\sin A.\cos A$.

Es ist aber $\sin^2 A + \cos^2 A = 1^2 = 1$; folglich ist $0 = a^2.\sin^2 A - 2ab.\sin A - c^2.\sin^2 A + 2bc.\sin A.\cos A$, und $2ab = (a^2 - c^2).\sin A + 2bc.\cos A$.

Nun könnte man für cos A den Werth $\sqrt{(1 - \sin^2 A)}$ substituiren, und dann sin A bestimmen. Allein auf diesem Wege würde man zu einer verwickelten quadratischen Gleichung gelangen. Viel leichter läßt sich der unbekannte Winkel A vermittelst folgenden Kunstgriffes bestimmen.

Wenn

Wenn man erstlich die Gleichung durch $2bc$ dividiret, Fig. 80.

so ist $\frac{a}{c} = \frac{a^2 - c^2}{2bc} \cdot \sin A + \cos A.$

Nun setze man die bekannte Größe $\frac{a^2 - c^2}{2bc} = \text{tang} q$,

weil es ganz gewiß einen Winkel gibt, dessen Tangente dieser gegebenen Größe gleich ist, da die Tangenten von o angefangen ohne Ende wachsen. Dabey ist auch der Winkel q bekannt, weil man nur zu der in Zahlen ausgedruckten Tangente den entsprechenden Winkel aufsuchen darf.

Es ist also $\frac{a}{c} = \text{tang}\, q \,.\, \sin A + \cos A$

$$\text{oder } \frac{a}{c} = \frac{\sin q \,.\, \sin A + \cos A \,.\, \cos q}{\cos q}$$

$$\text{und } \frac{a}{c} \,.\, \cos q = \cos(A - q)$$

$$\text{folglich } A = \text{arc} \,.\, \cos\left(\frac{a}{c} \,.\, \cos q\right) + \text{arc}\, q$$

Das heißt, man betrachte, $\frac{a}{c} \,.\, \cos q$ als einen Cosinus, suche dazu den entsprechenden Winkel auf, addire dann den Winkel q hinzu; so ist der Winkel A gefunden.

Setzet man aber $\frac{a^2 - c^2}{2bc} = \cot q$,

$$\text{so ist } \frac{a}{c} = \cot q \,.\, \sin A + \cos A$$

$$\text{und } \frac{a}{c} = \frac{\cos q \,.\, \sin A + \cos A \sin q}{\sin q}$$

$$\text{oder } \frac{a}{c} \,.\, \sin q = \sin(A + q)$$

$$\text{und } A = \text{arc} \,.\, \sin\left(\frac{a}{c} \,.\, \sin q\right) - \text{arc} q.$$

Ueberhaupt läßt sich aus einer jeden Gleichung von der Form $a \,.\, \sin p + b \,.\, \cos p = c$, in welcher die Coefficien-

Fig. cienten a und b positiv oder negativ seyn können, der unbekannte Winkel p entwickeln, wenn man in einem Gliede entweder in a . sin$p$ oder in b . cos$p$ die unbekannte trigonometrische Function von ihrem Coefficienten trennet, nähmlich, wenn man die angeführte Gleichung in $\sin p + \frac{b}{a} . \cos p = \frac{c}{a}$ oder in $\frac{a}{b} . \sin p + \cos p = \frac{c}{b}$ verwandelt, dann den Coefficienten der Function im anderen Gliede entweder $=$ tang$q$ oder $=$ cot$q$ setzet, und die fernere Entwickelung so vornimmt, wie sie oben in dieser Aufgabe gezeiget worden ist. Auf diese Art wird man immer eine trigonometrische Function der Summe oder Differenz der Winkel p und q durch bekannte Größen ausgedruckt erhalten, woraus sich dann ferner der unbekannte Winkel bestimmen läßt.

Ich halte es für überflüssig diese Aufgaben durch numerische Beyspiele zu erläutern, da ein Anfänger dieses selbst leicht thun kann, und wirklich thun muß, um sich den Gebrauch der trigonometrischen Tafeln durch die Uebung geläufig zu machen.

Anmerkung. In der letzten Aufgabe ist sintot $=$ 1 angenommen worden, weil bey dieser Annahme die Bearbeitung eines etwas zusammen gesetzten trigonometrischen Ausdruckes wirklich bequemer ist. Soll nun ein Ausdruck dieser Art für den Halbmesser $=$ 1 logarithmisch nach den gewöhnlichen logarithmisch - trigonometrischen Tafeln, in welchen der Halbmesser $r =$ 10.000,000.000 zum Grunde liegt, entwickelt werden; so kann man sich dabey folgender Regel bedienen: Man suche zu einer jeden trigonometrischen Function den entsprechenden Logarithmus auf, so wie er in den Tafeln enthalten ist, hänge hinten — 10 an, und reducire alles gehörig. Ist nun das Resultat der Logarithmus einer trigonometrischen Function, so addire man zu demselben + 10, und nehme dann aus der Tafel den zu dieser logarithmischen Function entsprechenden Winkel. Z. B. es wäre aus irgend einem Ausdrucke

cot

$\cot x = \frac{\text{tang } 60° \cdot \sin 20° \cdot \cos 15°}{\sin 25°}$ für sintot = 1 erhalten worden, so kann die fernere Entwickelung logarithmisch auf folgende Art vorgenommen werden. Fig.

log tang 60°	=	10,2385606 — 10
log sin 20°	=	9,5340517 — 10
log cos 15°	=	9,9849438 — 10
		29,7575561 — 30
log sin 25°	=	9,6259483 — 10
		0,1316078
hierzu addire	+	10
so ist log cot x	=	10,1316078
	x	= 36°, 26′, 55″.

Der Grund dieser gegebenen Regel ist aus §. 546. leicht einzusehen.

III. Abschnitt.

Von der Auflösung der sphärischen Dreyecke.

§. 565.

Wenn man bey einem sphärischen Dreyecke (486.) ABC aus den drey Winkeln A, B, C, als aus so vielen angenommenen Polen in der Entfernung von 90° die Bogen größter Kreise EF, DF, DE beschreibet (484); so ist das spärische Dreyeck DEF, welches auf diese Art zum Vorschein kommt, von der Beschaffenheit, daß die Seiten dieses Dreyeckes DEF die Winkel des vorigen ABC, und die Winkel dieses Dreyeckes DEF die Seiten des vorigen sphärischen Dreyeckes ABC zu 180° ergänzen; es ist nähmlich $A + EF = 180°$, $B + DF = 180°$, $C + DE = 180°$, $D + BC = 180°$, $E + AC = 180°$, $F + AB = 180°$. 127.

Denn da der Bogen EF den Punct A zum Pole hat so ist jeder Punct desselben von A um 90° entfernt (484

Fig. V.), folglich ist der Bogen EA = 90°. Ingleichen, da
127. der Bogen DE den Punct C zum Pole hat, so ist ebenfalls jeder Punct desselben von C um 90° entfernt, folglich auch der Bogen EC = 90°. Da nun EA = 90°, und EC = 90° ist, so ist E der Pol des Bogens AC oder GI; folglich ist der Bogen AC = dem Winkel AEC, und der Bogen GI = dem Winkel GEI = DEF = E (485.). Eben so läßt sich erweisen, daß F der Pol des Bogens PR, und D der Pol des Bogens HQ, und folglich PR = F, HQ = D ist. Da nun E der Pol des Bogens GI, und F der Pol des Bogens PR ist; so ist EI = 90°, FR = 90°, und EI + FR = 180°, oder EI + IF + IR = 180° nähmlich EF + IR = 180°. Es ist aber IR = A; folglich ist auch EF + A = 180°, oder A + EF = 180°. Eben so erhellet, daß B + DF = 180°, und auch C + DE = 180° ist. Ferner ist HC = 90° und BQ = 90°, weil vermöge der Voraussetzung C der Pol von DE, und B der Pol von DF ist; folglich ist HC + BQ = 180°, oder HC + BC + CQ = 180°, nähmlich HQ + BC = 180°; es ist aber HQ = dem Winkel D, weil D der Pol von HQ ist; folglich ist auch D + BC = 180°. Auf eben dieselbe Weise kann man darthun; daß E + AC = 180°, und auch F + AB = 180° ist.

§. 566.

In einem jeden sphärischen Dreyecke ist die Summe zweyer Seiten größer als die dritte Seite. Z. B. in dem
134. sphärischen Dreyecke BAC (Fig. 134.) ist BA + AC > BC.

Denn man verbinde nur die Scheitel der sphärischen Winkel mit dem Mittelpuncte der Kugel; so können die in verschiedenen Ebenen liegenden geradlinigen Winkel BGA, AGC und CGB für die Seiten BA, AC und BC des sphärischen Dreyeckes genommen werden, weil diese Seiten die Maße der angeführten Winkel sind. Diese Winkel haben aber eine solche Lage gegen einander, daß beyde Winkel BGA und AGC an einem gemeinschaftlichen Schenkel AG zusammen stoßen, und mit dem zweyten Schenkel BG

und

und GC den Winkel BGC einschließen. Wäre nun Fig. BGA + AGC = BGC; so müßten die drey Winkel 134. nach der eben festgesetzten Lage ihrer Schenkel in einer und derselben Ebene, und die Puncte B, A, C in einem und demselben größten Kreise liegen. Wäre aber die Summe der beyden Winkel kleiner als der dritte, nähmlich BGA + AGC < BGC; so könnten diese beyden Winkel an den Schenkeln des Winkels BGC angelegt, nicht einmahl in einer und derselben Ebene, um so weniger in einer anderen Lage an einem gemeinschaftlichen Schenkel zusammen stoßen. Da nun also diese Summe weder kleiner als der dritte Winkel, noch demselben gleich seyn kann; so muß sie nothwendiger Weise größer seyn. Das heißt: es ist BGA + AGC > BGC; folglich ist auch die Summe zweyer Seiten eines sphärischen Dreyeckes größer als die dritte Seite. Nähmlich es ist BA + AC > BC.

§. 567.

In einem jeden spärischen Dreyecke betragen alle drey Seiten zusammen genommen weniger als einen ganzen Umkreis, das ist, sie sind zusammen genommen < 360°.

Denn wenn man bey was immer für einem sphärischen Dreyecke BDM (Fig. 104.) zwey Seiten BD und BM ver- 104. längert, bis sie in A zusammen stoßen; so ist (DA + MA) + BD + BM = 360° (A). Nun aber ist (vermöge §. 566.) DM < (DA + MA); folglich ist auch DM + BD + BM < 360°, wenn man in der oberen Gleichung (A) statt (DA + MA) einen kleineren Werth nähmlich den Bogen DM substituiret.

§. 568.

Die Summe aller drey Winkel eines sphärischen 127. Dreyeckes ABC ist kleiner als 540° oder 6 rechte Winkel, und größer als 180° oder 2 rechte Winkel.

Denn wenn man (nach §. 565.) das Dreyeck DEF gedenket, so ist A + EF = 180°, B + DF = 180°,

Fig. 127. $C + DE = 180°$, also $A + B + C + (EF + DF + DE) = 540°$, und folglich ist $A + B + C < 540°$. Da überdieß $(EF + DF + DE) < 360°$ ist; so ist $A + B + C + (EF + DF + DE) - (EF + DF + DE) > 540° - 360°$; nähmlich es ist $A + B + C > 180°$.

§. 569.

128. I. In einem jeden so wohl rechtwinkeligen als auch schiefwinkeligen sphärischen Dreyecke verhalten sich die Sinus der Seiten gegen einander, wie die Sinus der gegen über stehenden Winkel; nähmlich es ist (Fig. 128.) wenn der Winkel $NRM = 90°$ ist $r : \sin H = \sin a : \sin A = \sin b : \sin B$; ingleichen ist (Fig. 129 und 130.) $\sin a : \sin A = \sin b : \sin B = \sin c : \sin C$.

Beweis für das rechtwinkelige Dreyeck. Man ziehe aus den Spitzen M, N, R der sphärischen Winkel zu dem Mittelpuncte der dazu gehörigen Kugel die Halbmesser MC, NC, RC, und aus N auf CR die Senkrechte NG; so steht NG senkrecht auf der Ebene CRM, weil die Ebene CNR wegen des rechten Winkels R auf der Ebene CRM senkrecht steht (469.). Ferner lege man durch die Gerade NG eine Ebene NFG senkrecht auf CM; so ist FG senkrecht auf CM und auf NG, und auch NF senkrecht auf CM; folglich ist NFG = dem Neigungswinkel der zwey Ebenen NMC und RMC (468.) = dem sphärischen Winkel a (485.) Ueber dies ist der rechte Winkel NGF = dem rechten sphärischen Winkel R. Endlich ist $NF = \sin H$ und $NG = \sin A$ (537.). Nun ist in dem geradlinigen rechtwinkeligen Dreyecke NGF (vermöge §. 555.) $\sin NGF : NF = \sin NFG : NG$; es ist aber $\sin NGF = r$, $NF = \sin H$, $\sin NFG = \sin a$; und $NG = \sin A$; folglich ist auch $r : \sin H = \sin a : \sin A$.

Eben so läßt sich erweisen, daß auch $r : \sin H = \sin b : \sin B$ statt findet; folglich ist

I. $r : \sin H = \sin a : \sin A = \sin b : \sin B$.

Beweis für das schiefwinkelige Dreyeck. Man gedenke durch die Spitze eines Winkels c und durch den Mittel-

telpunct der dazu gehörigen Kugel eine Ebene, die auf der Ebene des gegen über stehenden Bogens *C* senkrecht ist; so gibt diese senkrechte Ebene auf der Kugelfläche einen Bogen cD eines größten Kreises, der auf der Seite *C* senkrecht steht, und dieselbe entweder in ihrer Verlängerung, oder zwischen b und a so durchschneidet, daß bcD und Doa zwey rechtwinkelige sphärische Dreyecke werden. Fig. 129. 130.

Vermöge des vorhergehenden Beweises ist nun:

$$r : \sin A = \sin b : \sin cD$$
$$r : \sin B = \sin a : \sin cD$$

folglich ist $\sin a : \sin A = \sin b : \sin B$ (vermöge 190. H.).

Eben so läßt sich erweisen, daß auch $\sin b : \sin B = \sin c : \sin C$ statt findet, wenn man von a einen senkrechten Bogen auf *A* gedenket; daher ist

$$\sin a : \sin A = \sin b : \sin B = \sin c : \sin C.$$

In einem jeden sowohl rechtwinkeligen als auch schiefwinkeligen sphärischen Dreyecke kann demnach aus zwey Seiten und aus einem gegen über stehenden Winkel der zweyte gegen über stehende Winkel, und auch aus zwey Winkeln und aus einer gegen über stehenden Seite die zweyte gegen über stehende Seite durch die Rechnung gefunden werden, wenn man die drey gegebenen Stücke mit dem 4ten gesuchten gehörig in eine Proportion setzet. Nur muß es in diesem Falle aus anderen Umständen bekannt seyn, ob das gesuchte 4te Stück größer oder kleiner als 90° sey. Die Kennzeichen, aus welchen abzunehmen ist, ob das gesuchte Stück größer oder kleiner als 90° sey, werden weiter unten folgen.

§. 570.

II. In einem jeden rechtwinkeligen sphärischen Dreyecke MRN verhält sich der ganze Sinus zum Sinus einer Kathete, wie die Tangente des an dieser Kathete anliegenden Winkels zur Tangente der gegen über stehenden Kathete. Nähmlich es ist 128.

Fig. r : sin B = tang a : tang A und
128. r : sin A = tang b : tang B.

Denn in den geradlinigen rechtwinkeligen Dreyecken CGN und NGF

ist CG : GN = r : tang NCG
und FG : GN = r : tang NFG (vermöge 561.),

folglich CG : FG = tang NFG : tang NCG (nach 190. II.);
es ist aber auch in dem geradlinigen rechtwinkeligen Dreyecke CFG

CG : FG = sin CFG (r : sin FCG;
folglich ist auch r : sin FCG = tang NFG : tang NCG;
und endlich r : sin B = tang a : tang A
weil sin FCG = sin B, tang NFG = tang a, und tang NCG = tang A ist.

Eben so läßt sich erweisen, daß r : sin A = tang b : tang B statt findet.

§. 571.

132. Die beyden (in §. 569. und 570.) angeführten Lehrsätze sind für die Auflösung der rechtwinkeligen sphärischen Dreyecke hinreichend, weil durch dieselben vermittelst einer leichten Verzeichnung die übrigen noch nöthigen Vergleichungen sehr kurz abgeleitet werden können. Diese Verzeichnung besteht im Folgenden. Man verlängere (Fig. 132) an dem rechten Winkel die beyden Katheten A und B so, daß aF = 90° und auch bG = 90° wird. Aus den Spitzen der beyden Winkel a und b beschreibe man mit dieser Eröffnung von 90° die Bogen B'IF und A'DG, verlängere dann die Seiten, welche die Winkel a und b einschließen, bis sie die beschriebenen Bogen durchschneiden; so ist aI = 90° und steht senkrecht auf B'F, weil aI durch den Pol a des Bogens FB' gezogen ist (484. II. und V.). Da ferner die Bogen B'K und B'F auf den Bogen aF senkrecht, und folglich beyde durch den Pol desselben Bogens gezogen sind (484. III.); so ist ihr gemeinschaftlicher Durchschnitts-Punct, nähmlich der Punct B' der Pol des Bogens aF, daher B'K = 90° und auch B'F = 90°. Durch eben die-

sel-

selbe Schlußfolge kann gezeiget werden, daß $A'G = 90°$, Fig. $A'R = 90°$, und der Winkel bey D ein rechter Winkel ist. 132.
Nun ist $a' = 90° - IF = 90° - a$, $A' = 90° - bR = 90° - A$, $H' = 90° - H$, und $B' = FR = 90° - B$. Ferner ist $b' = 90° - DG = 90° - b$, $B' = 90° - B$, $H' = 90° - H$ und $A' = GR = 90° - A$. Bey der Anwendung dieser Verzeichnung muß man sich zurück erinnern, daß die trigonometrischen Functionen der Bogen oder Winkel den Cofunctionen ihrer Complemente gleich sind, nähmlich daß $\sin A' = \cos A$, $\text{tang } A' = \cot A$, und $\cos A' = \sin A$, $\cot A' = \text{tang } A$ u. s w. ist. Wir wollen sogleich zu dieser Anwendung schreiten.

In dem rechtwinkeligen Dreyecke B'Ib ist (569.)

1) $r : \sin A' = \sin B' : \sin H'$

und $r : \sin A' = \sin b : \sin a'$; nähmlich

III. $r : \cos A = \cos B : \cos H$

IV. $r : \cos A = \sin b : \cos a$.

In eben demselben Dreyecke B'Ib ist (570.).

2) $\sin I : \sin H' = \text{tang } b : \text{tang } a' = \dfrac{r^2}{\text{tang } a'} : \cot b$

und $\sin I : \sin a' = \text{tang } B' : \text{tang } H' = \cot H' : \cot B'$; nähmlich

V. $r : \cot a = \cot b : \cos H$

VI. $r : \cos a = \text{tang } H : \text{tang } B$.

Es ist einleuchtend, daß man auf eben dieselbe Art in dem Dreyecke A'aD schließen kann.

§. 572.

Die angeführten Proportionen zeigen deutlich, daß man aus zweyen, nebst dem rechten Winkel, gegebenen Stücken eines rechtwinkeligen sphärischen Dreyeckes jederzeit die drey übrigen Stücke bestimmen kann. Da sich ferner fünf Größen zu zweyen zehnmahl verbinden lassen, und aus jeder dieser Verbindung drey Größen bestimmet werden können; so sind überhaupt bey den rechtwinkeligen sphärischen Dreyecken 30 verschiedene Gleichungen möglich. Alle diese 30 Gleichungen befinden sich im Anhange dieses Lehrbuches ta-

bel-

Fig. bellarisch zusammen getragen, damit man im vorkommenden Falle zur Auflösung einer dazu gehörigen Aufgabe die nöthige Gleichung ohne Mühe heraus nehmen, und sich derselben bedienen könne. Ueberhaupt reduciren sich diese Gleichungen auf 6 verschiedene Hauptvergleichungen; nähmlich 1) zwischen der Hypothenuse und zweyen gegen über stehenden Stücken, 2) zwischen zweyen Katheten und einem Winkel, 3) zwischen den drey Seiten, 4) zwischen den zwey Winkeln und einer Kathete, 5) zwischen den zwey Winkeln und der Hypothenuse, endlich 6) zwischen der Hypothenuse, einer Kathete und dem eingeschlossenen Winkel. Diese Hauptvergleichungen sind nach der hier angeführten Ordnung oben (§. 569. 570 und 571.) entwickelt, und mit römischen Zahlzeichen bemerket worden. Nun bleibt noch die Angabe der Merkmahle übrig, aus welchen man erkennen kann, ob das gesuchte Stück größer oder kleiner als 90° sey.

§. 573.

I. In einem jeden rechtwinkeligen sphärischen Dreyecke sind die Winkel an der Hypothenuse mit den gegen über stehenden Katheten gleichartig, und umgekehrt die Katheten sind mit den gegen über stehenden Winkeln gleichartig.

Dieses folgt aus der zweyten Hauptvergleichung (§. 570. II.); denn es ist daselbst $\text{tang } a = \frac{r.\text{tang } A}{\sin B}$. Nun ist sowohl r als auch $\sin B$ jederzeit positiv. Setzet man $A < 90°$ so ist $\text{tang } A$, also auch $\frac{r.\text{tang } A}{\sin B}$, folglich auch $\text{tang } a$ positiv, nähmlich $a < 90°$. Setzet man aber $A > 90°$; so ist $\text{tang } A$, also auch $\frac{r.\text{tang } A}{\sin B}$, und $\text{tang } a$ negativ, nähmlich $a > 90°$. Ist endlich $A = 90°$, so ist $\text{tang } A$, und $\frac{r.\text{tang } A}{\sin B}$, folglich auch $\text{tang } a = \infty$, nähmlich $a = 90°$.

Daß eben dieselbe Schlußfolge für den Winkel b und die Ka-

Kathete B, dann auch für den umgekehrten Fall angewendet Fig.
werden kann, ist für sich einleuchtend.

II. In einem jeden rechtwinkeligen sphärischen Dreyecke sind die Katheten gleichartig, wenn die Hypothenuse $< 90°$ ist; hingegen ungleichartig, wenn die Hypothenuse $> 90°$ ist, endlich muß eine der beyden Katheten $= 90°$ seyn, wenn die Hypothenuse $= 90°$ ist; und umgekehrt.

Denn aus der dritten Hauptvergleichung (§. 571. III.) folgt $r . \cos H = \cos A . \cos B$. Setzet man $H < 90°$, so ist $r . \cos H$, folglich auch $\cos A . \cos B$ positiv. Dieses kann aber auf keine andere Art statt finden, als wenn beyde Factoren $\cos A$, $\cos B$ entweder zugleich positiv, oder zugleich negativ sind; nähmlich wenn beyde Katheten A und B zugleich $< 90°$, oder zugleich $> 90°$, mit einem Worte gleichartig sind. Setzet man aber $H > 90°$; so ist $r . \cos H$, folglich auch $\cos A . \cos B$ negativ. Dieses kann nur geschehen, wenn einer der beyden Factoren positiv, der andere aber negativ, nähmlich wenn eine der beyden Katheten $< 90°$, die andere aber $> 90°$ ist; d. h. wenn die beyden Katheten ungleichartig sind. Setzet man endlich $H = 90°$; so ist $r . \cos H = 0$; folglich auch $\cos A . \cos B = 0$. Damit dieses statt finde, muß entweder $\cos A = 0$, oder $\cos B = 0$, nähmlich eine der zwey Katheten A oder $B = 90°$ seyn. Eben so kann man auch für das Umgekehrte schließen.

III. In einem jeden rechtwinkeligen sphärischen Dreyecke sind die Winkel an der Hypothenuse gleichartig, wenn die Hypothenuse $< 90°$ ist; hingegen ungleichartig, wenn die Hypothenuse $> 90°$ ist; endlich muß einer von diesen zwey Winkeln $= 90°$ seyn, wenn die Hypothenuse $= 90°$ ist; und umgekehrt.

Dieser Schluß folgt zwar schon unmittelbar aus den in I. und II. gemachten Schlüssen; doch kann man denselben auch aus der fünften Hauptvergleichung (§. 571. V. folgern. Es ist nähmlich daselbst $r . \cos H = \cot a . \cot b$, Setzet man hier $H < 90°$, so ist $r . \cos H$, folglich auch

cot

Fig. $\cot a \,.\, \cot b$ positiv. Damit dieses statt finde; so müssen entweder beyde Factoren zugleich positiv oder zugleich negativ, nähmlich es müssen beyde Winkel gleichartig seyn. Setzet man $H > 90°$; so ist $r \,.\, \cos H$, und auch $\cot a \,.\, \cot b$ negativ; nähmlich es muß einer der Factoren positiv, und der andere negativ, oder die Winkel a und b müssen ungleichartig seyn. Setzet man endlich $H = 90°$, so ist $r \,.\, \cos H = 0$; folglich auch $\cot a \,.\, \cot b = 0$; nähmlich es muß entweder $\cot a$ oder $\cot b = 0$, das heißt, es muß ein Winkel a oder $b = 90°$ seyn. Für das Umgekehrte muß auf eben dieselbe Art geschlossen werden.

Aus diesen angeführten Schlüssen ist nun leicht einzusehen, daß man aus einem Winkel und aus der gegen über stehenden Kathete nicht bestimmen könne, ob das zu suchende Stück größer oder kleiner als $90°$ sey.

Anmerkung. Im §. 565. ist gezeiget worden, wie man zu einem jeden sphärischen Dreyecke ein anderes von der Eigenschaft finden könne, daß die Seiten des einen Dreyeckes die Winkel des anderen Dreyeckes, und umgekehrt, die Winkel des einen die Seiten des anderen Dreyeckes auf $180°$ ergänzen; oder welches einerley ist, daß die Seiten des einen Dreyeckes und die Winkel des anderen Dreyeckes und umgekehrt, gleiche trigonometrische Functionen haben. Folglich können alle für die Auflösung der rechtwinkeligen Dreyecke entwickelten Sätze, und daraus abgeleiteten Schlüsse, auch auf schiefwinkelige Dreyecke angewendet werden, in welchen eine Seite $= 90°$ ist, wenn man dabey die Buchstaben oben, verkehret, d. h. wenn man diejenigen Buchstaben oben, welche die Seiten des rechtwinkeligen Dreyeckes bezeichnen, für die Winkel des schiefwinkeligen Dreyeckes, und die Buchstaben der Winkel des rechtwinkeligen, für die Seiten des schiefwinkeligen Dreyeckes nimmt. Bey der Anwendung der Sätze ist in diesem Falle noch hauptsächlich zu beobachten daß man bey diesem Uebergange in den trigonometrischen Functionen die Zeichen + und — gehörig ändern muß.

§. 574.

§. 574.

Fig.

In einem jeden schiefwinkeligen sphärischen Dreyecke sind jede drey gegebenen Stücke hinreichend, um eines der drey übrigen Stücke zu bestimmen. Es kommen also in jeder Gleichung für die Auflösung der schiefwinkeligen Dreyecke 4 Größen vor. Da sich nun sechs Größen zu vieren, fünfzehnmahl verbinden lassen, so können 15 verschiedene Gleichungen angesetzet, und aus jeder eine der vier darin enthaltenen Größen bestimmet werden. Es sind daher bey den schiefwinkeligen Dreyecken 60 Fälle möglich. Alle 15 verschiedene Gleichungen lassen sich auf 4 Hauptvergleichungen zurück führen, aus welchen dann sehr leicht für jeden gegebenen Fall insbesondere die gehörige Gleichung abgeleitet werden kann. Diese vier Hauptvergleichungen sind folgende: 1) zwischen zwey Seiten und den zwey gegen über stehenden Winkeln; 2) zwischen vier neben einander liegenden Stücken; 3) zwischen drey Seiten und einem Winkel; 4) zwischen drey Winkeln und einer Seite. Die erste dieser Hauptvergleichungen, nähmlich:

I. Die Sinus der Seiten verhalten sich so gegen einander, wie die Sinus der gegen über stehenden Winkel,

ist schon bey der Auflösung der rechtwinkeligen sphärischen Dreyecke (§. 569. I.) entwickelt worden; die übrigen drey Hauptvergleichungen aber sollen im Folgenden nach der hier angeführten Ordnung vorgenommen werden. Doch ehe wir zu der Bestimmung derselben schreiten, wollen wir noch einige Hülfssätze entwickeln, durch deren Anwendung diese Bestimmung merklich abgekürzt wird.

§. 575.

Wenn in einem schiefwinkeligen sphärischen Dreyecke (Fig. 129 und 130.) aus der Spitze eines Winkels auf die gegen über stehende Seite, oder auf deren Verlängerung ein senkrechter Bogen gezogen wird, so verhalten sich:

Fig. 129. 130. A) Die Sinus der Abschnitte wie umgekehrt die Tangenten der anliegenden Winkel; nähmlich sin M : sin N = tang$a$: tang$b$

B) Die Cosinus der Abschnitte wie die Cosinus der anliegenden Seiten, daß ist: cos M : cos N = cos A : cos B.

C) Die Sinus der Winkel an der Spitze, aus welchen der senkrechte Bogen gezogen worden ist, wie die Cosinus der an der Grundlinie liegenden Winkel; nähmlich sin m : sin n = cos b : cos a.

D) Die Cosinus der Winkel an der Spitze, wie umgekehrt die Tangenten der anliegenden Seiten, das ist cos m : cos n = tang B : tang A.

Denn durch den senkrechten Bogen cD entstehen zwey rechtwinkelige Dreyecke bcD und acD. In diesen Dreyecken ist

1) r : sin M = tang$b$: tang cD
und r : sin N = tang$a$: tang cD (570. II.)

folglich auch A) sin M : sin N = tang$a$: tang$b$, (nach 190. II.)

2) r : cos cD = cos M : cos A
und r : cos cD = cos N : cos B (571. III.)

daher auch B) cos M : cos N = cos A : cos B,

3) r : cos cD = sin m : cos b
und r : cos cD = sin n : cos a (571. IV.)

folglich C) sin m : sin n = cos b : cos a,

4) r : tang A = cos m : tang cD
und r : tang B = cos n : tang cD (571. VI.)

daher D) cos m : cos n = tang B : tang A.

§. 576.

Ob bey einem schiefwinkeligen Dreyecke der senkrechte Bogen in das Dreyeck, oder außerhalb desselben auf die Verlängerung von C neben dem größeren Winkel an der Grundlinie hinausfalle, läßt sich gemeiniglich entscheiden, nachdem einmahl entweder das Stück M, oder der Winkel m berechnet ist. Wenn nähmlich $M > C$, oder $m > c$ gefunden wird (wie in Fig. 130.), so fällt der senkrechte Bogen mD außerhalb des Dreyeckes auf die Verlängerung von

C,

C, über den größeren Winkel a an C hinaus. Hingegen fällt der senkrechte Bogen in das Dreyeck (wie Fig. 129.), wenn $M < C$ oder auch $m < c$ durch die Rechnung gefunden wird. Fig. 129. 130.

Auch ist es leicht einzusehen, daß die Winkel b und a gleichartig, wenn der senkrechte Bogen in das Dreyeck fällt, und ungleichartig seyn müssen, wenn dieser senkrechte Bogen außerhalb des Dreyeckes fällt. Denn in (Fig. 129.) sind in den rechtwinkeligen Dreyecken bcD und Dca (vermöge §. 573. die Winkel b und a mit cD von einerley Art, und folglich auch unter einander gleichartig. Eben so sind (Fig. 130.), in den rechtwinkeligen Dreyecken bmD und amD (vermöge §. 573. I.) die Winkel b und maD mit mD und folglich auch unter einander von einerley Art; und endlich b und a von verschiedener Art, weil der Winkel $a > 90°$ seyn muß, wenn dessen Nebenwinkel maD und auch $b < 90°$ ist. Umgekehrt, der senkrechte Bogen fällt in das Dreyeck, wenn die Winkel b und a gleichartig, er fällt außerhalb des Dreyeckes, wenn diese Winkel an der Grund-Linie ungleichartig sind.

§. 577.

II. In einem jeden sphärischen Dreyecke findet zwischen vier neben einander liegenden Stücken A, b, C, und a, folgende Gleichung statt.

$$\sin C \,.\, \cot A = \sin b \,.\, \cot a + \cos b \,.\, \cos C.$$

Denn man fälle aus der Spitze des dritten Winkels auf die gegen über stehende Seite einen senkrechten Bogen; so ist

$r : \text{tang } A = \cos b : \text{tang } M$ nach (§. 571. VI.)

und $\sin M : \sin N = \text{tang } a : \text{tang } b = r^2 : \text{tang } b \cot a$ (nach §. 575. A)

folglich $\text{tang } M = \dfrac{\text{tang } A \,.\, \cos B}{r} = \dfrac{r \,.\, \cos b}{\cot A}$ (A).

Ferner ist (Fig. 129.) $M + N = C$, nähmlich $N = C - M$. Dieser Werth in die zweyte Proportion substituiret gibt

Fig. 129. $\sin M : \sin(C-M) = r^2 : \cot a \,.\, \text{tang} b$.

Fig. 130. und $r \,.\, \sin M : \sin C \,.\, \cos M - \sin M \,.\, \cos C = r^2 : \cot a \,.\, \text{tang} b$

$$\frac{r^2 \,.\, \sin M}{\cos M} : \frac{r \,.\, \sin C \,.\, \cos M}{\cos M} - \frac{r \,.\, \sin M \,.\, \cos C}{\cos M} = r^2 : \frac{r \cot a \,.\, \sin b}{\cos b}$$

daraus folgt $\text{tang} M \left(\frac{\cot a \,.\, \sin b}{\cos b} + \cos C\right) = r \,.\, \sin C$.

Wenn man statt $\text{tang} M$ den (in A) entwickelten Ausdruck $\frac{r \,.\, \cos b}{\cot A}$ substituiret; so erhält man

$$\frac{r \,.\, \cos b}{\cot A} \,.\, \left(\frac{\cot a \,.\, \sin b}{\cos b} + \cos C\right) = r \,.\, \sin C;$$ und hieraus endlich

$$\sin C \,.\, \cot A = \sin b \,.\, \cot a + \cos b \,.\, \cos C.$$

Daß eben derselbe Ausdruck zum Vorschein kommt, wenn der senkrechte Bogen (Fig. 130.) außerhalb des Dreyeckes fällt, kann sich ein jeder selbst sehr leicht überzeugen.

§. 578.

III. In einem jeden sphärischen Dreyecke lassen sich alle drey Seiten und ein Winkel desselben durch einen der folgenden Sätze vergleichen; nähmlich

1) Der Cosinus eines Winkels ist gleich dem Quadrate des ganzen Sinus multipliciret mit dem Cosinus der gegen über liegenden Seite, weniger dem ganzen Sinus multipliciret mit dem Producte aus dem Cosinus der beyden einschließenden Seiten, und das Ganze getheilt durch das Product aus dem Sinus der beyden einschließenden Seiten. Nähmlich es ist.

$$\cos b = \frac{r^2 \,.\, \cos B - r \,.\, \cos A \,.\, \cos C}{\sin A \,.\, \sin C}.$$

2) Es verhält sich das Praduct aus dem Sinus von zwey Seiten zu dem Producte aus dem Sinus der Differenzen, welche man erhält, wenn man einmahl eine, dann die andere dieser einschließenden Seiten von der halben Summe aller drey Seiten abziehet, gleich wie das Quadrat des ganzen Sinus zu dem Quadrate

des

des Sinus von dem halben Winkel, welchen die zwey Seiten einschließen: nähmlich es ist, wenn man die halbe Summe aller drey Seiten, das ist $\frac{1}{2}(A+B+C)=P$ setzet, Fig. 129. 130.

$\sin A \times \sin C : \sin(P-A) \times \sin(P-C) = r^2 : \sin^2 \frac{1}{2} b$.

3) Es verhält sich das Product aus dem Sinus zweyer Seiten zu dem Producte aus dem Sinus der halben Summe aller drey Seiten multipliciret mit dem Sinus der Differenz, welche man erhält, wenn man von der halben Summe aller drey Seiten die dritte Seite abziehet, gleich wie das Quadrat des ganzen Sinus zu dem Quadrate des Cosinus von dem halben Winkel, welchen die zwey ersteren Seiten einschließen. Nähmlich es ist $\sin A \times \sin C : \sin P \times \sin(P-B) = r^2 : \cos^2 \frac{1}{2} b$.

Denn es ist $r : \text{tang } A = \cos b : \text{tang } M$, (verm. §. 571. VI.)

nähmlich $\text{tang } M = \frac{\cos b . \text{tang } A}{r} = \frac{\cos b . \sin A}{\cos A}$ (A).

Ferner ist $\cos M : \cos N = \cos A : \cos B$, (verm. §. 575. B.)

Nun ist (Fig. 129.) $N = C - M$. Dieser Werth in die letzte Proportion substituiret, gibt

$\cos M : \cos(C-M) = \cos A : \cos B$;

ferner $r . \cos M : \cos C . \cos M + \sin C . \sin M = \cos A : \cos B$

und $\frac{r^2 . \cos M}{\cos M} : \frac{r . \cos C . \cos M}{\cos M} + \frac{r . \sin C . \sin M}{\cos M} = \cos A : \cos B$;

nähmlich $r^2 : r . \cos C + \sin C . \text{tang } M = \cos A : \cos B$,

daraus folget $\text{tang } M = \frac{r^2 . \cos B - r . \cos A . \cos C}{\sin C . \cos A}$.

Da nun $\text{tang } M = \frac{\cos b . \sin A}{\cos A}$ (A) ist,

so ist auch $\frac{\cos b . \sin A}{\cos A} = \frac{r^2 . \cos B - r . \cos A . \cos C}{\sin C . \cos A}$

endlich ist 1) $\cos b = \frac{r^2 . \cos B - r . \cos A . \cos C}{\sin A . \sin C}$.

Ferner ist (543. IV u. V.) $\cos b = \frac{r^2 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} b}{r} = \frac{2 \cos^2 \frac{1}{2} b - r^2}{r}$

folg=

Fig. 129. folglich ist auch $\frac{r^2 - 2\sin^2 \frac{1}{2}b}{r} = \frac{r^2 \cdot \cos B - r \cdot \cos A \cdot \cos C}{\sin A \cdot \sin C}$

130. und $\frac{2\cos^2 \frac{1}{2}b - r^2}{r} = \frac{r^2 \cdot \cos B - r \cdot \cos A \cdot \cos C}{\sin A \cdot \sin C}$.

Aus der ersten Gleichung ist $2\sin^2 \frac{1}{2}b \cdot \sin A \cdot \sin C = r^2(\sin A \sin C + \cos A \cos C) - r^3 \cos B = r^3 \cdot \cos(C - A) - r^3 \cdot \cos B = r^3[\cos(C - A) - \cos B]$ (A).

Aus der zweyten Gleichung ist $2\cos^2 \frac{1}{2}b \cdot \sin A \cdot \sin C = r^3 \cdot \cos B - r^2(\cos A \cdot \cos C - \sin A \sin C) = r^3 \cdot \cos B - r^3 \cdot \cos(A + C) = r^3[\cos B - \cos(A + C)]$ (B).

Nun setze man in (A) der kürzeren Arbeit wegen $C - A = q$ und $B = p$; so ist $2\sin^2 \frac{1}{2}b \cdot \sin A \cdot \sin C = r^3(\cos q - \cos p) = 2r^2 \cdot \sin \frac{1}{2}(p + q) \cdot \sin \frac{1}{2}(p - q)$ (vermöge §. 549. IV.)

Wenn man wieder für p und q die vorigen Werthe substituiret; so ist $\frac{1}{2}(p + q) = \frac{1}{2}(C - A + B) = \frac{1}{2}(A + B + C) - A = P - A$; und $\frac{1}{2}(p - q) = \frac{1}{2}(B - C + A) = \frac{1}{2}(A + B + C) - C = P - C$; folglich $\sin^2 \frac{1}{2}b \cdot \sin A \cdot \sin C = r^2 \sin(P - A) \cdot \sin(P - C)$, und

2) $\sin A \times \sin C : \sin(P - A) \times \sin(P - C) = r^2 : \sin^2 \frac{1}{2}b$.

In der Gleichung (B) aber setze man $B = q$ und $A + C = p$; so ist $2\cos^2 \frac{1}{2}b \cdot \sin A \cdot \sin C = r^3(\cos q - \cos p) = 2r^2 \cdot \sin \frac{1}{2}(p + q) \cdot \sin \frac{1}{2}(p - q)$. Nun ist in diesem Falle $\frac{1}{2}(p + q) = \frac{1}{2}(A + B + C) = P$ und $\frac{1}{2}(p - q) = \frac{1}{2}(A + C - B) = \frac{1}{2}(A + B + C) - B = P - B$; folglich ist $\cos^2 \frac{1}{2}b \cdot \sin A \cdot \sin C = r^2 \cdot \sin P \cdot \sin(P - B)$ und

3) $\sin A \times \sin C : \sin P \sin(P - B) = r^2 : \cos^2 \frac{1}{2}b$.

Auf eben dieselbe Art wird der Beweis geführet, wenn (Fig 130.) der senkrechte Bogen außerhalb des Dreyeckes fallen sollte.

Durch Hülfe dieser Sätze kann man sehr leicht einsehen, daß zwey Dreyecke auf einer und derselben Kugel, wenn ihre Seiten wechselweise einander gleich sind, auch gleiche Winkel haben; ingleichen daß ein gleichseitiges sphärisches Dreyeck zugleich auch gleichwinkelig seyn muß.

§. 579.

VI. In einem jeden sphärischen Dreyecke lassen sich alle drey Winkel und eine Seite desselben, durch einen der folgenden Sätze vergleichen, nähmlich Fig. 129. 130.

1) Der Cosinus einer Seite ist gleich dem Quadrate des ganzen Sinus multipliciret mit dem Cosinus des gegen über liegenden Winkels, mehr dem ganzen Sinus multipliciret mit dem Producte aus den Cosinus der anliegenden Winkel, das Ganze getheilet durch das Product aus den Sinus der beyden anliegenden Winkel. Nähmlich es ist $\cos A = \frac{r^2 . \cos a + r . \cos b . \cos c}{\sin b . \sin c}$.

2) Es verhält sich das Product aus den Sinus zweyer Winkel zu dem Producte aus den Cosinus der Differenzen, welche man erhält, wenn man einmahl einen und dann den anderen dieser beyden Winkel von der halben Summe aller drey Winkel abziehet, gleich wie das Quadrat des ganzen Sinus zu dem Quadrate des Cosinus von der halben Seite, welche zwischen den beyden Winkeln liegt. Nähmlich es ist, wenn man die halbe Summe aller drey Winkel, das ist $\frac{1}{2}(a+b+c) = p$ setzet, $\sin b \times \sin c : \cos(p-b) \times \cos(p-c) = r^2 : \cos^2 \frac{1}{2} A$.

3) Es verhält sich das Product aus den Sinus zweyer Winkel zu dem Producte des Cosinus von der halben Summe aller drey Winkel multipliciret mit dem Cosinus der Differenz, welche man erhält, wenn man von der halben Summe aller drey Winkel den dritten Winkel abziehet; gleich wie das Quadrat des ganzen Sinus zu dem Quadrate des Sinus von der halben Seite, welche dem abgezogenen Winkel gegen über stehet. Nähmlich es ist

$$\sin b \times \sin c : \cos p \times \cos(p-a) = r^2 : \sin^2 \tfrac{1}{2} A.$$

Den ersten dieser Sätze kann man eben so, wie es im vorigen §. geschehen ist, kürzer aber auf folgende Art ableiten. Man setze (Fig. 127.) in dem Dreyecke ABC, damit wir die obige Benennung beybehalten, AB = *A* AC 127.

Fig. 127. $AC = B$, $BC = C$, und bezeichne die diesen Seiten gegenüber liegenden Winkel mit den gleichnahmigen kleinen Buchstaben a, b, c. Es ist im §. 565. und im §. 573. in der Anmerkung erinnert worden, daß bey einem jeden sphärischen Dreyecke ein anderes verzeichnet werden kann, welches die Eigenschaft hat, daß die Seiten des einen Dreyeckes die Winkel des anderen, und die Winkel des einen Dreyeckes die Seiten des anderen Dreyeckes auf 180° ergänzen. Es sey also das Dreyeck DEF von dieser Eigenschaft, so ist

(vermöge §. 578. V.) $\cos F = \frac{r^2 \cos DE - r.\cos DF.\cos EF}{\sin DF.\sin EF}$;

es ist aber $\sin EF = \sin c$, $\sin DF = \sin b$, $\cos DE = -\cos a$, $\cos EF = -\cos c$, $\cos DF = -\cos b$, $\cos F = -\cos A$, [weil die trigonometrischen Functionen der Bogen und Winkel, welche sich auf 180° ergänzen, einander gleich sind, mit dem einzigen Unterschiede, daß $\cos a$, $\cos b$ u. s. w. (540. III.) negativ genommen werden muß, wenn der Cosinus der Ergänzung, nähmlich $\cos DE$, $\cos DF$ positiv ist];

folglich ist $-\cos A = \frac{-r^2.\cos a - r.\cos b.\cos c}{\sin b.\sin c}$; und

1). $\cos A = \frac{r^2.\cos a + r.\cos b.\cos c}{\sin b.\sin c}$.

Ferner ist (543. IV. V.) $\cos A = \frac{2\cos^2 \frac{1}{2} A - r^2}{r}$ und auch

$\cos A = \frac{r^2 - 2.\sin^2 \frac{1}{2} A}{r}$; folglich ist

$\frac{2.\cos^2 \frac{1}{2} A - r^2}{r} = \frac{r^2.\cos a + r.\cos b.\cos c}{\sin b.\sin c}$, und

$\frac{r^2 - 2\sin^2 \frac{1}{2} A}{r} = \frac{r^2 \cos a + r.\cos b.\cos c}{\sin b.\sin c}$.

Aus der ersten Gleichung folgt,

$2.\cos^2 \frac{1}{2} A.\sin b.\sin c = r^3.\cos a + r^2(\cos b.\cos c + \sin b.\sin c) =$
$r^3.[\cos a + \cos(c - b)] = 2.r^2.\cos(p - b).\cos(p - c)$

[wenn man den Ausdruck $\cos a + \cos(c - b)$ vermittelst §. 549. Formel III. entwickelt und dabey eben so verfährt

wie

wie es im vorigen §. gezeiget worden ist]; folglich ist Fig. $\cos^2\frac{1}{2}A \,.\, \sin b \,.\, \sin c = r^2 \,.\, \cos(p-b) \,.\, \cos(p-c)$, und

2) . $\sin b \times \sin c : \cos(p-b) \times \cos(p-c) = r^2 : \cos^2\frac{1}{2}A$.

Aus der zweyten oben angesetzten Gleichung folgt,

$2.\sin^2\frac{1}{2}A.\sin b.\sin c = -r^3.\cos a - r^2(\cos b.\cos c - \sin b.\sin c)$

$= -r^3[\cos a + \cos(b+c)]$.

Nun ist (vermöge §. 549. III.) $\cos a + \cos(b+c)$ $= -2 \,.\, \cos p \,.\, \cos(p-a) : r$, weil (§. 568.) die Summe aller drey Winkel eines sphärischen Dreyeckes $> 180°$, daher die halbe Summe derselben nähmlich $p > 90°$ seyn muß; es ist also

$\sin^2\frac{1}{2}A \,.\, \sin b \,.\, \sin c = r^2 \,.\, \cos p \,.\, \cos(p-a)$ und

3) . $\sin b \times \sin c : \cos p \times \cos(p-a) = r^2 : \sin^2\frac{1}{2}A$.

Aus diesen Sätzen folgt unmittelbar, daß zwey Dreyecke auf einer und derselben Kugel von wechselsweise gleichen Winkeln auch gleiche Seiten haben; und daß ein gleichwinkeliges sphärisches Dreyeck auch gleichseitig seyn muß.

Die in (§. 569. 577. 578 und 579.) abgeleiteten Sätze sind die im §. 574. erwähnten vier Hauptvergleichungen, aus welchen für jeden gegebenen Fall die nöthige Gleichung sehr leicht gefunden werden kann. Sowohl diese analitischen Gleichungen, als auch die stufenweise Bearbeitung eines jeden Falles für die leichte logarithmische Rechnung sind im Anhange in tabellarischer Ordnung zusammengetragen. Damit der Anfänger sowohl die Richtigkeit derselben einsehe, als auch den Gebrauch vollkommen erlerne; so werden wir die ungleichartigen Fälle, nach der Ordnung, wie sie in der Tabelle angenommen sind, insbesondere vornehmen. Doch ehe wir dazu schreiten, wollen wir noch folgenden Lehrsatz entwickeln, und damit die Theorie der sphärischen Trigonometrie beschließen.

§. 580.

Der Flächeninhalt eines sphärischen Dreyeckes ist gleich dem Halbmesser der Kugel, multipliciret mit dem Längenmaße eines Bogens von einem größten Kreise, welcher so viele Grade hat, als der Ueberschuß

Fig. 134. der Grade aller drey sphärischen Winkel über 180° beträgt. Nähmlich es ist (Fig. 134.) der Flächeninhalt des sphärischen Dreyeckes $ABC = R \times (A+B+C-180°) \frac{R\pi}{180°}$

$= \frac{R^2.\pi}{180°}.(A+B+C-180°)$; wenn wir den Halbmesser der Kugel durch R, und die Grade der sphärischen Winkel durch A, B, C bezeichnen.

Denn man verlängere nur alle drey Seiten des Dreyeckes, bis jede derselben einen ganzen Umkreis ausmacht, und gedenke die Durchschnitts-Linien dieser größten Kreise, nähmlich die Durchmesser Aa, Bb und Cc; so ist wegen der gleichen Scheitelwinkel AGb und aGB der Bogen ADb = adB. Aus eben derselben Ursache ist der Bogen AEc = aeC, und auch bc = BC. Da nun in den zwey sphärischen Dreyecken AEcbDA und aeCBda die Seiten einander wechselsweise gleich sind, so sind es auch die Winkel; und diese zwey Dreyecke sind vollkommen auf einerley Art bestimmet. Daher sind sie auch am Flächeninhalte einander gleich, nähmliches ist AEcbDA = aeCBda. Ferner ist (§. 500.) das von den zwey größten Halbkreisen ABda und ACea eingeschlossene Stück der Kugelfläche gleich dem Längenmaße des sphärischen Winkels A multipliciret mit dem Durchmesser der Kugel, nähmlich es ist $ABdaeCA = 2R \times \frac{A.R\pi}{180°} = \frac{2R^2\pi}{180°}.A$; das ist $ABC + aeCBda = \frac{2.R^2\pi}{180°}.A$, folglich auch, wenn wir AEcbDA statt aeCBda substituiren, $ABC + AEcbDA = \frac{2R^2\pi}{180°}.A$. Aus eben derselben Ursache ist

$BADbfCB = \frac{2R^2\pi}{180°}.B$, oder $ADbfCA = \frac{2.R^2\pi}{180°}.B - ABC$,

wenn wir beyderseits ABC abziehen, und auch

$CBFcEAC = \frac{2.R^2\pi}{180°}.C$, oder $ABFcEA = \frac{2R^2\pi}{180°}.C - ABC$.

Da nun ABC + AEcbDA $=$ $A \cdot 2R^2\pi : 180$ Fig.
und ADbfCA $=$ $B \cdot 2R^2\pi : 180 - ABC$ 184.
ABFcEA $=$ $C \cdot 2R^2\pi : 180 - ABC$ ist;

---

so ist auch ABC + AEcbDA + ADbfCA + ABFcEA

$= \frac{2R^2\pi}{180^\circ}(A+B+C) - 2ABC$, wenn man die drey letzten Gleichungen zusammen addiret. Es ist aber ABC + ABFcEA + AEcbDA + ADbfCA die Oberfläche der Halbkugel $= 2R^2\pi$ (vermöge §. 496.); folglich ist auch

$2R^2\pi = \frac{2R^2\pi}{180}(A+B+C) - 2ABC$; und endlich

$ABC = \frac{R^2\pi}{180}(A+B+C-180^\circ) = R \times (A+B+C-180^\circ).\frac{R\pi}{180}$

Anmerkung. Es sey der Winkel $C = 90^\circ$, nähmlich das Dreyeck ABC rechtwinkelig; so ist der Flächeninhalt desselben $= \frac{R^2\pi}{180}(A+B) - \frac{1}{2}R^2\pi$. Hat das Dreyeck ABC zwey rechte Winkel, nähmlich $B = 90^\circ$ und $C = 90^\circ$, so ist der Flächeninhalt $= \frac{R^2\pi . A}{180}$. Sind aber alle drey Winkel rechte Winkel, nähmlich $A = 90^\circ$, $B = 90^\circ$ und $C = 90^\circ$; so ist der Flächeninhalt eines solchen Dreyeckes $= \frac{1}{2}R^2\pi =$ dem achten Theile von der Oberfläche der dazu gehörigen Kugel; welches leicht einzusehen ist, weil in diesem Falle auch die Seiten einander gleich, nähmlich Quadranten sind (§. 579.), und weil die Oberfläche der Halbkugel sich augenscheinlich in 4 solche Dreyecke zertheilen läßt.

Da sich ein jedes auf der Kugelfläche von Bogen größter Kreise eingeschlossene Vieleck in lauter sphärische Dreyecke auflösen läßt; so ist es ganz begreiflich, daß durch Hülfe dieses Satzes der Flächeninhalt eines jeden solchen Vieleckes sehr leicht zu berechnen ist.

Fig. 129. 130.

§. 581.

Aufgaben.

I. Es sind in einem sphärischen Dreyecke alle drey Seiten A, B, C, gegeben; man soll einen Winkel desselben z. B. b finden.

Auflösung. Vermöge der dritten Hauptvergleichung (§. 578. Nro. 1) ist für den sintot $= 1$, welcher auch in allen folgenden Aufgaben zum Grunde liegt, die hierher gehörige analytische Formel $\cos b = \frac{\cos B - \cos A . \cos C}{\sin A . \sin C}$.

Diese Formel sowohl, als auch die analytischen Formeln der meisten nachstehenden Aufgaben haben zwar die erhebliche Unbequemlichkeit, daß sie sich nicht wohl logarithmisch bearbeiten lassen. Doch kann man jederzeit die dazu gehörige Hauptvergleichung vermittelst des im §. 564. III. Aufgabe erörterten Kunstgriffes in zwey Gleichungen auflösen; aus welchen dann die gesuchte Größe sich sehr leicht durch die logarithmische Berechnung bestimmen läßt. In diesem Falle ist

$$\cos b . \sin A . \sin C = \cos B - \cos A . \cos C$$

folglich auch $\frac{\cos b . \sin A . \sin C}{\sin B} = \frac{\cos B}{\sin B} - \frac{\cos A . \cos C}{\sin B}$.

Nun setze man $\frac{\cos A . \cos C}{\sin B} = \text{tang}\,\varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$; (A)

so ist $\frac{\cos b . \sin A . \sin C}{\sin B} = \frac{\cos B}{\sin B} - \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$

oder $\cos b . \sin A . \sin C . \cos \varphi = \cos B . \cos \varphi - \sin B . \sin \varphi$

nähmlich $\cos b . \sin A . \sin C . \cos \varphi = \cos (B + \varphi)$

daraus folgt $\cos b = \frac{\cos (B + \varphi)}{\sin A . \sin C . \cos \varphi}$.

Man bestimme also erstlich aus der Gleichung (A) die Größe φ, welche $< 90°$, wenn die den gesuchten Winkel b einschließenden Seiten A und C gleichartig, hingegen $> 90°$ ist, wenn eben diese Seiten ungleichartig sind; weil in dem ersten Falle die Factoren $\cos A$ und $\cos C$, ein positives, im

zwey

zweyten Falle aber ein negatives Product geben. Dann findet man aus der zweyten Gleichung den gesuchten Winkel b, welcher $< 90°$ ist, wenn der entwickelte Ausdruck positiv ist. Fig. 129. 130.

Man kann auch den gesuchten Winkel b aus den zwey gegebenen Stücken vermittelst der im §. 578. aufgestellten Sätze 2) und 3) sehr bequem logarithmisch berechnen; es ist nähmlich,

$$\sin\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\left[\frac{\sin(P-A).\sin(P-C)}{\sin A.\sin C}\right]}$$

oder $\cos\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\left[\frac{\sin P.\sin(P-B)}{\sin A.\sin C}\right]}$, wenn P die halbe Summe aller drey Seiten, nähmlich $\frac{1}{2}(A+B+C)$ bezeichnet. Die erste dieser beyden Formeln muß bey genauen Rechnungen vermieden werden, wenn der gesuchte Winkel sehr stumpf, die zweyte aber, wenn derselbe Winkel sehr spitzig ausfallen sollte, weil in diesen Fällen $\sin\frac{1}{2}b$ und $\cos\frac{1}{2}b$ sich nicht merklich ändern.

II. Es sind in einem sphärischen Dreyecke zwey Seiten C und A nebst dem eingeschlossenen Winkel b gegeben; man soll die dritte Seite B finden.

Auflösung. Nach der dritten Hauptvergleichung (§. 578. N. 1.) ist die hierzu gehörige analytische Formel

$$\cos b . \sin A . \sin C = \cos B - \cos A . \cos C,$$

daraus folget

$$\cos B = \cos A . \cos C + \sin A . \sin C . \cos b.$$

Diese Formel läßt sich auch auf folgende Art verwandeln. Es ist (nach §. 543. V.)

$$\cos B = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}B, \text{ und } \cos b = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}b.$$

folglich $1 - 2\sin^2\frac{1}{2}B = \cos A . \cos C + \sin A . \sin C - 2\sin^2\frac{1}{2}b . \sin A . \sin C$

und $1 - 2\sin^2\frac{1}{2}B = \cos(A-C) - 2\sin^2\frac{1}{2}b . \sin A . \sin C.$

Nun ist auch $\cos(A-C) = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}(A-C)$; folglich ist

$1 - 2\sin^2\frac{1}{2}B = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}(A-C) - 2\sin^2\frac{1}{2}b . \sin A . \sin C$

nähmlich $\sin^2\frac{1}{2}B = \sin^2\frac{1}{2}(A-C) + \sin^2\frac{1}{2}b . \sin A . \sin C$

und $\sin\frac{1}{2}B = \sqrt{[\sin A . \sin C . \sin^2\frac{1}{2}b + \sin^2\frac{1}{2}(A-C)]}$.

Fig. 129. 130. Für die logarithmische Berechnung aber kann man die obere analytische Formel in folgende zwey Gleichungen auflösen. Es ist nähmlich $\cos B = \cos A \,.\, \cos C + \sin A \,.\, \sin C \,.\, \cos b$;

folglich auch $\frac{\cos B}{\cos C} = \cos A + \sin A \,.\, \text{tang}\, C \,.\, \cos b$.

Nun setze man $\text{tang}\, C \,.\, \cos b = \cot \phi = \frac{\cos \phi}{\sin \phi}$ (hier wird $\phi < 90°$, wenn C und b gleichartig, und $> 90°$, wenn C und b ungleichartig sind);

so ist $\frac{\cos B}{\cos C} = \cos A + \frac{\sin A \,.\, \cos \phi}{\sin \phi} = \frac{\cos A \,.\, \sin \phi + \sin A \,.\, \cos \phi}{\sin \phi}$

und $\frac{\cos B}{\cos C} = \frac{\sin (A + \phi)}{\sin \phi}$

nähmlich $\cos B = \frac{\cos C \,.\, \sin (A + \phi)}{\sin \phi}$.

Die gesuchte Seite B ist $< 90°$, wenn $C < 90°$, und $A + \phi < 180°$, oder wenn $C > 90°$ und $A + \phi > 180°$ ist. Im entgegengesetzten Falle aber ist $B > 90°$.

III. Es sind in einem sphärischen Dreyecke zwey Seiten C und A nebst dem eingeschlossenen Winkel b gegeben, man soll einen der beyden übrigen Winkel z. B. a finden.

Auflösung. Hier kommen vier neben einander liegende Stücke vor, daher ist nach der zweyten Hauptvergleichung (§. 577.) die hierzu gehörige analytische Gleichung

$$\cot a = \frac{\sin C \,.\, \cot A - \cos b \,.\, \cos C}{\sin b}.$$

Um diese Aufgabe logarithmisch aufzulösen, ist in der so eben angesetzten Gleichung

$$\frac{\sin b \,.\, \text{tang}\, A}{\text{tang}\, a} = \sin C - \cos b \,.\, \text{tang}\, A \,.\, \cos C.$$

Man setze wieder $\cos b \,.\, \text{tang}\, A = \cot \phi = \frac{\cos \phi}{\sin \phi}$

(wo eben so wie in der vorigen Aufgabe $\phi < 90°$, wenn

wenn A und b gleichartig, und $\phi > 90°$ ist, wenn A und b ungleichartig sind): so ist Fig. 129. 130.

$$\frac{\sin.b\,\mathrm{tang}A}{\mathrm{tang}\,a} = \sin C - \frac{\cos C.\cos\phi}{\sin\phi}$$

$$= \frac{\sin C.\sin\phi - \cos C.\cos\phi}{\sin\phi} = -\frac{\cos(C+\phi)}{\sin\phi}$$

$$\text{folglich } \mathrm{tang}\,a = -\frac{\sin b.\mathrm{tang}A.\sin\phi}{\cos(C+\phi)} = -\frac{\mathrm{tang}\,b.\cos\phi}{\cos(C+\phi)}$$

wenn man statt $\sin b.\mathrm{tang}A$ den Werth aus der ersten Gleichung $\frac{\cos\phi.\mathrm{tang}b}{\sin\phi}$ substituiret. Hier sieht man deutlich, daß der gesuchte Winkel $a < 90°$ ist, wenn die gegen über stehende Seite A, und $C + \phi$ ungleichartig sind; weil in diesen Fällen $-\frac{\sin b.\mathrm{tang}A.\sin\phi}{\cos(C+\phi)}$ ein positiver Ausdruck wird.

IV. Es sind in einem sphärischen Dreyecke zwey Seiten A und B nebst einem gegen über liegenden Winkel b gegeben, man soll die dritte Seite C bestimmen.

Auflösung. In dieser Aufgabe kommen alle drey Seiten und ein Winkel vor; folglich erhält man aus der dritten Hauptvergleichung (578. A. 1.)

$$\cos b.\sin A.\sin C = \cos B - \cos A.\cos C$$

eine analytische Gleichung für die gesuchte Seite C, wenn man sowohl $\sin C$, als auch $\cos C$, durch eine und dieselbe Function ausdrucket. Am leichtesten kann dieses geschehen, wenn man entweder für $\sin C$, oder für $\cos C$ die Werthe $\sqrt{(1-\cos^2 C)}$, oder $\sqrt{(1-\sin^2 C)}$ substituiret, und dann aus der sich ergebenden verwickelten quadratischen Gleichung die Function der gesuchten Seite $\cos C$ oder $\sin C$ bestimmet; doch kann man, um einen kürzeren Ausdruck zu erhalten auf folgende Art verfahren. Es ist (vermöge §. 543. I.)

$$\sin C = 2\sin\tfrac{1}{2}C.\cos\tfrac{1}{2}C = \frac{2\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}C}, \cos^2\tfrac{1}{2}C = 2\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}C : \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}C}$$

Nun

Fig. 129. 130.

Nun ist aber (vermöge §. 541. IV.) $\frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}C} = \sec^2 \frac{1}{2}C$

$= 1 + \text{tang}^2 \frac{1}{2} C$; folglich ist $\sin C = \frac{2\text{tang}\frac{1}{2}C}{1+\text{tang}^2 \frac{1}{2}C}$

Ferner ist $\cos C = 2\cos^2 \frac{1}{2}C - 1 = \frac{2}{\sec^2 \frac{1}{2}C} - 1$

$= \frac{2 - \sec^2 \frac{1}{2}C}{\sec^2 \frac{1}{2}C} = \frac{2 - 1 - \text{tang}^2 \frac{1}{2}C}{\text{tang}^2 \frac{1}{2}C + 1} = \frac{1 - \text{tang}^2 \frac{1}{2}C}{1 + \text{tang}^2 \frac{1}{2}C}$:

Wenn man diese Werthe gehörig substituiret, so erhält man

$\frac{2\text{tang}\frac{1}{2}C.\cos b.\sin A}{1+\text{tang}^2 \frac{1}{2}C} = \cos B - \frac{\cos A(1 - \text{tang}^2 \frac{1}{2}C)}{1+\text{tang}^2 \frac{1}{2}C}$,

$2\text{tang}^2 \frac{1}{2}C \,.\, \cos b \,.\, \sin A = \cos B + \cos B \,.\, \text{tang}^2 \frac{1}{2}C$
$- \cos A + \text{tang}^2 \frac{1}{2}C \,.\, \cos A$
$\text{tang}^2 \frac{1}{2}C(\cos A + \cos B) - 2\text{tang}\frac{1}{2}C \,.\, \cos b \,.\, \sin A$
$= \cos A - \cos B$

und $\text{tang}^2 \frac{1}{2}C - \text{tang}\frac{1}{2}C . \frac{2.\cos b \,.\, \sin A}{\cos A + \cos B} = \frac{\cos A - \cos B}{\cos A + \cos B}$

folglich

$$\text{tang}\frac{1}{2}C = \frac{\cos b.\sin A \pm \sqrt{(\cos^2 A - \cos^2 B + \cos^2 b.\sin^2 A)}}{\cos A + \cos B}$$

und endlich ist

$$\text{tang}\frac{1}{2}C = \frac{\cos b.\sin A \pm \sqrt{(\sin^2 B - \sin^2 b.\sin^2 A)}}{\cos A + \cos B}$$

eine analytische Gleichung für die gesuchte Seite, wenn man in dem letzten Ausdrucke für $\cos^2 A$, $\cos^2 B$ und $\cos^2 b$ die gleichen Werthe $1 - \sin^2 A$, $1 - \sin^2 B$ und $1 - \sin^2 b$, substituiret.

Für die logarithmische Bearbeitung kann man auf folgende Art die gegebene Aufgabe in zwey Gleichungen zerlegen.

Es ist $\cos b \,.\, \sin A \,.\, \sin C = \cos B - \cos A \,.\, \cos C$

daraus folgt $\cos b.\text{tang} A.\sin C + \cos C = \frac{\cos B}{\cos A}$

Nun setze man $\cos b \,.\, \text{tang}\, A = \cot \phi = \frac{\cos \phi}{\sin \phi}$,

(es

(es ist hier wieder $\phi < 90°$, wenn A und b gleichartig, hingegen ist $\phi > 90°$, wenn A und b ungleichartig sind); Fig. 129.

folglich ist $\frac{\cos B}{\cos A} = \frac{\sin C.\cos\phi}{\sin\phi} + \cos C$ 130.

und $\frac{\cos B.\sin\phi}{\cos A} = \sin C.\cos\phi + \sin\varphi.\cos C = \sin(C+\varphi)$;

woraus sich endlich C bestimmen läßt. Es ist klar, daß $C+\phi < 180°$, wenn B und A gleichartig, hingegen $C+\phi > 180°$ seyn muß, wenn diese beyden Seiten A und B ungleichartig sind.

V. Es sind in einem sphärischen Dreyecke zwey Seiten A und B nebst einem gegen über liegenden Winkel b gegeben, man soll den eingeschlossenen Winkel c bestimmen.

Auflösung. In dieser Aufgabe sind vier neben einander liegende Stücke zu vergleichen; folglich ist nach der zweyten Hauptvergleichung (577.) $\sin A.\cot B = \sin c.\cot b + \cos c.\cos A$. Nun kann man hier eben so wie in der vorigen Aufgabe verfahren.

Es ist nähmlich $\sin c = \frac{2\tan g\frac{1}{2}c}{1+\tan g^2\frac{1}{2}c}$

und $\cos c = \frac{1-\tan g^2\frac{1}{2}c}{1+\tan g^2\frac{1}{2}c}$; folglich ist

$$\frac{\sin A.\cos B}{\sin B} = \frac{2\cos b.\tan g\frac{1}{2}c}{\sin b(1+\tan g^2\frac{1}{2}c)} + \frac{\cos A(1-\tan g^2\frac{1}{2}c)}{1+\tan g^2\frac{1}{2}c}$$

und $\sin b(\sin A.\cos B - \sin B.\cos A) = 2\cos b.\sin B.\tan g\frac{1}{2}c - \tan g^2\frac{1}{2}c.\sin b(\sin A.\cos B + \sin B.\cos A)$

oder $\tan g^2\frac{1}{2}c.\sin b.\sin(A+B) - 2\cos b.\sin B.\tan g\frac{1}{2}c = \sin b.\sin(B-A)$

fernertang$^2\frac{1}{2}c - 2\tan g\frac{1}{2}c.\frac{\cos b.\sin B}{\sin b.\sin(A+B)} = \frac{\sin(B-A)}{\sin(A+B)}$ und

$$\tan g\tfrac{1}{2}c = \frac{\cos b.\sin B}{\sin b.\sin(A+B)} \pm \sqrt{\left[\frac{\sin(B-A)}{\sin(A+B)} + \frac{\cos^2 b.\sin^2 B}{\sin^2 b\sin^2(A+B)}\right]}$$

$$= \frac{\cos b.\sin B \pm \sqrt{[\sin(B-A)\sin(A+B).\sin^2 b + \cos^2 b\sin^2 B]}}{\sin b.\sin(A+B)}$$

=

Fig. 129. $= \frac{\cos b.\sin B \pm V[(\sin^2 B.\cos^2 A - \sin^2 A.\cos^2 B).\sin^2 b + \cos^2 b \sin^2 B]}{\sin b.\sin(A+B)}$

130. endlich ist $\text{tang}\frac{1}{2}c = \frac{\cos b.\sin B \pm V(\sin^2 B - \sin^2 b.\sin^2 A)}{\sin b.\sin(A+B)}$

wenn man unter dem Wurzelzeichen statt $\cos^2 A$, $\cos^2 B$, $\cos^2 b$ die gleichen Werthe $1-\sin^2 A$, $1-\sin^2 B$ und $1-\sin^2 b$ substituiret, und dann gehörig reduciret.

Für die logarithmische Bearbeitung können aus der oben angesetzten Hauptvergleichung auf folgende Art zwey Gleichungen abgeleitet werden. Es ist $\sin A.\cot B = \sin c.\cot b + \cos c.\cos A$. Daraus folget,

$$\sin A.\cot B.\text{tang} b = \sin c + \cos c.\cos A.\text{tang} b.$$

Nun setze man wieder $\cos A.\text{tang} b = \text{tang}\,\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi}$ (es ist $\phi < 90°$, wenn b und A gleichartig sind; im entgegen gesetzten Falle aber ist $\phi > 90°$); so ist

$$\sin A.\cot B.\text{tang} b = \sin c + \frac{\cos c.\sin\phi}{\cos\phi}$$

$$= \frac{\sin c.\cos\phi + \cos c.\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{\sin(c+\phi)}{\cos\phi}$$

folglich ist $\sin(c+\phi) = \cos\phi.\text{tang} A.\cos A.\cot B.\text{tang} b$

$$= \text{tang}\, A.\cot B.\sin\phi.$$

Sind die den gesuchten Winkel einschließenden Seiten A und B gleichartig, so ist $c+\phi < 180°$; sind aber diese Seiten ungleichartig, so wird $c+\phi > 180°$. Dieses gibt die letzte Gleichung zu erkennen, weil im ersten Falle für $c+\phi$ ein positiver, und im zweyten Falle ein negativer Ausdruck erscheinet.

VI. Es sind in einem sphärischen Dreyecke zwey Seiten A und B nebst einem gegen über stehenden Winkel b gegeben; man soll den anderen gegen über stehenden Winkel a finden.

Auflösung. In dieser Aufgabe kommen vier gegen über stehende Stücke vor; folglich ist nach der ersten Hauptvergleichung (§. 569.) die zu diesem Falle gehörige ana-

lyti-

lytische Gleichung $\sin a = \frac{\sin b . \sin A}{\sin B}$. Der gesuchte Win- Fig. 129. 130.
kel a ist $< 90°$ wenn $b < 90°$ und $B > A$ ist; oder es ist $a < 90°$, wenn $b > 90°$, $A < 90°$, und $B < (180° - A)$ ist: ferner ist $a > 90°$ wenn $b > 90$ und $B < A$ ist, oder wenn $b < 90°$ $A > 90°$ und $B > (180° - A)$ ist; für die übrigen Fälle aber ist es unbestimmt.

VII. In einem sphärischen Dreyecke sind alle drey Winkel a, b, und c gegeben: man soll eine Seite desselben z. B. A bestimmen.

Auflösung. Vermöge der vierten Hauptvergleichung (§. 579. N. 1.) ist

$$\cos A = \frac{\cos a + \cos b . \cos c}{\sin b . \sin c}.$$

Für die logarithmische Bearbeitung kann man diese analytische Gleichung auf folgende Art in zwey Gleichungen zerlegen. Es ist

$$\cos A . \sin b . \sin c = \cos a + \cos b . \cos c \text{ und}$$

$$\frac{\cos A . \sin b . \sin c}{\sin a} = \frac{\cos a}{\sin a} + \frac{\cos b . \cos c}{\sin a}.$$

Nun setze man $\frac{\cos b . \cos . c}{\sin a} = \cot \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$ (es ist $\varphi < 90°$, wenn b und c gleichartig, und $\varphi > 90°$ wenn b und c ungleichartig sind);

$$\text{so ist } \frac{\cos A . \sin b . \sin c}{\sin a} = \frac{\cos a}{\sin a} + \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$$

$$\text{und } \cos A . \sin b . \sin c = \frac{\cos a . \sin \varphi + \cos \varphi . \sin a}{\sin \varphi}$$

$$= \frac{\sin (a + \varphi)}{\sin \varphi}$$

$$\cos A = \frac{\sin (a + \varphi)}{\sin b . \sin c . \sin \varphi}$$; hier ist wieder leicht einzu-

se-

Fig. 129. sehen, daß $A < 90°$ ist, wenn $a + \phi < 180°$ ist, und daß $A > 90°$ ist, wenn $a + \phi > 180°$ ist.

130. Man kann auch die Seite A durch eine der zwey übrigen im §. 579. angegebenen analytischen Gleichungen bestimmen, welche sich sehr bequem der logarithmischen Bearbeitung unterwerfen lassen. Nähmlich es ist, wenn man die halbe Summe aller drey Winkel, das ist $\frac{1}{2}(a+b+c) = p$ setzet,

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\left[\frac{\cos(p-b).\cos(p-c)}{\sin b.\sin c}\right]}$$

$$\text{und } \sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\left[\frac{\cos p.\cos(p-a)}{\sin b.\sin c}\right]};$$

wobey eben das zu beobachten kommt, was in der I. Aufgabe angemerket worden ist.

VIII. Es sind in einem spärischen Dreyecke zwey Winkel b und c, nebst der dazwischen liegenden Seite A gegeben; man soll den dritten Winkel a bestimmen.

Auflösung. Hier kommen alle drey Winkel und eine Seite vor; folglich ist nach der vierten Hauptvergleichung (§. 579. N. 1.) die für diesen Fall gehörige analytische Gleichung $\cos a = \cos A.\sin b.\sin c - \cos b.\cos c$.

Man substituire in derselben für $\cos a$ und $\cos A$ die gleichen Werthe $1 - 2\sin^2\frac{1}{2}a$ und $1 - 2\sin^2\frac{1}{2}A$, so ist

$$1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}a = (1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}A).\sin b.\sin c - \cos b.\cos c$$
$$= \sin b.\sin c - 2\sin^2\tfrac{1}{2}A.\sin b.\sin c - \cos b.\cos c$$
$$= -\cos(b+c) - 2\sin^2\tfrac{1}{2}A.\sin b.\sin c.$$

Nun ist aber auch $\cos(b+c) = 2\cos^2\frac{1}{2}(b+c) - 1$; folglich ist

$$1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}a = 1 - 2\cos^2\tfrac{1}{2}(b+c) - 2\sin^2\tfrac{1}{2}A.\sin b.\sin c;$$

nähmlich $\sin^2\frac{1}{2}a = \sin b.\sin c.\sin^2\frac{1}{2}A + \cos^2\frac{1}{2}(b+c)$

und $\sin\frac{1}{2}a = \sqrt{[\sin b.\sin c.\sin^2\frac{1}{2}A + \cos^2\frac{1}{2}(b+c)]}$

ebenfalls eine analytische Gleichung für den gesuchten Winkel durch die gegebenen Stücke ausgedruckt.

Für die logarithmische Bearbeitung läßt sich diese Aufgabe auf folgende Art durch zwey Gleichungen auflösen.

Es ist $\frac{\cos a}{\cos b} = \cos A . \text{tang } b . \sin c - \cos c$. Fig. 129. 130.

Nun setze man $\cos A . \text{tang} b = \text{tang } \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$ (es ist $\varphi < 90°$, wenn b und A gleichartig, und $\varphi > 90°$ wenn A und b ungleichartig sind);

so ist $\frac{\cos a}{\cos b} = \frac{\sin c . \sin \varphi}{\cos \varphi} - \cos c$

und $\frac{\cos a}{\cos b} = \frac{\sin c . \sin \varphi - \cos c . \cos \varphi}{\cos \varphi} = - \frac{\cos (c + \varphi)}{\cos \varphi}$;

folglich ist $\cos a = - \frac{\cos b . \cos (c + \varphi)}{\cos \varphi}$.

Hier ist $a < 90°$, wenn A und $c + \varphi$ ungleichartig; und $a > 90°$, wenn A und $c + \varphi$ gleichartig sind. Dieses erhellet, wenn man in dem letzteren gefundenen Ausdrucke für $\cos a$ statt $\cos \varphi$ den Werth aus der ersten Gleichung substituiret.

IX. Es sind in einem sphärischen Dreyecke zwey Winkel b und c, nebst der dazwischen liegenden Seite A gegeben; man soll eine von den beyden entgegen gesetzten Seiten B bestimmen.

Auflösung. Da in dieser Aufgabe vier neben ein ander liegende Stücke vorkommen, so ist nach der zweyten Hauptvergleichung (§. 577.) die hierher gehörige Formel

$$\cot B . \sin A = \cot b . \sin c + \cos A . \cos c.$$

Daraus folget;

$$\cot B = \frac{\cot b . \sin c + \cos A . \cos c}{\sin A}$$

$$= \frac{\cot b . \sin c}{\sin A} + \cot A . \cos c,$$

die analytische Gleichung für die gesuchte Seite B.

Um diese Aufgabe logarithmisch auflösen zu können, verfahre man auf folgende Art.

Es ist in der so eben angesetzten Gleichung

$$\frac{\sin A . \text{tang} b}{\text{tang} B} = \sin c + \cos A . \text{tang } b . \cos c.$$

Nun

Fig. 129. 130. Nun setze man $\cos A \,.\, \text{tang}\, b = \text{tang}\, \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi}$ (wo ebenfalls $\phi < 90°$, wenn b und A gleichartig; und $\phi > 90°$ ist, wenn b und A ungleichartig sind);

so ist $\frac{\sin A \,.\, \text{tang}\, b}{\text{tang}\, B} = \sin c + \frac{\cos c \,.\, \sin \phi}{\cos \phi}$

und $\sin A \,.\, \text{tang}\, b \,.\, \cos \phi = \text{tang}\, B\, (\sin c \,.\, \cos \phi + \cos c \,.\, \sin \phi)$;

folglich ist $\text{tang}\, B \,.\, \sin (c + \phi) = \frac{\sin A \,.\, \cos A \,.\, \text{tang}\, b \,.\, \cos \phi}{\cos A}$

nähmlich $\text{tang}\, B = \frac{\text{tang}\, A \,.\, \sin \phi}{\sin (c + \phi)}$.

Hier ist $B < 90°$, wenn $A < 90°$ und $c + \phi < 180°$, oder wenn $A > 90°$, und $c + \phi > 180°$ ist. Im entgegen gesetzten Falle ist $B > 90°$.

X. Es sind in einem sphärischen Dreyecke zwey Winkel b und c nebst einer gegen über liegenden Seite z. B. B. gegeben; man soll die Seite A finden, welche zwischen den beyden gegebenen Winkeln b und c liegt.

Auflösung. Da in dieser Aufgabe vier neben einander liegende Stücke vorkommen; so ist nach der zweyten Hauptvergleichung (§. 577.) die hierher gehörige Formel

$$\cot B \,.\, \sin A = \cot b \,.\, \sin c + \cos A \,.\, \cos c.$$

Um aus dieser Formel eine analytische Gleichung für die Seite A abzuleiten, muß man eben so verfahren, wie es in der IV. und V. Aufgabe gezeiget worden ist. Es ist nähmlich, wie es in den jetzt genannten Aufgaben abgeleitet worden ist, $\sin A = \frac{2 \text{tang}\, \frac{1}{2} A}{1 + \text{tang}^2 \frac{1}{2} A}$, und $\cos A = \frac{1 - \text{tang}^2 \frac{1}{2} A}{1 + \text{tang}^2 \frac{1}{2} A}$.

Wenn man diese Werthen der obern Formel substituiret; so erhält man

$$\frac{2 \,.\, \text{tang}\, \frac{1}{2} A \,.\, \cot B}{1 + \text{tang}^2 \frac{1}{2} A} = \cot b \,.\, \sin c + \frac{\cos c - \cos c \,.\, \text{tang}^2 \frac{1}{2} A}{1 + \text{tang}^2 \frac{1}{2} A},$$

$$2 \,.\, \text{tang}\, \tfrac{1}{2} A \,.\, \cos B \,.\, \sin b = \sin B (\cos b \,.\, \sin c + \sin b \,.\, \cos c) + \sin B \,.\, \text{tang}^2 \tfrac{1}{2} A (\sin c \,.\, \cos b - \sin b \,.\, \cos c),$$

und $\text{tang}^2 \frac{1}{2} A \,.\, \sin (c - b) = 2 \text{tang}\, \frac{1}{2} A \,.\, \frac{\sin b \,.\, \cos B - \sin (b + c)}{\sin B}$

fer-

ferner $\text{tang}^2\frac{1}{2}A - 2\text{tang}\frac{1}{2}A.\frac{\sin b.\cos B}{\sin B.\sin(c-b)} = \frac{-\sin(b+c)}{\sin(c-b)}$ Fig. 129. 130.

und

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin b.\cos B}{\sin B.\sin(c-b)} \pm \sqrt{\left[\frac{\sin^2 b\cos^2 B}{\sin^2 B\sin^2(c-b)} - \frac{\sin(b+c)}{\sin(c-b)}\right]}$$

$$= \frac{\sin b\cos B \pm \sqrt{[\sin^2 b\cos^2 B - \sin^2 B\sin(b+c).\sin(c-b)]}}{\sin B.\sin(c-b)}$$

$$= \frac{\sin b.\cos B \pm \sqrt{[\sin^2 b\cos^2 B + (\sin^2 b\cos^2 c - \sin^2 c.\cos^2 b)\sin^2 B]}}{\sin B.\sin(c-b)}$$

endlich ist $\text{tang}\frac{1}{2}A = \frac{\sin b.\cos B \pm \sqrt{(\sin^2 b - \sin^2 c.\sin^2 B)}}{\sin B.\sin(c-b)}$

die gesuchte analytische Gleichung.

Für die logarithmische Berechnung kann man die zu suchende Seite A durch zwey Gleichungen auf folgende Art bestimmen. Es ist $\cot B.\sin A = \cot b.\sin c + \cos A.\cos c$; daraus folgt

$$\sin A - \cos A.\cos c.\text{tang}\,B = \cot b.\sin c.\text{tang}\,B.$$

Man setze $\cos c.\text{tang}\,B = \text{tang}\,\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ (es ist $\varphi < 90°$, wenn c und B gleichartig; hingegen ist $\varphi > 90°$ wenn c und B ungleichartig sind); so ist

$$\cot b.\sin c.\text{tang}\,B = \sin A - \frac{\cos A.\sin\varphi}{\cos\varphi} \text{ und}$$

$\cot b.\text{tang}c.\cos c.\text{tang}B.\cos\varphi = \sin A\cos\varphi - \cos A.\sin\varphi$ nähmlich $\sin(A-\varphi) = \cot b.\text{tang}c.\sin\varphi$.

Sind die Winkel b und c gleichartig; so ist $\sin(A-\varphi)$ positiv, folglich $A - \varphi < 180°$. Sind aber diese beyden Winkel ungleichartig; so muß $A - \varphi > 180°$ seyn.

XI. Es sind in einem sphäcischen Dreyecke zwey Winkel b und c nebst einer gegen über liegenden Seite z. B. B gegeben; man soll den dritten Winkel a bestimmen.

Auflösung. Hier kommen drey Winkel und eine Seite vor; folglich ist nach der vierten Hauptvergleichung (§. 579. N. 1.) $\cos B.\sin a.\sin c = \cos b + \cos a.\cos c$.

Fig. 129. 130.

Es ist aber $\sin a = \frac{2\tang\frac{1}{2}a}{1+\tang^2\frac{1}{2}a}$, und

$\cos a = \frac{1-\tang^2\frac{1}{2}a}{1+\tang^2\frac{1}{2}a}$; folglich ist

$$\frac{2\tang\frac{1}{2}a.\cos B.\sin c}{1+\tang^2\frac{1}{2}a} = \cos b + \frac{\cos c - \cos c.\tang^2\frac{1}{2}a}{1+\tang^2\frac{1}{2}a}$$

und

$$2\tang\tfrac{1}{2}a.\cos B.\sin c = \cos b + \cos b.\tang^2\tfrac{1}{2}a + \cos c - \cos c.\tang^2\tfrac{1}{2}a$$

ferner $\tang^2\frac{1}{2}a - 2\tang\frac{1}{2}a.\frac{\cos B.\sin c}{\cos b - \cos c} = -\left(\frac{\cos b + \cos c}{\cos b - \cos c}\right)$

und $\tang\frac{1}{2}a = \frac{\cos B.\sin c}{\cos b - \cos c} \pm \sqrt{\left[\frac{(\cos^2 B.\sin^2 c)}{(\cos b - \cos c)^2} - \frac{(\cos b + \cos c)}{(\cos b - \cos c)}\right]}$

$$= \frac{\cos B.\sin c \pm \sqrt{(\cos^2 B.\sin^2 c + \cos^2 c - \cos^2 b)}}{\cos b - \cos c};$$

endlich ist $\tang\frac{1}{2}a = \frac{\cos B.\sin c \pm \sqrt{(\sin^2 b - \sin^2 c.\sin^2 B)}}{\cos b - \cos c}$:

die analytische Gleichung für den gesuchten dritten Winkel.

Damit man sich der logarithmischen Bearbeitung bedienen könne, so kann diese Aufgabe auf folgende Art durch zwey Gleichungen aufgelöset werden.

Es ist $\cos B.\sin a.\sin c - \cos a.\cos c = \cos b$

und $\cos B.\tang c.\sin a - \cos a = \frac{\cos b}{\cos c}$.

Man setze $\cos B.\tang c = \cot\phi = \frac{\cos\phi}{\sin\phi}$ (es ist $\phi < 90°$, wenn c und C gleichartig sind; im entgegen gesetzten Falle aber ist $\phi > 90°$);

so ist $\frac{\sin a.\cos\phi - \cos a.\sin\phi}{\sin\phi} = \frac{\cos b}{\cos c}$

und $\sin(a-\phi) = \frac{\sin\phi.\cos b}{\cos c}$.

Es ist hier $a-\phi < 180°$, wenn b und c gleichartig sind; und $a-\phi > 180°$, wenn diese beyden Winkel ungleichartig sind.

XII. Es sind in einem sphärischen Dreyecke zwey Winkel a und b nebst einer gegen über stehenden Seite B gegeben; man soll die zweyte gegen über stehende Seite A bestimmen. Fig. 129. 130.

Auflösung. Da hier vier gegen überstehende Stücke vorkommen; so ist (nach §. 569.) die zu dieser Aufgabe gehörige analitische Gleichung

$$\sin A = \frac{\sin a . \sin B}{\sin b}.$$

Es ist hier $A < 90°$, wenn $B < 90°$, und $b > a$; oder wenn $a < 90°$, $B > 90°$, und $b < (180° - a)$ ist. Hingegen ist $A > 90°$, wenn $B > 90°$, und $b < a$; oder wenn $a > 90°$, $B < 90°$, und $b > (180° - a)$ ist. In den übrigen Fällen aber bleibt dieses unbestimmt.

Anmerkung. In diesen 12 Aufgaben sind alle verschiedenen Fälle vorhanden, welche bey der Auflösung eines schiefwinkeligen sphärischen Dreyeckes vorkommen können. Denn bey vier gegen über stehenden Stücken kann bloß entweder eine Seite oder ein Winkel bestimmt werden. Bey vier neben einander liegenden Stücken läßt sich eine analytische Gleichung für den eingeschlossenen Winkel, für einen gegen über stehenden Winkel, für die Seite, welche zwischen beyden Winkeln liegt, und für eine gegen über stehende Seite; folglich lassen sich da vier verschiedene Gleichungen angeben. Bey drey Seiten und einem Winkel kann entweder der Winkel, oder die diesem Winkel gegen über stehende Seite, oder auch eine dem Winkel anliegende Seite ausgedrücket werden. Endlich kann aus drey Winkeln und aus einer Seite, entweder die Seite, oder der dieser Seite gegen über stehende Winkel, oder ein anliegender Winkel bestimmet werden. Daß diese Aufgaben auch durch schickliche Fällung des Perpendikels auf eben dieselbe Art aufgelöset werden können, ist für sich klar.

Es wird den Anfängern überlassen, zur Uebung über diese 12 Aufgaben, welche die ganze Theorie der sphärischen schiefwinkeligen Dreyecke in sich fassen, und auch über die

Fig. abgeleiteten Formeln für die rechtwinkeligen sphärischen Dreyecke sich numerische Beyspiele aufzusetzen. Die Anwendung der sphärischen Trigonometrie erstrecket sich vorzüglich über die theoretische Astronomie, über die mathematische Geographie, über die Nautik, und über die Gnomonik. Damit der nach höheren Kenntnissen strebende Schüler zum Theil einsehe, wie dieses geschehen könne, damit er einen Vorgeschmack von diesen so erhabenen als nützlichen Wissenschaften erhalte, und damit er endlich bey den einfacheren Aufgaben darüber seine Kräfte versuchen könne, wollen wir einige der gemeinsten Erklärungen über die verschiedenen Kreise, Linien und Puncte, nebst ihrer Lage, welche bey der scheinbaren Himmelskugel angenommen worden sind, mit den eingeführten Benennungen derselben aufstellen; dann die Auflösung einiger der nützlichsten Aufgaben hierüber aus einander setzen, und damit dieses Hauptstück beschließen.

IV. Abschnitt.

Begriffe von der Erd- und Himmelskugel, nebst Anwendung derselben auf einige der nützlichsten Aufgaben.

§. 582.

Alle Weltkörper so wie sie sich unserem Auge darbiethen, scheinen auf der Oberfläche einer großen Kugel zu schweben, deren Mittelpunct mit dem Mittelpuncte der Erde übereinkommt. Man kann demnach die Lage derselben, wenn man ihre Entfernungen außer Acht läßt, so bestimmen, wie man Puncte auf der Oberfläche einer Kugel bestimmet, nähmlich durch größte Kreise und durch die von denselben eingeschlossenen Winkel. Beobachten wir diese Weltkörper einige Zeit hindurch ununterbrochen; so werden wir bemerken, daß sie sich alle während der Zeit von beynahe 24 Stunden (genau in 23 Stunden 56 Minuten 4 Secunden) in größeren oder kleineren, unter einander parallelen Kreisen herumbewegen, und dann zugleich die vori-

ge Stelle wieder einnehmen. Es scheinet daher, daß sich die ganze auf diese Art eingebildete Himmelskugel täglich um einen unbeweglichen Durchmesser derselben herumdrehet. Diese Bewegung ist zwar nur scheinbar, weil sich nicht die Himmelskörper wirklich herumdrehen, sondern die Erde, von der wir diese Erscheinung wahrnehmen. Doch bleibt der Erfolg für unsere Schlüsse eben derselbe, wir mögen das Wirkliche oder das Scheinbare betrachten, wenn wir in beyden nur richtige Resultate zum Grunde legen. Fig.

Man nennet den Durchmesser der Himmelskugel, um welche diese scheinbare Herumdrehung geschieht, die **Weltachse** oder auch bloß die Achse, die Endpuncte der Achse die **Weltpole**, und insbesondere den Pol, welcher in Europa gegen uns gekehret ist, den **Nordpol** (polus arcticus vel borealis) und den entgegen gesetzten den **Südpol** (polus antarcticus vel australis).

Derjenige größte **Kreis**, welcher auf der Weltachse senkrecht stehet, heißt der **Aequator**; alle übrigen kleineren auf der Weltachse senkrechten Kreise heißen **Parallel-Kreise**. Durch den Aequator wird die Himmelskugel in die nördliche und südliche **Halbkugel** (hemisphaerium boreale et australe) abgetheilet.

Wenn man sich von einem Puncte auf der Erde durch den Mittelpunct der Himmelskugel eine gerade Linie gedenket, so heißt diese Linie eine **Scheitel-Linie**, **Vertical-Linie**. Der Punct derselben welcher sich auf der Oberfläche der Himmelskugel über uns befindet, heißt der **Scheitelpunct** oder **Zenith**, der untere aber der **Fußpunct** oder **Nadir**. Der größte Kreis, welcher aus einem oder dem anderen von diesen beyden Puncten in der Entfernung von 90° beschrieben wird, heißt der **Horizont** desjenigen Ortes, durch welchen die Scheitel-Linie gezogen worden ist. Es ist begreiflich, daß nur zwey Puncte, welche un 180° von einander entfernt sind, eine und dieselbe Scheitel-Linie, folglich auch nur einen und denselben Horizont haben können. Diejenigen größten Kreise, welche den Horizont senkrecht durchschneiden, und in deren Ebene sich daher die Scheitel-Linie befindet nennet man **Vertical-Kreise**. Das Stück des durch einen Punct auf der Him-

Fig. Himmelskugel gezogenen Vertical-Kreises zwischen diesem Puncte und dem Horizonte, heißt die Höhe, das Complement derselben die Zenith-Distanz dieses Punctes. Derjenige Vertical-Kreis, in welchem sich die Weltpole befinden, wird der Mittagskreis, oder auch der Meridian genannt. Das Stück des Meridians zwischen dem Horizonte und dem nächsten Pole heißt die Polhöhe, das Complement derselben die Zenith-Distanz des Poles eines Ortes. In dem nördlichen Theile der Himmelskugel wird die Polhöhe, die nördliche Polhöhe, in dem südlichen Theile, die südliche Polhöhe genannt. Ferner heißt das Stück des Meridians zwischen dem Aequator und dem Horizonte die Höhe des Aequators Es ist leicht einzusehen, daß nur die Puncte, welche in dem Umfange eines und desselben durch den Pol gehenden größten Kreises sich befinden, einen und denselben Meridian, die Puncte, deren Horizonte gegen die Weltachse gleich stark geneigt sind, nähmlich die in dem Umfange eines und desselben Parallelkreises liegenden Puncte, eine und dieselbe Polhöhe haben können, und daß alle Meridiane auf den Parallel-Kreisen senkrecht stehen; ferner daß die Polhöhe und die Höhe des Aequators einander auf 90° ergänzen. Der Durchgang eines Punctes auf der Himmelskugel durch den Meridian bey der täglichen Umdrehung wird das Culminiren desselben, und die Zeit, in welcher dieses geschieht, die Culminations-Zeit genannt. Der Durchschnitt des Meridians und des Aequators heißt eigentlich die Mittags-Linie; man pflegt aber auch den Durchschnitt des Meridians und des Horizontes, oder besser den Durchschnitt des Meridians und einer zu dem Horizonte parallelen Ebene die Mittags-Linie zu nennen, weil dadurch auf der Oberfläche der Erde die Lage der wahren Mittags-Linie angegeben wird. Durch den Aequator und Meridian wird der Horizont viermahl durchschnitten, und dadurch in 4 gleiche Theile getheilet, weil sowohl der Aequator als auch der Horizont auf dem Meridiane senkrecht stehen; diese vier Durchschnittspuncte heißen die Cardinal-Puncte (cardines); und insbesondere heißen die Puncte des Horizontes, welche

durch

durch den Aequator abgeschnitten werden, Ost oder Mor- Fig.
gen, und West oder Abend, die zwey Durchschnittspunc-
te des Meridians auf dem Horizonte aber Süd oder Mit-
tag, und Nord oder Mitternacht. Diese Cardinal-Puncte
dienen, um die Richtung einer Linie, oder die Lage eines
Ortes fest zu setzen. Sie sind nach folgendem Gesetze be-
stimmet. Wenn man sich mit dem Gesichte gegen Mittag
kehret, so ist Morgen links, Abend rechts, und Mitternacht
im Rücken.

Die Sonne verbleibt bey ihrer scheinbaren täglichen Bewegung nicht in einem und demselben Parallel-Kreise, sondern sie nähert sich dem Aequator, durchschneidet ihn, entfernt sich von ihm auf der entgegen gesetzten Seite, und kehret dann wieder zurück, so daß sie nach Verlauf von 365 Tagen 5 Stunden 48 Minuten 48 Secunden wieder in den vorigen Parallel-Kreis eintrifft. Sie läuft daher auf der Oberfläche der Himmelskugel in einem Kreise herum, welcher ein größter ist, weil er, gemachten Beobachtungen zu Folge, den Aequator in zwey gleiche Theile theilet. Diese Umlaufsbahn der Sonne wird die Ecliptik (ecliptica) genannt. Sie ist jetzt gegen den Aequator unter dem Winkel von 23°, $28'$ geneigt. Man nennet diesen Winkel die Schiefe der Ecliptik. Die Durchschnittspuncte des Aequators und der Ecliptik heißen die Nachtgleichen (aequinoctia), weil die Sonne, wenn sie sich in diesen Puncten der Ecliptik befindet, bey ihrer Umdrehung den Aequator beschreibet, welcher als ein größter Kreis von einem jeden Horizonte in zwey gleiche Theile getheilet wird, und folglich die Sonne sich eben so lange über dem Horizonte verweilet, als sie sich unter demselben befindet, wodurch Tag und Nacht gleich werden. Der Theil des von der Sonne beschriebenen Parallel-Kreises, welcher oberhalb des Horizontes liegt, heißt der Tagebogen (arcus diuturnus), weil die Sonne so lange sichtbar ist, als sie sich in demselben beweget. Nur die größten Kreise, welche durch die Weltpole gezogen sind, folglich auf allen Parallel-Kreisen senkrecht stehen, theilen dieselben in zwey gleiche Theile; folglich haben alle Puncte in dem

Aequa-

Fig. Aequators-Umfange Tag und Nacht gleich, da für diese jederzeit der Tagebogen 180° beträgt. Von dem Horizonte eines jeden anderen Punctes aber werden die Parallel-Kreise schief durchschnitten, folglich außer dem Aequator in zwey ungleiche Theile getheilet; daher können für diese Puncte nie Tag und Nacht gleich seyn, wenn sich die Sonne in einem anderen Parallel-Kreise als dem Aequator befindet. Aus diesem wird begreiflich, daß der Unterschied der Tageslängen immer zu nimmt, je größer die Polhöhe wird; daß der Horizont eines jeden Punctes, bey welchem die Zenith-Distanz des Poles kleiner ist, als die Schiefe der Ecliptik beträgt, nicht alle Parallel-Kreise durchschneidet, in welche die Sonne eintritt; daß folglich für diese Puncte die Sonne einige Zeit hindurch nicht untergehet, und einige Zeit hindurch auch nicht aufgehet, und daß endlich die Pole in der einen Hälfte des Jahres immer Tag, und in der anderen Hälfte immer Nacht haben müssen. Ferner ist auch begreiflich, daß der Meridian jeden Tagesbogen in zwey gleiche Theile theilet, weil er auf demselben senkrecht stehet; und daß folglich der Eintritt der Sonne in die Mittagsfläche bey der gleichförmigen Umdrehung die Mitte des Tages bestimmt. Diejenigen kleinen Kreise, welche bey der täglichen Umdrehung durch die Pole der Ecliptik beschrieben werden, heißen die **Polar-Kreise**; sie sind von dem anliegenden Weltpole um 23° 28′ entfernt, weil die Neigung des Aequators und der Ecliptik, folglich auch die Abstände der Pole der Ecliptik von den anliegenden Weltpolen, als die Halbmesser dieser Kreise 23° 28′ betragen. Ins besondere wird der Polar-Kreis, welcher um den Nordpol beschrieben wird, der **nördliche Polar-Kreis**, der andere aber, welcher um den Südpol beschrieben wird, der **südliche Polar-Kreis** genannt.

Damit man den Ort bestimmen könne, wo sich die Sonne in der Ecliptik befindet, hat man in der Entfernung von 30 zu 30 Graden, von dem Durchschnitte des Aequators angefangen, mehrere Sterne nahe an der Ecliptik ausgewählet, und sie als Bilder von bekannten Dingen, meistens von Thieren, aufgezeichnet. Sie sind unter dem Nahmen

der

der himmlischen Zeichen bekannt, und folgen in nachstehender Fig.
Ordnung auf einander: Widder, Stier, Zwillinge, Krebs, Löwe, Jungfrau, Wage, Scorpion, Schütz, Steinbock, Wassermann, Fische. Man bezeichnet sie auf folgende Art: ♈, ♉, ♊, ♋, ♌, ♍ ♎ ♏, ♐ ♑, ♒ ♓.
Die drey letzteren und dann die drey ersteren heißen aufsteigende, die übrigen aber niedersteigende Zeichen, weil in den ersteren die Sonne dem Nordpole zu eilet, in den letzteren aber sich dem Südpole nähert. Der schmale Streifen, in welchem diese Himmelszeichen liegen, und der die Ecliptik zur Mitte hat, wird der Himmelsgürtel, Thierkreis (zodiacus) genannt; seine Breite erstrecket sich nicht über 9 bis 10 Grade. Diejenigen Parallel-Kreise, welche die Ecliptik berühren, und welche daher die Sonne nie überschreitet, heißen die beyden Wendekreise (tropici), weil von denselben die Sonne sich umzuwenden scheinet, da sie wieder gegen den Aequator zurückkehret. Ins besondere wird der Wendekreis auf der nördlichen Halbkugel der Wendekreis des Krebses (tropicus cancri), der andere Wendekreis aber auf der südlichen Halbkugel der Wendekreis des Steinbockes (tropicus capricorni) genannt; weil die Sonne in diese genannten Zeichen eintritt, wenn sie in jenen Wendekreisen eintrifft. Der Berührungspunct des Wendekreises des Krebses und der Ecliptik heißt bey uns der Sommerpunct (punctum aestivum), der Berührungspunct des anderen Wendekreises und der Ecliptik aber der Winterpunct (punctum brumale), weil wir, wenn die Sonne in diese Puncte tritt, in dem ersten Falle Sommer, in dem anderen aber Winter haben. Beyde zusammen werden die Wendepuncte, Sonnenstandspuncte (puncta solstitialia) genannt. Eben so heißt der eine Durchschnittspunct des Aequators und der Ecliptik der Frühlingspunct, der andere der Herbstpunct, weil bey dem Eintritte der Sonne in dieselben für uns die beyden genannten Jahreszeiten anfangen. Es ist klar, daß jeder dieser vier Puncte von dem anderen nächstfolgenden um 90° abstehet. Wenn die Sonne

in

Fig. in dem Frühlingspuncte, folglich in dem Aequator sich befindet, so gehet sie uns in dem wahren Morgenpuncte auf, und dann wieder in dem wahren Abendpuncte unter, weil der Aequator und der Horizont auf dem Meridiane zugleich senkrecht stehen. Jemehr sich aber die Sonne von dem Aequator entfernt, um desto mehr ist auch der Auf- und Untergang der Sonne von dem wahren Morgen- und Abendpuncte entfernt. In diesem Falle heißt der Abstand des Punctes, wo die Sonne aufgehet, von dem wahren Morgen, die Morgenweite (amplitudo ortiva), und der Abstand des Punctes, wo die Sonne untergehet, von dem wahren Abendpuncte wird die Abendweite (amplitudo occidua) genannt.

Es ist klar, daß wenn die Sonne in gleichen Abständen, vom Aequator sich befindet, die Morgen- und Abendweite in entgegen gesetzter Richtung einander gleich sind, und daß sie am größten werden, wenn die Sonne in den Wendepuncten sich befindet. Die beyden größten Kreise, welche durch die Weltpole und durch die Wendepuncte und Nachtgleichen gezogen sind, und daher auf einander senkrecht stehen, heißen die beyden Coluren; insbesondere wird der erstere der Colurus der Sonnenstands-Puncte (colurus solstitialis), der andere der Colurus der Nachtgleichen (colurus aequinoctionalis) genannt. Die Zusammensetzung der hier beschriebenen 6 größten Kreise; nähmlich des Aequators, Horizontes, der Ecliptik, des Meridians und der beyden Coluren, dann der vier kleineren, nähmlich der Polar- und Wendekreise macht eine künstliche Ringkugel (sphaera armillaris) aus.

Wenn man durch irgend einen Punct auf der Himmelskugel, und durch die Weltpole einen größten Kreis führet, der folglich auf dem Aequator senkrecht stehet; so wird dieser Kreis ein Abweichungskreis (circulus declinationis), der Bogen dieses Kreises zwischen dem Aequator und dem gegebenen Puncte, die Abweichung (declinatio), das Complement derselben die Polar-Distanz dieses Punctes, und der Bogen des Aequators, von dem Frühlingspuncte angefangen

bis

bis zu dem Durchschnitte des Abweichungskreises, die gerade Fig.
Aufsteigung (Ascensio recta) dieses Punctes genannt. Führet man aber durch die Pole der Ecliptik und durch den gegebenen Punct einen größten Kreis, der daher auf der Ecliptik senkrecht stehet, so heißt dieser Kreis ein Breitenkreis, das Stück des Breitenkreises zwischen dem gegebenen Puncte und der Ecliptik die Breite, das Stück der Ecliptik aber von dem Frühlingspuncte an bis zu dem Durchschnitte der Breite die Länge dieses Punctes. Die gerade Aufsteigung und die Abweichung, wie auch die Länge und Breite dienen, um die Lage eines Punctes auf der Himmelskugel, im ersten Falle durch den Aequator, im zweyten Falle aber durch die Ecliptik anzugeben. Man hat diese beyden Kreise hierzu gewählet, weil sie die merkwürdigsten auf der Himmelskugel sind, und weil der eine, der Aequator nähmlich, immer unverändert bleibt, der andere aber, die Ecliptik, seine Lage um einen äußerst unbedeutenden Theil ändert.

Um auf unserer Erde die Lage eines Punctes anzugeben, zieht man durch einen willkührlichen Punct einen Meridian-Kreis, von welchem angefangen die Längen gezählet werden. Der Meridian dieses willkührlichen Punctes heißt der erste Meridian. Die Länge eines Ortes ist der Bogen des Aequators, welchen der erste Meridian nach Morgen zu mit dem Meridiane des gegebenen Ortes einschließt. Die Breite eines Ortes ist der Abstand desselben vom Aequator, und daher der Polhöhe gleich; sie wird vom Aequator gezählet und ist entweder nördlich oder südlich, je nachdem der Ort entweder auf der nördlichen, oder auf der südlichen Halbkugel liegt. Es ist ganz willkührlich, wo man den ersten Meridian annehmen will; von den meisten Völkern wird er so fest gesetzet, daß Paris 20° zur östlichen Länge hat.

Bey der Sonne ins besondere schließen die gerade Aufsteigung, die Abweichung und die Länge derselben ein rechtwinkeliges sphärisches Dreyeck ein, in welchem jener der Abweichung gegen über stehende Winkel die Schiefe der Ecliptik heißt. In dem Frühlingspuncte ist die Abweichung der Sonne = 0. Von da angefangen ist sie auf der nördli-

chen

Fig. chen Seite, und wird daher die nördliche Abweichung genannt. Sie wächst immer fort, bis die Sonne den Sommerpunct erreichet; dann ist sie am größten und der Schiefe der Ecliptik gleich. Nun nimmt sie wieder ab, bis sie bey dem zweytenmahligen Eintritte der Sonne in den Aequator = o wird. Von da fängt sie wieder auf der südlichen Seite zu wachsen an; daher sie dann die südliche Abweichung heißt; im Winterpuncte wird sie wieder der Schiefe der Ecliptik gleich, und nimmt dann bis zum Frühlingspuncte wieder ab. Die gerade Aufsteigung und die Länge der Sonne aber wachsen von dem Frühlingspuncte angefangen, wo sie beyde = o sind, ununterbrochen fort, bis sie bey dem Zurückkehren der Sonne zu dem Frühlingspuncte 360° erreichen. In dem Sommerpuncte ist jede = 90°, in dem Herbstpuncte = 180° und in dem Winterpuncte = 270°. Die gerade Aufsteigung wird auch in Stunden, Minuten u. s. w. angegeben; dann drückt sie die Culminations-Zeit des Frühlingspunctes aus.

Wegen der gleichförmigen Umdrehung des Aequators in der Zeit von 24 Stunden, wird ein Bogen desselben von der Größe eines Grades in vier Zeit-Minuten, von der Größe einer Minute in vier Zeit-Secunden, und von der Größe einer Secnnde in vier Zeit-Terzen sich unter dem Meridiane durch schieben. Folglich ist es leicht das Bogenmaß der gegebenen geraden Aufsteigung in das Zeitmaß, und umgekehrt zu verwandeln. Aus eben diesen Gründen läßt sich aus dem gegebenen Bogen des Aequators, welchen die Meridiane zweyer Oerter auf der Erdkugel einschließen, oder welches einerley ist, aus dem gegebenen Neigungswinkel der beyden Meridiane zweyer Oerter, und aus der gegebenen wahren Zeit eines Ortes, die wahre Zeit des anderen Ortes für denselben Augenblick bestimmen. Man darf nur das Bogenmaß dieses Neigungswinkels, welcher wegen dieser Eigenschaft der Stundenwinkel heißt, nach dem Vorigen ins Zeitmaß verwandeln, und dieses Resultat zu der wahren Zeit des ersten Ortes hinzu addiren, wenn der erste Ort westlicher ist, oder eine kleinere Länge hat; und davon abzie-

ziehen, wenn der erste Ort östlicher ist, oder eine größere Länge hat als der andere: so wird dadurch die wahre Zeit des anderen Ortes für denselben Augenblick erhalten. Der Stundenwinkel aber wird gefunden, wenn man die Längen beyder Oerter von einander abziehet. Z. B. Um die Zeit zu finden, binnen welcher die Sonne von dem Petersburger-Meridiane auf den Lisaboner gelangt, wird die Rechnung auf folgende Art angestellet. Fig.

Es ist die Länge von Petersburg = 47°, 59,′ 30″
— — — Lissabon = 8, 31, 15

folglich der Stundenwinkel = 39, 28, 15.

Es ist aber 39° = 39.4M. = 2St. 36M. 0S.
28′ = 23.4S. = 1 52
15″ = 15.4T. = 1

folglich ist 39°, 28′, 15″ = 2St. 37M. 53S.

Wenn daher zu Petersburg genau Mittag ist, so ist zu Lissabon 9 Uhr 22 Minuten 7 Secunden Vormittags an der wahren Zeit; und ist zu Lissabon genau Mittag, so zählet man zu Petersburg schon 2 Uhr 37 Minuten 53 Secunden Nachmittags; oder Lissabon liegt 2 Stunden 37 Minuten 53 Secunden am Zeitunterschiede westlich von Petersburg.

Ingleichen wenn Kronstadt in Siebenbürgen um 1 Stunde 33 Minuten 2 Secunden östlicher liegt als Paris, und daher in eben demselben Augenblicke z. B. da sich eine Mondesfinsterniß anfängt, zu Kronstadt um 1 Stunde 33 Minuten 2 Secunden mehr als zu Paris an der wahren Zeit gezählet wird; so findet man daraus den geographischen Längenunterschied der genanuten zwey Oerter auf folgende Art.

1St. = 1°.15 = 15°
33Min. = 33′.$\frac{1}{4}$ = 8, 15′
2Sec. = 2″.$\frac{1}{4}$ = 30″

1St. 33Min. 2Sec. = 23°, 15′, 30″.

Da

Fig. Da nun nach dem Vorigen der erste Meridian 20 Grade westlich von Paris allgemein angenommen wird; so wäre nach dem Angeführten die geographische Länge von Kronstadt $= 20° + 23°, 15^{I}, 30^{II} = 43° 15', 30''$.

Ferner da die geographische Länge von Paris $= 20°$, und von Wien $= 34°, 2', 30''$ ist; so liegt Paris um $14°, 2', 30''$ westlich von Wien. Dieser Längenunterschied $14°, 2', 30''$ in wahrer Zeit $= 56$ Min. 10 Sec. verwandelt, gibt zu erkennen, daß in einem und demselben Augenblicke zu Paris um 56 Min. 10 Sec. an der wahren Zeit weniger gezählet wird, als zu Wien.

Ist die Polhöhe eines Ortes der Erde und folglich auch die Erhöhung des Aequators über den Horizont dieses Ortes bekannt, so kann man die nördliche oder südliche Abweichung der Sonne aus der beobachteten Mittagshöhe bestimmen, wenn man im ersten Falle von der Mittagshöhe der Sonne die Erhöhung des Aequators, im zweyten Falle aber die Mittagshöhe der Sonne von der Erhöhung des Aequators abziehet. Umgekehrt kann man aus der beobachteten Mittagshöhe und aus der bekannten Abweichung der Sonne die Aequators-Höhe, und daraus ferner die geographische Breite des Beobachtungsortes finden.

In verschiedenen Calendern, ins besondere in den astronomischen Jahrbüchern, welche Ephemeriden heißen, sind die geraden Aufsteigungen und die Abweichungen für einen angegebenen Meridian von Mittag zu Mittag berechnet. Daraus kann man leicht die für eine jede andere Zeit zugehörige Abweichung und gerade Aufsteigung der Sonne finden, wenn man sich zu 24 Stunden, zu der vom letzten Mittage verflossenen Zeit und zu der Differenz der nächst größeren und nächst kleineren Abweichung oder geraden Aufsteigung der Sonne die vierte Proportinal-Zahl suchet, und dieselbe zu der nächst kleineren geraden Aufsteigung immer, zu der nächst kleineren Abweichung aber nur dann addiret, wenn die Abweichung wächst, im entgegengesetzten Falle aber davon abziehet. Z. B. es sey die gerade Aufsteigung der Sonne für das Jahr 1804 den 11. December um 16 Uhr 38

Mi-

Minuten der wahren Zeit zu Paris, das ist den 12. De- Fig.
cember um 4 Uhr 38 Minuten Morgens (weil der astrono-
mische Tag von Mittag anfängt, und die Stunden desselben
ununterbrochen bis 24 gezählet werden) zu suchen; so findet
man diese gesuchte gerade Aufsteigung der Sonne = 17 St.
16 Min. 34 Sec. mittelst der Ephemeriden auf folgende Art:

	St.	M.	S.
gerade Aufst. der Sonne 1804 den 12. Dec. =	17,	17,	55
— — — — 11 — =	17,	13,	31
24stündige Veränderung =	0,	4,	24
Prop.-Th. wegen 16 St. 38 M. addiret =	0,	3,	3
gibt die gesuchte gerade Aufst. der Sonne =	17,	16,	34

Wenn die gerade Aufsteigung und Abweichung der Son-
ne für einen gegebenen Augenblick der wahren Zeit eines an-
deren Ortes, als sie in den Ephemeriden berechnet sind, ge-
sucht werden sollen; so berechnet man erst aus dem geogra-
phischen Längenunterschiede beyder Oerter, wie viel in dem
gegebenen Augenblicke an der wahren Zeit an dem Orte gezäh-
let wird, der in den Ephemeriden zum Grunde liegt, und be-
stimmet sodann für diese berechnete Zeit die gesuchte gerade
Aufsteigung oder Abweichung der Sonne eben so wie im vori-
gen Beyspiele. Man hätte z. B. die Pariser-Ephemeriden
für das Jahr 1802 berechnet in Händen, und es sey die
Abweichung der Sonne für dieses angegebene Jahr 1802 den
28. April um 3 Uhr 45 Minuten nach Mittag der wahren
Zeit zu Wien, welches einerley ist, wegen des Stundenwin-
kels 56 Min. 10 Sec. um 2 Uhr 48 Min. 50 Sec. nach
Mittag zu Paris zu suchen; so findet man die gesuchte Ab-
weichung der Sonne = $14^{\circ}, 2^{I}, 38^{II}$ nördlich auf folgende
Art:

Wah-

Fig.		St.	M.	S.
	Wahre Zeit zu Wien =	3,	45,	0
	Stundenwinkel zwischen Wien und Paris = —	0,	56,	10
	Wahre Zeit zu Paris =	2,	48,	50
	Abweichung der Sonne 1802 d. 29. April =	14°,	19′,	18″
	— — — 28. — =	14,	0,	26
	24stündige Veränderung =	0,	18,	52
	Proportional-Theil addiret = +	2,	12	
	gibt die gesuchte Abweichung der Sonne =	14°	2′	38″

Wenn man die Tafeln der geraden Aufsteigung und Abweichung der Sonne für vier auf einander folgende Jahre berechnet in Händen hat, (wie z. B. in meinen Log. Trig. Tafeln Leipz, b. Weidmann 1797.); so ist es nicht schwer, dieselbe für eine gegebene Zeit eines andern Jahres zu bestimmen. Denn eine gewöhnliche vierjährige Schalt-Periode enthält (365 × 3 + 366) Tage. In dieser Zeit ist die Ecliptik viermahl durchlaufen worden, ehe diese Periode gänzlich verfloß. Es ist nähmlich der Ueberschuß einer solchen vierjährigen Periode über die viermahlige Umlaufszeit in der Ecliptik = (365 × 3 + 366 Tage) — (365 T. 5 St. 48 Min. 48 Sec.) × 4 = 44 Min. 48 Sec. und für diesen Ueberschuß der Zeit einer vierjährigen Periode von 44 Min. 48 Sec. ist der Proportional-Theil der mittleren 24stündigen Veränderung der geraden Aufsteigung der Sonne = $7\frac{1}{2}$ Sec., welche zu der nach der oben gezeigten Art gefundenen geraden Aufsteigung hinzu addiret werden muß, um die gesuchte gerade Aufsteigung mit hinlänglicher Genauigkeit zu finden. Da ferner dieser Ueberschuß der Zeit, bey einer vierjährigen Schalt-Periode, über den Zeitpunct des geendigten vierten Umlaufes in der Ecliptik 44 Min. 48 Sec. beträgt, welches sehr nahe = 45 Min. = $\frac{1}{32}$ Tag ist, so ist ersichtlich, daß man die mittelst der Tafel, und mittelst der gezeigten Rechnung erhaltene Abweichung, um den 32sten Theil der 24stündigen Veränderung multipliciret mit der Zahl der verflossenen Schalt-Perioden verbessern muß. Dabey ist noch zu erinnern,

daß

daß man die Tafeln desjenigen Jahres nehmen muß, welches von dem nächsten Schaltjahre eben so viel abstehet, als das gegebene Jahr. Welche Verbesserungen man noch außer den hier bemerkten bey sehr genauen Arbeiten anbringen muß, kann in größeren, über diese Gegenstände handelnden Werken nachgeschlagen werden. Fig.

Das Azimuth eines Punctes auf der Erd- und Himmelskugel, ist der Theil des Horizontes zwischen dem dazu gehörigen Meridiane und dem Scheitelkreise, welcher durch den gegebenen Punct gezogen ist; und der Azimuthal-Winkel ist der Winkel am Zenith, welcher von diesen beyden Kreisen eingeschlossen wird, und folglich das Azimuth zum Maße hat. Die Zenith-Distanz des Poles, die für eine Zeit bestimmte Polar-Distanz eines Punctes z. B. des Mittelpunctes der Sonne, und die für eben dieselbe Zeit zugehörige Zenith-Distanz dieses Punctes, schließen ein spärisches Dreyeck ein, in welchem jener der Polar-Distanz gegen über liegende Winkel das Supplement des Azimuthal-Winkels ist. Sind nun die ersteren drey Stücke gegeben, so kann man daraus (nach §. 581. I. Aufgabe) den Azimuthal-Winkel bestimmen.

Ferner heißt der parallactische Winkel, oder auch die Parallaxe eines gegebenen Punctes der Himmelskugel derjenige Winkel, welcher an dem gegebenen Puncte entstehet, wenn man von der Oberfläche der Erde, und von ihrem Mittelpuncte zu diesem Puncte gerade Linien ziehet. Weil der Mittelpunct der Erde eigentlich auch der Mittelpunct der scheinbaren Himmelskugel ist; so ist klar, daß man alle Höhenbeobachtungen von der Oberfläche der Erde um diesen Winkel verbessern muß, damit man die wahre Höhe erhalte.

Die Refraction oder Strahlenbrechung endlich nennet man denjenigen Winkel, um welchen der aus einem Puncte eines Himmelskörpers in unser Auge geworfene Lichtstrahl bey dem Eintritte in die Atmosphäre der Erde von seiner geraden Richtung abweicht. Diese gegebenen Erklärungen sind hinreichend, sowohl folgende Aufgaben deutlich einzusehen, als auch mehrere andere der sphärischen Astronomie aufzulösen.

Fig. §. 583.

Aufgaben.

I. Mittelst der an einem Orte gemachten Beobachtung der Mittagshöhe, und mittelst der für einen anderen Ort berechneten Tafel der Abweichungen der Sonne, die Polhöhe oder geographische Breite dieses Ortes zu finden.

Auflösung. 1) Man berechne für diesen Augenblick die wahre Zeit des in den Tafeln zum Grunde gelegten Ortes, und dann die dazu gehörige Abweichung der Sonne. Zur gemeinen Bestimmung der Abweichung der Sonne ist eine beynahe richtige geographische Länge des Ortes, an dem die Polhöhe bestimmt werden soll, hinreichend, um daraus den Zeitunterschied des Mittags von dem in den Tafeln zum Grunde gelegten Orte, nach der oben gegebenen Anweisung abzuleiten. Auch die Richtung der Mittags-Linie zur Beobachtung der Mittagshöhe darf nur beyläufig bekannt seyn, weil die Höhen der Sonne vor und nach der Culmination durch mehrere Augenblicke beynahe ungeändert verbleiben.

2) Man verbessere die mit einem Quadranten, oder welches am bequemsten ist, mit einem Hadleyschen Spiegel-Sextanten gemessene Mittagshöhe der Sonne um ihren Halbmesser, um die Parallaxe, Refraction, und um den etwa bekannten Fehler des Instrumentes.

3) Von dieser verbesserten Mittagshöhe subtrahire man die nach 1) berechnete Abweichung, wenn sie nördlich ist; ist aber die Abweichung südlich, so wird sie zur Mittagshöhe hinzu addiret. Hier ist die Beobachtung auf der nördlichen Halbkugel angenommen worden. Wären wir aber auf der südlichen Halbkugel; so müßte das Umgekehrte geschehen.

4) Auf diese Art erhält man die Erhöhung des Aequators über den Horizont des Beobachtungsortes; und die Ergänzung dieses Winkels auf 90° ist endlich die gesuchte Polhöhe, oder die geographische Breite des Ortes. Daß

man

man eben so bey einem andern Sterne verfahren müsse, ist Fig. für sich klar.

Beyspiel.

Im Jahre 1793 den 1ten August ist zu Brüssel in Belgien die Culminations-Höhe des nördlichen Randes der Sonne = 58°, 18′, 23″ mit einem Winkelmesser beobachtet worden, der die Winkel um 27″ zu groß angab; die geographische Länge von Brüssel ist = 22°, 1′, 45″. Daraus wird nun die geographische Breite oder Polhöhe von Brüssel auf folgende Art berechnet:

Culminations-Höhe des nördl. Sonnenrand.	=	58°	18′	50″
Halbmesser der Sonne 1. Aug.	= −		15	49
Parallaxe der Sonne	= +			4
Refraction	= −			35
Fehler des Instrumentes	= −			27
Summe der Verbesserungen subtr.	= −		16	47
Wahre Culminations H. d. Mittelp. d. Sonne	=	58	2	3
Schon verbesserte Abweichung der Sonne	=	17	53	3
Aequators-Höhe von Brüssel	=	40	9	0
geogr. Breite oder Polhöhe von Brüssel	=	49	51	0

II. Aus der beobachteten wahren Höhe des Mittelpunctes der Sonne über den Horizont eines Ortes, die man durch eine Messung etwa vor 9 Uhr Morgens oder nach 3 Uhr Abends bestimmet hat, aus der für die beyläufige Zeit der Beobachtung berechneten Abweichung der Sonne, und aus der bekannten Breite des Ortes, die wahre Zeit für den Augenblick der beobachteten Sonnenhöhe zu finden.

Auflösung. Es sey (Fig. 133.) MZP der Mittagskreis, Z das Zenith des Ortes und P der Nordpol, es sey ferner die Sonne in S; so sind in dem Kugeldreyecke ZPS alle drey Seiten bekannt. ZS ist die Zenith-Distanz der Sonne oder das Complement der beobachteten und ge- 133.

Fig. 133. hörig berichtigten Sonnenhöhe, ZP ist die Zenith-Distanz des Poles oder das Complement der bekannten Polhöhe des Ortes, und PS ist die Polar-Distanz der Sonne, und zwar bey der nördlichen Abweichung das Complement der letzteren, bey der südlichen Abweichung aber ist die Polar-Distanz $= 90° +$ der Abweichung. Daraus findet man nun den Stundenwinkel ZPS, welcher nach der Anleitung des vorigen §. in Zeitmaß verwandelt werden muß, um die gesuchte wahre Zeit vom nächsten Mittage für den Augenblick der gemessenen Sonnenhöhe zu erhalten. Hat man nun bey einer solchen Höhenmessung die Zeit bemerket, welche eine dabey gebrauchte gute Uhr im Augenblicke der genommenen Sonnenhöhe anzeigte; so wird man nach vollendeter Rechnung finden, um wie viel diese Uhr von der wahren Sonnenzeit abweichet.

Setzet man $ZS = a$, $ZP = b$, $PS = c$, und $\frac{1}{2}(a+b+c) = p$, so wird (nach 581. I.) der Stundenwinkel aus einer der folgenden Formeln berechnet. Nähmlich:

$$\sin \tfrac{1}{2} ZPS = \sqrt{\left[\frac{\sin -(p-b).\sin(p-c)}{\sin b.\sin c}\right]}$$

$$\text{oder } \cos \tfrac{1}{2} ZPS = \sqrt{\left[\frac{\sin p.\sin(p-a)}{\sin b.\sin c}\right]}$$

Beyspiel.

Es sey zu Wien in Oesterreich im Jahre 1804 den 1ten May Vormittag beyläufig um 9 Uhr durch eine Beobachtung und durch die gehörige Verbesserung die wahre Sonnenhöhe $= 40° 28' 20''$ gefunden worden; so ist die Zenith-Distanz der Sonne $a = 49° 31' 40''$. Die Breite oder Polhöhe von Wien an dem Beobachtungsorte sey $= 48° 12' 30''$, und daher die Zenith-Distanz des Pols $b = 41° 47' 30''$. Endlich ist für die Zeit der Beobachtung die Abweichung der Sonne sehr nahe $15° 2' 50''$ nördlich und daher die Polar-Distanz $c = 74° 57' 10''$. Die dabey gebrauchte, nach einer Sonnenuhr beyläufig berichtigte gute Secunden-Taschenuhr zeigte im Augenblicke der gemessenen Sonnenhö-

Be 8 Uhr 58 Min 32 Sec. Morgens. Um nun daraus die wahre Zeit für den Augenblick der genommenen Sonnenhöhe zu finden, wird die Rechnung auf folgende Art geführet: Fig. 133.

$a = 49°31'40''$ Complement der Höhe.
$b = 41\ 47\ 30$ Complement de Breite.
$c = 74\ 57\ 10$ Polar-Distanz der Sonne.

Summe $= 166\ 16\ 20$ dividiret durch 2

$p = 83\ 8\ 10$			
$b = 41\ 47\ 30$	0.1762494	decad. Ergänz. L. S.	
$c = 74\ 57\ 10$	0.0151523	—	— —
$p-b = 41\ 20\ 40$	9.8199282	Log.	Sin.
$p-c = 8\ 11\ 0$	9.1533300	—	— —
Summe =	19.1646599		
$\frac{1}{2}$ Summe =	9.5823299 = Log. Sin. $\frac{1}{2}$ ZPS.		

		St.	M.	S.
$\frac{1}{2}$ZPS = 22°28'20''	44° =	2	56	0
ZPS = 44 56 40	56' =		3	44
	40'' =			2
Stundenwinkel in Zeit =		2	59	46 subt. v. 12 St.
wahre Zeit Morgens =		9	0	14
die Uhr zeigte =		8	58	32
Abweichung der Uhr =		—	1	42

III. Aus der gegebenen Breite des Ortes, aus der Abweichung der Sonne, und aus ihrer wahren Höhe über dem Horizonte das Azimuth der Sonne für den Augenblick der beobachteten Sonnenhöhe zu finden; und durch Hülfe dessen auf einer horizontalen Ebene die Mittags-Linie zu ziehen.

Auflösung. Auch in diesem Falle sind in dem Kugeldreyecke ZPS alle drey Seiten bekannt; es läßt sich daher der Winkel PZS berechnen; dieser von 180° abgezogen, würde das gesuchte Azimuth der Sonne MZB = MCB = DCN geben; welches sich auch unmittelbar auf folgende Art ab-

Fig. 133. ableiten läßt. Man setze wie vorher die Zenith-Distanz der Sonne $= a$, die Zenith-Distanz des Pols $= b$, die Polar-Distanz der Sonne $= c$, und $\frac{1}{2}(a+b+c) = p$; so ist die Formel für die unmittelbare Berechnung des Azimuths SZM, nähmlich

$$\sin \tfrac{1}{2} \text{SZM} = \sqrt{\left[\frac{\sin p . \sin (p-c)}{\sin a . \sin b}\right]},$$

weil $\cos \frac{1}{2}$ SZP $=$ cos $(90 - \frac{1}{2}$ SZM$)$ $=$ sin $\frac{1}{2}$ SZM ist.

Beyspiel.

In der zweyten Aufgabe war $a = 49° 31' 40''$, $b = 41° 47' 30''$, und $c = 74° 57' 10''$; daraus findet man das Azimuth $= 63° 44' 16''$ durch folgende Rechnung,

a	$= 49° 31' 40''$	Ergänzung der Höhe.	
b	$= 41\ 47\ 30$	Ergänzung der Breite.	
c	$= 74\ 57\ 10$	Polar-Abstand der Sonne.	
Summe	$= 166\ 16\ 20$	dividirt durch 2	
p	$= 83\ 8\ 10$	9.9968761	Log. Sin.
$p-c$	$= 8\ 11\ 0$	9.1533300	Log. Sin.
a	$= 49\ 31\ 40$	0.1187748	dekad. Ergänz. L. S.
b	$= 41\ 47\ 30$	0,1762494	dekad. Ergänz. L. S.
Summe	$=$	19,4452303	dividirt durch 2
Log. Sin. $\frac{1}{2}$ Azimuth	$=$	9,7226151	$=$ L. S. $31° 52' 8''$
Azimuthal-Winkel	$=$	$63° 44' 10''$	$=$ BCM $=$ DCN.

Wenn man nun im Augenblicke der genommenen Sonnenhöhe durch einen Gehülfen die Richtung des Schattens CD, welchen ein freyhangender Perpendikel ZC auf einer horizontalen Ebene bildet bemerken läßt, und so dann nach geendigter Berechnung in dieser horizontalen Ebene auf der bemerkten Richtungs-Linie des Schattens aus einem beliebigen Puncte derselben gegen die gehörige Gegend den gefundenen Azimuthal-Winkel BCM oder DCM verzeichnet; so ist der zuletzt gezogene Schenkel CM oder CN dieses

Win-

Winkels die gesuchte Mittags-Linie, welche zur Orientirung einer horizontalen Sonnenuhr, Untersuchung der Abweichung der Magnetnadel, Beobachtung der wahren Mittagszeit, und Berichtigung der Uhren zum gewöhnlichen Gebrauche ꝛc. hinlänglich genau seyn wird. Fig. 133.

Zu der angeführten Absicht ist es auch sehr bequem, sich eines kleinen genau abgedrehten metallenen Kegels zu bedienen, dessen Grundfläche im Durchmesser etwa 1 Zoll und dessen Höhe 2 bis 3 Zoll betragen mag. Der Kegel kann ausgehöhlet seyn, um in diesen einen kleineren hinein zu stecken, der bey niedrigen Sonnenhöhen vortheilhafter zu gebrauchen ist, als der größere. Man kann nähmlich auf einer zugerichteten horizontalen Ebene mit dem Halbmesser der Grundfläche des Kegels einen Kreis beschreiben, den Kegel so darauf setzen, daß die Umkreise einander decken, sodann zu einer schicklichen Zeit (etwa Morgens vor 9 Uhr und Abends nach 3 Uhr) den Endpunct des Schattens des Kegels bemerken, und endlich diesen Punct mit dem Mittelpuncte des beschriebenen Kreises verbinden. Auf diese Art erhält man die Richtungs-Linie des Schattens im Augenblicke der gemachten Beobachtung. Hat man etwa kein eigenes Instrument zur Beobachtung der Sonnenhöhe, so läßt sich solche auch aus der Länge des Schattens und aus der Höhe des Kegels berechnen; um so dann aus dieser so bekannt gewordenen Sonnenhöhe, aus ihrer für die beyläufig wahre Zeit der Beobachtung ebenfalls bekannten Abweichung, und aus der gegebenen Breite des Ortes den Azimuthal-Winkel nach der angeführten Formel berechnen, und durch dessen Aufzeichnung an die bemerkte Schattenrichtung auf der gehörigen Seite die Mittags-Linie ziehen zu können.

Eine sinnreiche Auflösung dieser Aufgabe durch eine leichte praktische Verzeichnung hat Herr General Feldzeugmeister Baron von Unterberger in den physicalischen Arbeiten der einträchtigen Freunde in Wien 1783 bekannt gemacht.

Fig. 133. IV. Aus der bekannten Breite eines Ortes, und aus der für einen bestimmten Augenblick der wahren Zeit berechneten Abweichung der Sonne für eben denselben gegebenen Augenblick der wahren Zeit sowohl das Azimuth, als auch die Höhe der Sonne zu finden.

Auflösung. Da der Augenblick der wahren Zeit gegeben ist, für welchen das Azimuth und die Höhe gesucht wird, so ist der Zeitunterschied von der nächsten Culminations-Zeit bekannt; und wenn man diesen Zeitunterschied nach dem vorigen §. in Bogenmaß, das heißt, in den dazu gehörigen Aequators-Bogen verwandelt, so erhält man den Stundenwinkel ZPS. In dem Kugeldreyecke ZPS sind demnach zwey Seiten PZ und PS (Zenith-Distanz des Pols und die Polar-Distanz der Sonne) mit dem eingeschlossenen Stundenwinkel ZPS bekannt; daraus läßt sich demnach sowohl der Winkel PZS als auch die Zenith-Distanz ZS berechnen. Da nun diese beyden bekannt sind; so folget daraus das gesuchte Azimuth $=$ 180° $-$ PZS $=$ MZB $=$ MB $=$ MCB; und die gesuchte wahre Höhe $=$ 90° $-$ ZS $=$ BS. Diese wird endlich in die scheinbare Höhe verwandelt, wenn man die Strahlenbrechung hinzu addiret. Es sey der Stundenwinkel ZPS $=$ α, die Zenith-Distanz des Pols wie vorher PZ $=$ b, und die Polar-Distanz PS $=$ c; so lassen sich das gesuchte Azimuth MCB und die gesuchte wahre Höhe ZS der Sonne mittelst nachstehender Formeln berechnen.

$$\text{tang}\, c \,.\, \cos\alpha = \cot\varphi.$$

$$\text{tang . Azimuth} = \frac{\cos\varphi \,.\, \text{tang}\,\alpha}{\cos\,(b+\varphi)}$$

$$\sin \text{Höhe} = \frac{\sin\,(b+\varphi)\,.\,\cos c}{\sin\varphi}$$

Diese Formeln sind aus §. 581. II. und III. Aufgabe mit der für diesen Fall erforderlichen Veränderung heraus genommen worden, und es bleibt nur noch zu bemerken, daß man sowohl bey der Bestimmung des Hülfswinkels φ, als auch bey den anderen zwey Formeln auf die gehörige Bedeu-

Deutung der Zeichen + und — der trigonometrischen Functionen die nöthige Aufmerksamkeit haben muß. Fig. 133.

Beyspiel.

Wie groß ist zu Wien im Jahre 1804 den 1. May Morgens um 8 Uhr 58 Min. 10 Sec. wahrer Zeit das Azimuth der Sonne, und ihre wahre Höhe an einem Beobachtungsorte, dessen geographische Breite $= 48^\circ\ 12'\ 30''$ ist? Aus II. ist für diesen Augenblick die Polar-Distanz der Sonne $c = 74^\circ\ 56'\ 30''$, die Zenith-Distanz des Pols $b = 41^\circ\ 47'\ 30''$, und wegen der gegebenen wahren Zeit 3 St. 1 M. 50 S. von der nächsten Culminations-Zeit der in einen Aequators-Bogen verwandelte Stundenwinkel $\alpha = 45^\circ\ 27'\ 30''$. Daraus findet man nun das Gesuchte durch folgende Rechnung.

log tang c	= 10,5701820	
log cos α	= 9,8459830	
log cot φ	= 10,4161650	$\varphi = 20^\circ\ 59'\ 5\frac{1}{2}''$
log sin φ	= + 9,5540301	$b = 41\ 47\ 30$
log cos φ	= 9,9701951	$b + \varphi = 62\ 46\ 35\frac{1}{2}$
log tang α	= 10,0069485	
Summe	= 19,9771436	
log cos $(b+\varphi)$	= — 9,6603553	
log tang Azimuth	= 10,3167883	Azim. $= 64^\circ\ 15'\ 27''$
log sin $(b+\varphi)$	= 9,9490137	w.H. $= 40\ 10\ 23$
log cos c	= 9,4146430	R.P.S $= +\ 1\ 0$
Summe	= 19,3636567	sch.H. $= 40\ 11\ 23$
log sin φ	= — 9,5540301	
log sin Höhe	= 9,8096266	

Anmerk. Das Azimuth und die Höhe der Sonne kann man aus der bekannten Abweichung γ, und aus der Breite des Ortes $= \beta$, für einen gegebenen Augenblick der wahren Zeit, nähmlich für den davon abhangenden Stundenwinkel $= \alpha$ mittelst folgender Formeln noch leichter berechnen.

cot

Fig. 133.

$$\cot \text{Azimuth} = \cot\alpha \cdot \sin\beta \mp \frac{\cos\beta \cdot \operatorname{tang}\gamma}{\sin\alpha} ; \left.\begin{matrix} -b \\ \hline +a \end{matrix}\right\} \gamma$$

$$\cos \text{Höhe} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\gamma}{\sin \text{Azimuth}}$$

wo im zweyten Gliede der ersten Formel bey einer nördlichen Abweichung das obere —, bey einer südlichen aber das untere Zeichen + gebraucht werden muß. Es ist klar daß für einen Stundenwinkel $\alpha > 90°$, auch das erste Glied der ersten Formel negativ ist. Beyde Formeln werden aus dem Dreyecke ZSP abgeleitet, wenn man in demselben die Seiten und Winkel durch die hier angegebenen Größen gehörig ausdrucket, und diese Werthe dann in der Gleichung §. 581. II. und XII. Aufgabe substituiret.

Beyspiel.

Es sey im Jahre 1804 für den 21. Junius Vormittags um 9 Uhr wahrer Zeit das Azimuth und die wahre Höhe der Sonne zu Göttingen zu bestimmen, so ist der Stundenwinkel $\alpha = 45°$, die Breite des Ortes $\beta = 51° 31' 54''$ und die Abweichung der Sonne $\gamma = 23° 27' 50''$ bekannt; daher findet man das Gesuchte durch folgende Rechnung:

$$\cot . \text{Azimuth} = \cot\alpha \cdot \sin\beta - \frac{\cos\beta \operatorname{tang}\gamma}{\sin\alpha}$$

$$\cos \text{Höhe} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\gamma}{\sin \text{Azimuth}}$$

$\log \cot\alpha$	$= 0,$		
$\log \sin\beta$	$= 0\,8937352 - 1$		
$\log N$	$= 0,8937352 - 1$	N	$= 0,7829522$
		$-n$	$= -0,3818700$
$\log \cos\beta$	$= 0,7938476 - 1$		
$\log \operatorname{tang}\gamma$	$= 0,6375529 - 1$	$\cot$ Az.	$= 0,4010822$
Summe	$= 0,4314005 - 1$	Azim.	$= 68° 8' 42''$
$\log \sin\alpha$	$= -0,8494850 - 1$		
$\log n$	$= 0,5819155 - 1$		

log

log sin α = 0,8494850 — 1	Wahre H. = 45° 39′ 50″	Fig.
log cos γ = 0,9625167 — 1	Vre d. S. = — 6	133.
Summe = 0,8120017 — 1	Refract. = + 56	
log sin Azimuth = 0,9676083 — 1	Sch. Höh. = 45 40 40	
log cos Höhe = 0,8443934 — 1		

V. Bey einer trigonometrischen Vermessung eines Landes die Richtung der Mittags-Linie aus einem beliebigen Standpuncte in Hinsicht auf einen anderen schon bestimmten Punct zu finden, um sodann auf der Zeichnung des aufgenommenen Landes auch die Lage der Weltgegenden richtig anzeigen zu können.

Auflösung. Es sey C der Standpunct, aus welchem die Richtung der Mittagslinie CM in Hinsicht auf einen anderen unbeweglichen Punct am Horizonte gesucht werden soll, etwa in Hinsicht auf einen sehr weit entfernten Thurm AF, dessen Lage bey der trigonometrischen Aufnahme schon bestimmet ist; so wird die Aufgabe aufgelöset seyn, wenn man den Winkel ACM wird gefunden haben, welchen die Mittags-Linie CM mit der horizontalen Richtungs-Linie CA einschließet. Diesen Winkel kann man auf folgende Art finden.

A) Wenn man ein Theodolit bey der Hand hat, (ein Winkel-Meßinstrument mit einem verticalen Höhen-Zirkel auf einer horizontalen Scheibe mit zwey Fernröhren versehen, um einen Höhen- und einen horizontalen Winkel zugleich messen zu können), so beobachte man mit solchem zu einer schicklichen Zeit, etwa Morgens vor 9, oder Abends nach 3 Uhr die scheinbare Sonnenhöhe BS, und zugleich den horizontalen Winkel BCA, welchen die Vertical-Ebene durch den Mittelpunct der Sonne gelegt mit der Vertical-Ebene AFC einschließt, welche durch die angenommene Thurmspitze F und durch den Standpunct C gehet. So dann bestimme man daraus die wahre Zenith-Distanz der Sonne ZS = a, berechne auch für die beyläufig wahre Zeit der Beobachtung ihre Abweichung, um für denselben Augenblick

die

Fig. 133. die Polar-Distanz der Sonne PS = c zu erhalten (die geographische Breite oder Polhöhe des Standpunctes muß man schon in einer vorher gehenden Operation nach der I. Aufgabe bestimmet haben); so ist auch die Zenith-Distanz des Pols ZP = b bekannt. Setzet man nun $\frac{1}{2}(a+b+c) = p$, so kann man vermöge der IV. Aufgabe, den Azimuthal-Winkel BCM mittelst der Formel

$$\sin \tfrac{1}{2} \text{ Azimuth} = V\left[\frac{\sin p \sin (p-c)}{\sin a \,.\, \sin b}\right]$$

berechnen. Wenn man endlich den beobachteten Winkel ACB von dem berechneten Azimuth BCM abziehet, oder dazu addiret, je nachdem der Gegenstand AF von der Sonne gegen Süden oder gegen Norden liegt; so erhält man den gesuchten Winkel ACM, wodurch die Lage der Mittags-Linie CM in Hinsicht auf die festgesetzte Richtungs-Linie CA bestimmet wird. Wenn bey der südlichen Lage des Gegenstandes AF in Hinsicht auf die Sonne der Winkel BCA größer seyn sollte, als das berechnete Azimuth BCM; so wäre die Differenz BCM — BCA negativ, und die gesuchte Mittags-Linie fiele daher auf die innere Seite der horizontalen Richtung CA.

B) Wenn man zur Auflösung dieser Aufgabe einen Spiegel-Sextanten gebrauchen will, so muß man auch eine Secunden-Taschenuhr dabey haben, deren Gang durch eine Zeit von einigen wenigen Minuten gleichförmig verbleibet, und nach der mittlereu Sonnenzeit berichtiget ist, wenn schon die Zeiger weder nach der mittleren noch nach der wahren Zeit gestellet sind. Mit diesen Instrumenten wird aus dem Standpuncte C die Lage der Mittags-Linie CM in Hinsicht auf die festgesetzte Richtungs-Linie CA auf folgende Art gesuchet.

1.) Man messe zu einer schicklichen Zeit Morgens vor 9 oder Abends nach 3 Uhr die scheinbare Höhe des oberen oder des unteren Sonnenrandes: um daraus die wahre Zenith-Distanz des Mittelpunctes der Sonne ZS = c abzuleiten, und bemerke den Zeitpunct der beobachteten Sonnenhöhe nach der zubereiteten Secunden-Taschenuhr.

2.)

2.) Gleich darauf messe man auch den schiefen Bogen FS zwischen dem nächsten Sonnenrande und zwischen dem Puncte F des Gegenstandes AF, um durch Hinzusetzung des Halbmessers den schiefen Abstand des Mittelpunctes der Sonne S von dem Puncte F zu erhalten. Bey dieser Messung bemerke man auch den Zeitpunct des beobachteten schiefen Abstandes des Sonnenrandes von dem Puncte F nach eben derselben Secunden-Taschenuhr. Fig. 133.

3.) Man messe auch den Bogen AF, als die scheinbare Erhöhung des Punctes F über den Horizont des Standpunctes C, um die scheinbare Zenith-Distanz ZF zu erhalten.

4.) Aus der bekannten wahren Zenith-Distanz der Sonne $= a$, aus dem ebenfalls bekannten Complemente der geographischen Breite des Standpunctes $= b$, und aus der für die beyläufig wahre Zeit der beobachteten Sonnenhöhe bestimmten Abweichung und davon abhangenden Polar-Distanz der Sonne $= c$, berechne man nun die wahre Zeit der beobachteten Sonnenhöhe nach der II. Aufgabe mittelst einer der beyden folgenden Formeln.

$$\sin \tfrac{1}{2} \text{Stundenwinkel} = \sqrt{\left[\frac{\sin(p-b).\sin(p-c)}{\sin b.\sin c}\right]}$$

oder aber

$$\cos \tfrac{1}{2} \text{Stundenwinkel} = \sqrt{\left[\frac{\sin p.\sin(p-a)}{\sin b.\sin c}\right]}$$

5.) Zu dieser gefundenen wahren Zeit der beobachteten Sonnenhöhe addire man den Zeitunterschied zwischen den bey der Messung der Sonnenhöhe und des schiefen Abstandes von dem festgesetzten Puncte in 1) und 2) nach der Taschenuhr bemerkten Zeitpuncten; so erhält man dadurch die wahre Zeit der Beobachtung des schiefen Abstandes der Sonne von dem festgesetzten Puncte.

Anstatt einer Secunden-Taschenuhr kann man auch ein frey hangendes Pendel gebrauchen, (eine Bleykugel, die mittelst zweyer Fäden von einem horizontalen Stäbchen in

ei-

Fig. 133. einer Entfernung = 441 Pariser-Linien = $36\frac{3}{4}$ Zoll von der Schwingungsachse bis zum Mittelpuncte der Kugel frey herab hänget, und durch eine mitgetheilte Bewegung ihre Schwingungen in Secunden der mittleren Zeit verrichtet). Da läßt man durch einen Gehülfen während der ganzen Dauer der beyden Beobachtungen 1) und 2) das Pendel in einer mäßigen Schwingungsbewegung erhalten, und die Schwingungen ununterbrochen zählen, um den Zeitpunct der Beobachtung so wohl der Sonnenhöhe als auch des schiefen Abstandes durch die Anzahl solcher Schwingungen zu bemerken, und den Zeitunterschied zwischen der ersten und zweyten Beobachtung in Secunden der mittleren Zeit anzugeben. Diesen Zeitunterschied muß man nun zu der nach 4) berechneten wahren Zeit hinzu fügen, um die wahre Zeit der Beobachtung des schiefen Abstandes zu erhalten.

6) Aus dieser nun bekannt gewordenen Zeit der Beobachtung des schiefen Abstandes der Sonne von dem festgesetzten Puncte, nähmlich aus dem davon abhangenden Stundenwinkel $= \alpha$, aus der ebenfalls bekannten geographischen Breite der Beobachtungs-Station $= \beta$, und aus der für den Augenblick dieser Beobachtung berichtigten Abweichung der Sonne $+ \gamma$ berechne man so dann nach der V. Aufgabe das Azimuth BCM und die scheinbare Zenith-Distanz der Sonne ZS mittelst nachstehender Formeln

$$\cot \text{Azimuth} = \cot \alpha \,.\, \sin \beta \mp \frac{\cos \beta \,.\, \text{tang}\, \gamma}{\sin \alpha} \left.\begin{matrix} ; & - b \\ & + a \end{matrix}\right\} \gamma$$

$$\sin \text{Zenith-Dist.} = \frac{\sin \alpha \,.\, \cos \gamma}{\sin \text{Azimuth}} ; \; - \text{Refr.} + \text{Parallax.}$$

7. Endlich berechne man aus der so bekannt gewordenen scheinbaren Zenith-Distanz der Sonne $ZS = m$ im Augenblicke der Beobachtung des schiefen Abstandes, aus diesem gemessenen schiefen Abstande $FS = d$ und aus der in 3) gefundenen scheinbaren Zenith-Distanz $ZF = n$ im Kugeldreyecke FZS den Winkel bey $Z = ACB$ mittelst einer der folgenden zwey Formeln

für

für $\frac{1}{2}(m+n+d)=p$ Fig.

$$\sin\tfrac{1}{2}\mathrm{ACB}=\sqrt{\left[\frac{\sin(p-m).\sin(p-n)}{\sin m.\sin n}\right]}$$ 133.

$$\cos\tfrac{1}{2}\mathrm{ACB}=\sqrt{\left[\frac{\sin p.\sin(p-d)}{\sin m.\sin n.}\right]}$$

8.) Aus diesem berechneten horizontalen Winkel ACB, welchen die horizontale Richtungs-Linie CA mit CB im Augenblicke der Beobachtung des schiefen Abstandes der Sonne S von dem festgesetzten Puncte F einschloß, und aus dem für denselben Augenblick in 6) berechneten Azimuthal-Winkel der Sonne BCM findet man endlich den gesuchten Winkel ACM, welchen die Mittags-Linie CM mit der bestimmten Richtungs-Linie CA in dem Standpuncte C einschließet. Es ist nähmlich wie oben $\mathrm{ACM}=\mathrm{BCM}-\mathrm{ACB}$, wenn AF rechts gegen Süden von der Sonne befindlich ist. Hingegen ist $\mathrm{ACM}=\mathrm{BCM}+\mathrm{ACB}$, wenn AF links gegen Norden von der Sonne liegt. Endlich fällt der Punct M zwischen A und B und daher CM herwärts CA, wenn AF von BS rechts über die Mittagsgegend liegt, und dabey $\mathrm{ACB}>\mathrm{BCM}$ ist.

Anmerkung. Wenn der Punct F genau im scheinbaren Horizonte des Standpunctes C befindlich wäre; so würde die Rechnung um vieles abgekürzet, weil sodann im Dreyecke FZS die Seite $\mathrm{FZ}=90°$ wäre. Noch mehr würde die Auflösung dieser Aufgabe abgekürzet, wenn man den Winkel BCA beym Aufgange oder Niedergange der Sonne gerade in dem Augenblicke beobachten wollte, als ihr Mittelpunct sich in dem scheinbaren Horizonte des Standpunctes C befindet. Allein in diesem Falle müßte auch ein sehr niedriger Stand der Sonne zur Berechnung der wahren Zeit gebraucht werden, wodurch wegen der zu sehr veränderlichen Refraction bey gar kleinen Sonnenhöhen das Gesuchte nicht jederzeit mit der nöthigen Genauigkeit gefunden würde. Daher ist es rathsam beyde Beobachtungen der Sonne, welche zur Auflösung der angeführten Aufgabe erforderlich sind, zu einer Zeit vorzunehmen, da die Sonnenhöhe schon über 9 oder 10 Grade beträgt.

Fig. 133. VI. Aus den gegebenen Breiten zweyer Oerter, und aus dem gegebenen Unterschiede ihrer Längen, die Entfernung derselben in geographischen Meilen anzugeben, deren 15 auf einen Grad, folglich 5400 auf einen größten Kreis der Erde (als Kugel betrachtet) gehen.

Auflösung. Man setze die beyden Oerter (Fig. 133.) in Q und S, so ist ihre Entfernung QS ein Stück eines größten Kreises, weil die Entfernungen zweyer Puncte auf der Oberfläche einer Kugel durch Bogen größter Kreise gemessen werden. Es sey P der Pol, GER der Aequator, MGNM der erste Meridian; so ist EL = GE — GL der Längenunterschied beyder Oerter, welcher dem Neigungswinkel der beyden Meridiane FQP und ESP, nähmlich dem Winkel QPS gleich ist. Ferner sind die Bogen QL und ES die Breiten der Oerter Q und S. Setzen wir EL = α, LQ = b, ES = c; so ist PQ = 90° — LQ = 90° — b, PS = PE — ES = 90° — c, wenn beyde Oerter entweder auf der nördlichen, oder auf der südlichen Halbkugel liegen. Es sind demnach in dem Dreyecke PQS zwey Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel gegeben; daraus kann die dritte Seite QS nähmlich die gesuchte Entfernung (nach §. 581. II. Aufgabe) durch folgende Formeln gefunden werden.

$$\cot b \cdot \cos \alpha = \cot \varphi$$

$$\cos QS = \frac{\sin b \cdot \cos (c - \varphi)}{\sin \varphi}.$$

Wäre die Breite des einen Ortes S nördlich und die Breite des anderen Ortes F südlich, so würde die letzte Formel in $\cos FS = \frac{\sin b \cdot \cos (c + \varphi)}{\sin \varphi}$ übergehen.

Beyspiel.

Es ist die Länge von Paris = 20°, die Länge von Wien = 34°, 2′, 30″, folglich ist der Längenunterschied dieser beyden Oerter α = 14°, 2′, 30″; ferner ist die nördliche

Brei-

Breite von Paris $b = 48°, 50', 14''$, und die nördliche Breite von Wien $c = 48°, 12', 36''$. Daraus kann die Entfernung dieser beyden Oerter mittelst der oberen Formeln durch folgende Rechnung gefunden werden. Fig. 133.

log cot b = 0,9416540 — 1
log cos α = 0,9868252 — 1
log cot ϕ = 0,9284792 — 1

$\phi = 49°, 41', 48''$
$c - \phi = -1, 29, 12$

log sin b = 0,8767043 — 1
log cos $(c - \phi)$ = 0,9998538 — 1
D. E. log sin ϕ = 0,1176857
log cos QS = 0,9942438 — 1
QS = 9°, 18', 29'' = 9,308°

und weil 15 geographische Meilen auf einen Grad gehen, so ist QS = 15.9,308 = 139,62 geographischen Meilen.

Anmerkung. Soll diese Entfernung von Wien und Paris in einem anderen Längenmaße z. B. in österreichischen Postmeilen, wovon Eine 4000 Wiener-Klafter enthält, angegeben werden; so muß das Verhältniß zwischen einer geographischen und einer österreichischen Postmeile bekannt seyn. Dieses Verhältniß kann auf folgende Art gefunden werden.

Ein Meridian-Quadrant beträgt 10000000 neufränkische Métres; diese 10000000 Métres sind nach den neuesten Messungen = 5130740 ehemahligen Pariser Toisen. Nun ist 1 Par. Tois. genau = 1,02764 Wiener Klafter; folglich ist eine geographische Meile = $\frac{5130740.1,02764}{1350.4000}$ = 0,9763987 österreichischen Postmeilen, wenn man diese gegebenen Verhältnisse gehörig vergleichet. Daraus folgt die Entfernung zwischen Paris und Wien = 136,325 österreichischen Postmeilen.

Die Länge eines größten Kreises auf der Oberfläche der Erde wird durch ein beliebiges Längenmaß ausgemessen, wenn man an irgend einem Standpuncte die Richtung der Mittags-Linie bestimmet, dann einen andern, wenigstens Einen Grad davon entfernten, Standpunct darin oder nahe

Fig. an derselben annimmt, ferner die Culminationshöhen eines und desselben Sternes in beyden Standpuncten mit möglichster Genauigkeit beobachtet, endlich durch eine trigonometrische Operation, nach Anleitung des folgenden Hauptstückes, die Gegend um diese beyden Standpuncte genau aufnimmt, und daraus die Entfernung der Parallel-Kreise dieser beyden Puncte durch das zum Grunde gelegte Längenmaß berechnet. Nun ist diese so berechnete Entfernung der Parallel-Kreise der eben so vielte Theil von der Länge des ganzen Meridians oder eines größten Kreises, als der Unterschied der Culminations-Höhen in beyden Oertern von 360° ist. Daraus findet man die Länge des Meridian-Quadranten, und ferner den ganzen Umkreis, wie auch den Durchmesser der Erdkugel in eben demselben Längenmaße ausgedruckt, welches bey der erwähnten trigonometrischen Vermessung zum Grunde gelegt wurde. Auf diese Art hat man durch mehrere in verschiedenen Ländern vorgenommene Gradmessungen gefunden.

den Meridian-Quadranten	= 5272554	Wien. Klaft.
$\frac{1}{90}$ desselben, oder 1 Meridian-Grad	= 58583,93	
$\frac{1}{15}$ Grad, oder 1 geographis. Meile	= 3905,595	
1 Meridian-Minute	= 976,399	
1 Meridian-Secunde	= 16,273	
Durchmesser der Erdkugel	= 6713223	

Man vergleiche hiermit Liesganig Dimensio graduum Merid. Vienens. et Hungari Viennae 1770.

VII. Aus den gegebenen Breiten zweyer Oerter und aus der gegebenen Entfernung derselben den Längenunterschied dieser beyden Oerter zu finden.

Auflösung. Es sey die Breite des einen Ortes $= b$, die Breite des anderen Ortes $= c$, und die Entfernung dieser beyden Oerter $= d$ im Bogenmaße nach Anleitung der vorigen Aufgabe ausgedruckt; so kann der Längenunterschied dieser beyden Oerter oder welches einerley ist der Neigungswinkel ihrer Meridiane $= a$ (nach §. 581. I. Aufgabe) durch eine der beyden folgenden Formeln bestimmet werden,

wo

worin $P = \frac{1}{2}(b+c+d)$ ist

Fig.

$$\sin\tfrac{1}{2}a = V\left[\frac{\sin(P-b).\sin(P-c)}{\cos b\ .\cos c}\right]$$

$$\cos\tfrac{1}{2}a = V\left[\frac{\cos P.\cos(P-d)}{\cos b\ .\cos c}\right].$$

Nach dem vorigen Beyspiele ist

$b = 48°, 50', 14''$, $c = 48°, 12', 36''$ und $d = 9°, 18' 29''$, (wäre die Entfernung in einem Längenmaße gegeben, so müßte sie auch nach dem bekannten Verhältnisse dieses Längenmaßes zu dem neufränkischen Métre in Bogenmaß verwandelt werden) daraus findet man den Neigungswinkel des Pariser- und Wiener-Meridians; oder welches einerley ist, den Längenunterschied dieser beyden Oerter durch folgende Rechnung.

$b = 48°, 50', 14''$	$P = 53°, 10', 39''$
$c = 48, 12, 36$	$P-b = 4, 20, 25$
$d = 9, 18, 29$	$P-c = 4, 58, 3$

$2P = 106, 21, 19$

log sin $(P-b) = 0{,}8789794-2$

log sin $(P-c) = 0{,}9374710-2$

D. E. log. cos$b = 0{,}1816418$

D. E. log. cos$c = 0{,}1762635$

Summe $= 0{,}1743557-2$ | $\frac{1}{2}a = 7°, 1', 15''$

log sin $\frac{1}{2}a = 0{,}0871779-1$ | $a = 14, 2, 30$

nähmlich es ist der Längenunterschied zwischen Wien und Paris $= 14°, 2', 30''$ eben so wie derselbe in der vorigen Aufgabe angenommen worden ist.

VIII. Aus der gegebenen Entfernung zweyer Puncte auf der Oberfläche der Erde, aus der gegebenen Breite oder Polhöhe des einen Punctes, und aus der daselbst gegebenen Richtung der Mittags-Linie, die Polhöhe des anderen Punctes, die Richtung der daselbst gezogenen Mittags-Linie, und den Längenunterschied beyder Puncte oder den Neigungswinkel der Meridiane dieser beyden Puncte zu finden.

Fig. 133. Auflösung. Man setze (Fig. 133.) die beyden Puncte in Q und S, die Entfernung der beyden Puncte QS = d, die Polhöhe des Punctes Q nähmlich QL = b, und den Winkel, welchen die Verbindungs-Linie QS mit der Mittags-Linie einschließt, nähmlich den Winkel SQL = β; so ist QP = $90 - b$, der Winkel SQP = $180 - \beta$. Es sind demnach in dem Dreyecke PQS zwey Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel gegeben. Daraus können (nach §. 581. II. und III. Aufgabe) die übrigen Stücke SP, QPS und QSP gefunden werden.

Diese Aufgaben sind hinreichend den ausgebreiteten Nutzen zu beweisen, welchen die Anwendung der sphärischen Trigonometrie in verschiedenen Gelegenheiten darbiethet. Noch mehrere eben so nützliche Aufgaben aufzulösen, als z. B. die Bestimmung des Tagebogens für einen festgesetzten Ort bey der gegebenen Lage der Sonne in der Ecliptik; die Berechnung der Länge und Breite eines Himmelskörpers aus dessen bekannter geraden Aufsteigung und Abweichung und aus der gegebenen Schiefe der Ecliptik, und umgekehrt; die Berechnung des wahren Distanz-Bogens zweyer Himmelskörper aus der Beobachtung der Höhenwinkel und der scheinbaren Distanz derselben in einem bestimmten Zeitpuncte, und mehr dergleichen verstattet die Gränze dieses Lehrbuches nicht. Auch ist der fähigere Schüler aus dem bisher Gesagten schon hinlänglich in den Stand gesetzt, für eine jede solche Aufgabe sich die gehörige Figur zu entwerfen, und dann die gegebenen Bedingnisse in Gleichungen zu ordnen. Die Theorie der Gnomonik oder die Lehre, auf einer gegebenen, gegen den Horizont wie immer geneigten Ebene, die Schatten-Linien zu bestimmen, welche ein nach der Richtung der Weltachse parallel eingesteckter Stift, der Weiser, in den nach einander folgenden Stunden des Tages auf diese Ebene wirft, kann nun sehr leicht nach den Gründen der sphärischen Trigonometrie entwickelt werden, weil diese Schatten-Linien in den Durchschnitten der durch den Pol gezogenen Stundenkreise mit der Ebene der Sonnenuhr liegen müssen. Die Verzeichnung dieser Schatten-Linien ist eine Verbindung

der

der geradlinigen und sphärischen Trigonometrie; sie ist in sehr vielen über diesen Gegenstand handelnden Schriften deutlich aus einander gesetzet. Deßwegen wollen wir uns nicht länger dabey aufhalten, sondern beschließen hiermit diesen Abschnitt. Fig.

Fünftes Hauptstück.

Von den Anfangsgründen der practischen Meßkunst.

I. Abschnitt.

Von der Auflösung der nothwendigsten Aufgaben durch die gebräuchlichsten Meß-Instrumente.

§. 584.

Die practische Meßkunst lehret die Entfernung zweyer in der Natur gegebenen Puncte unter verschiedenen Umständen auszumessen, die Lage und Länge mehrerer Linien zu entdecken, zu einem bestimmten Stücke der Erdoberfläche eine ähnliche Figur in einem gegebenen Verhältnisse zu verzeichnen, und den Flächeninhalt sowohl des Ganzen, als auch jedes einzelnen Theiles desselben richtig anzugeben. Folglich ist sie eine bloße Anwendung der vorhergehenden Lehrsätze und Schlüsse, und begreift die Auflösung verschiedener hierher gehörigen Aufgaben mittelst eigener zu diesem Endzwecke verfertigten Instrumente in sich. Damit man nun die practische Meßkunst gründlich erlerne, so ist es nicht genug, daß man die mathematischen Auflösungsarten der verschiedenen dabey vorkommenden Aufgaben begreifet; man muß auch die hierzu nöthigen Instrumente in allen ihren Theilen kennen, und durch hinlängliche Uebung die geschickteste Behandlungsart derselben sich eigen machen. Eine

Fig. noch so deutliche Beschreibung der Meßinstrumente würde doch nur unvollkommene Ideen erwecken. Es ist unumgänglich nothwendig diese Instrumente selbst vor Augen zu haben, um sich die Kenntniß derselben zu erwerben. Aus dieser Ursache übergehen wir die Beschreibung derselben gänzlich. Wir werden in diesem Hauptstücke bloß die nothwendigsten Aufgaben vornehmen, und bey einer jeden ins besondere die Methode in gedrängter Kürze angeben, nach welcher sie mittelst der gebräuchlichsten Meßinstrumente aufgelöset wird.

§. 585.

Aufgabe. Einen geradlinigen Winkelmesser (Transporteur) zu verfertigen, um durch Hülfe desselben einen auf dem Papiere gegebenen Winkel zu messen, und auch einen Winkel zu verzeichnen, der eine gegebene Anzahl der Grade enthält.

Auflösung. 1) Man nehme aus was immer für einer trigonometrischen Tafel die natürlichen Sinus von $\frac{1}{2}^\circ$, 1°, $1\frac{1}{2}^\circ$, 2°, $2\frac{1}{2}^\circ$, 3°, $3\frac{1}{2}^\circ$ .... $44\frac{1}{2}^\circ$, 45°, und multiplicire jeden Sinus mit 2; so sind diese Producte die Sehnen der Bogen von 1°, 2°, 3°, 4°, 5° ....89°, 90° eines Kreises, dessen Halbmesser mit dem sintot in der Tafel einerley ist. Denn es ist chord$b$ $=$ $2\sin\frac{1}{2}b$ (vermöge 537.) Aus diesen ist es nun leicht die Sehnen für jeden anderen beliebigen Halbmesser zu finden, weil sich gleichnahmige trigonometrische Functionen von ähnlichen Bogen gegen einander verhalten, wie die dazu gehörigen Halbmesser (546.). Es ist am füglichsten bey der Verfertigung des geradlinigen Transporteurs den Halbmesser $=500$ zu setzen, weil man sodann die gesuchten Sehnen aller Grade von 1 bis 90 ohne fernerer Rechnung aus der Tafel der natürlichen Sinus herausschreiben kann, wenn nur sintot $=$ 1, oder auch sintot $=$ 100000,00 in dieser Tafel angenommen ist. Die Sehnen aller einzelnen Grade bis 90° eines Kreises dessen Halbmesser $=$ 500 ist, enthält nachstehende

Seh-

Sehnentafel

Fig.

für die Verfertigung des geradlinigen Transporteurs oder Sehnenmaßstabes.

Grad	Sehne	Grad	Sehne	Grad	Sehne	Grad	Sehne	Grad	Sehne
1	8,7	19	165	37	317,3	55	461,7	73	594,8
2	17,5	20	173,6	38	325,6	56	469,5	74	601,8
3	26,2	21	182,2	39	333,8	57	477,2	75	608,8
4	34,9	22	190,8	40	342	58	484,8	76	615,7
5	43,6	23	199,4	41	350,2	59	492,4	77	622,5
6	52,3	24	207,9	42	358,4	60	500	78	629,3
7	61	25	216,4	43	366,5	61	507,5	79	636,1
8	69,8	26	225	44	374,6	62	515	80	642,8
9	78,5	27	233,4	45	382,7	63	522,5	81	649,4
10	87,2	28	241,9	46	390,7	64	529,9	82	656,1
11	95,8	29	250,4	47	398,7	65	537,3	83	662,6
12	104,5	30	258,8	48	406,7	66	544,6	84	669,1
13	113,2	31	267,2	49	414,7	67	551,9	85	675,6
14	121,9	32	275,6	50	422,6	68	559,2	86	682
15	130,5	33	284	51	430,5	69	566,4	87	688,4
16	139,2	34	292,4	52	438,4	70	573,6	88	694,7
17	147,8	35	300,7	53	446,2	71	580,7	89	700,9
18	156,4	36	309	54	454	72	587,8	90	707,1

2) Man ziehe eine gerade Linie AB, errichte die Senkrechte AC, schneide von A bis C 12 gleiche Theile ab, und führe durch alle Theilungspuncte Parallelen zu AB. 135.

3) Man trage ferner auf AB und CD nach einem genau ausgetheilten geometrischen Maßstab (bey dem ohngefähr $\frac{1}{2}$ oder auch $\frac{2}{3}$ Zoll in 100 Theile abgetheilet ist) aus der vorigen Sehnentafel die Längen der Sehnen von 1°, 2°, 3°..90°, und ziehe die Puncte durch Transversalen zusam-

Fig. sammen, wie es Fig. 135. ausweiset; so ist der geradlinige Transporteur fertig.

§. 586.

136. Nun kann durch Hülfe dieses Transporteurs ein auf dem Papiere gegebener Winkel, ABD gemessen, das ist, die Anzahl seiner Grade bestimmet werden, wenn man aus der Spitze B des Winkels zwischen seinen Schenkeln mit dem Halbmesser A60 = C60 Fig. 136. einen Kreisbogen AD beschreibet, und sodann die Sehne dieses Bogens AD auf den Transporteur überträgt, um zu sehen, wie viel Grade die Sehne abschneidet: Wenn z. B. die Oeffnung des Zirkels, welche die Sehne des Bogens AD vorstellet, auf der Parallele 40 mit einer Spitze in 40 auf AC, und mit der andern auf der Transversale 25 eintrifft, so enthält der Winkel ABD 25° 40′. Ist hingegen der stumpfe Winkel CBD zu messen, so kann man die Anzahl seiner Grade vermittelst des Nebenwinkels ABC bestimmen. Durch Hülfe eben dieses Transporteurs kann auf einer Geraden AB Fig. 136. aus dem Puncte B ein Winkel verzeichnet werden, der eine gegebene Anzahl der Grade z. B. 25° 40′ enthält, wenn man aus B mit dem Halbmesser A60 oder C60 Fig. 135. einen unbestimmten Kreisbogen AD beschreibet Fig. 136, sodann von dem Transporteur die Sehne 25° 40′ aus A bis D in den Kreisbogen einschreibet, und endlich durch B und D eine gerade Linie führet. Hingegen wird ein stumpfer Winkel CBD vermittelst seines Nebenwinkels ABD verzeichnet. Den Grund dieses Verfahrens wird ein jeder leicht einsehen, wenn er sich nur erinnert, daß in einem jeden Kreise die Sehne von 60° dem Halbmesser gleich ist, und daß bey zwey Kreisbogen, die nur um ein Grad von einander unterschieden sind, die Differenzen der Bogen sich ziemlich genau eben so gegen einander verhalten, wie die Differenzen der dazu gehörigen Sehnen.

Anmerkung. Es ist ohne meine Erinnerung leicht einzusehen, daß man durch Hülfe der vorigen Sehnentafel mittelst einer gehörig eingetheilten Schnur auf dem Felde je-

jeden Winkel sowohl messen als auch ausstecken könne; wenn man mit keinem Instrumente zum Winkelmessen versehen ist. Auch ist es ganz begreiflich, daß man bey den mit Diopter-Linealen oder auch mit Fernröhren versehenen Winkelmessern statt der gewöhnlichen Eintheilung des Viertelkreises in 90 Grade den oben beschriebenen geradlinigen Transporteur anbringen kann. Fig.

§. 587.

Aufgabe. Durch Hülfe der Meß-Instrumente eine gerade Linie AB auf dem Felde zu messen, die nur an ihren Endpuncten, und nicht nach ihrer ganzen Länge sichbar und zugängig ist. 137.

Auflösung. Erstens durch Hülfe des Meßtisches. Man suche einen Ort C von der Beschaffenheit, daß man von C nach A und B sehen und messen könne, stelle den Meßtisch daselbst horizontal, und stecke in einen Punct desselben eine feine Nadel senkrecht ein, und zwar in denjenigen Punct c des Meßtisches, der mit dem Puncte C auf der Erde übereinstimmet *). Sodann visire man mittelst des Visir-Lineals von c nach A und B, ziehe die unbestimmten Visir-Linien ca, und cb, trage auf dieselben nach einem verjüngten Maßstabe die gemessenen Längen der Geraden CA und CB von c bis a und b, und untersuche wie viel Theile die Gerade ab auf eben demselben verjüngten Maßstabe ab-

*) Um einen auf dem Meßtische bereits befindlichen Punct genau über den gleichnahmigen auf der Erdfläche zu bringen, stellet man erst den Meßtisch über den letzteren in gehöriger Orientirung nach dem Augenmaße, hält sodann einen Faden mit einem daran hangenden Senkel unter das Tischblatt an die Stelle des darüber liegenden Punctes und siehet nach, ob die Faden-Linie des Senkels durch den Standpunct auf der Erdfläche gehe: ist dieses nicht, so muß der Meßtisch so lange gerucket werden, bis die Faden-Linie in dem bemerkten Puncte eintrift. Zu diesem Endzwecke kann man sich einer hierzu eigens verfertigten Gabel bedienen. Ein im Aufnehmen geübter Geometer wird schon bloß mittelst des Augenmaßes einen Punct auf dem Meßtische über den auf der Erdfläche gleichnahmigen ohne viele Mühe richtig stellen. Zur Prüfung kann er ein vorfindiges Steinchen an das Meßtischblatt unter dem erwähnten Puncte anhalten und dann frey fallen lassen; dadurch wird die Faden-Linie des Senkels ersetzet.

Fig 137. abschneidet; so wird man vermöge der Aehnlichkeit der Dreyecke acb und ACB die Länge der Geraden AB erhalten.

Zweytens durch Hülfe eines Winkelmessers. Man messe den Winkel ACB und die Seiten CA und CB, so sind in dem Dreyecke ACB zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel bekannt; folglich kann man die dritte Seite durch die Rechnung bestimmen entweder durch die Formel $AB = \sqrt{(AC^2 + BC^2 \mp \frac{2.AC.BC.\cos ACB}{\text{sintot}})}$ (vermöge 560.),

oder $AB = \sqrt{[(AC - BC)^2 + \frac{2AC.2BC.\sin^2 \frac{1}{2} ACB}{\text{sintot}}]}$

oder endlich wenn man (nach 558.) einmahl den Winkel A oder B berechnet, und sodann (nach 556.) die Seite AB bestimmet.

Drittens durch die Verzeichnung. Man verzeichne den gemessenen Winkel ACB auf einem Papiere, und übertrage auf dessen Schenkel nach einem verjüngten Maßstabe die gemessenen Längen der Geraden CA und CB von c bis a und b; so wird auf eben demselben Maßstabe die Gerade ab die wirkliche Länge von AB anzeigen.

§. 588.

138. Aufgabe. Eine Gerade AB, die nur an einem ihrer Endpuncte A zugängig ist, z. B. die Entfernung des Punctes A von B zu messen.

Auflösung. 1tens durch Hülfe des Meßtisches. Man suche einen Ort C von der Beschaffenheit, daß man von C nach A und B sehen, und CA messen könne, stelle den Meßtisch über C, visire von c nach A und B, und übertrage die gemessene Gerade CA nach einem verjüngten Maßstabe von c bis a. Sodann stelle man den Meßtisch dergestalt in A, daß der Punct a gerade über A zu stehen komme, die Linie ac aber in der Richtung der Geraden AC liege, und visire von a nach B; so wird die gezogene Visir-Linie ab die vorige cb in dem Puncte b durchschneiden, und die Linie ab auf eben demselben verjüngten Maßstabe die Länge

der

der Geraden AB bestimmen, weil die Dreyecke acb und ACB einander ähnlich sind. Man kann auch den Meßtisch das erste Mahl über A und das zweyte Mahl über C stellen. Fig. 138.

2tens durch Hülfe eines Winkelmessers Man messe die Stand-Linie AC, und beobachte an ihren Endpuncten die Winkel A und C; so ist dadurch in dem Dreyecke ACB auch der dritte Winkel B bestimmet, und die Seite AB wird sodann (nach 556.) gefunden.

3tens durch Verzeichnung. Man ziehe eine Gerade ac, trage auf dieselbe nach einem verjüngten Maßstabe die Gemessene AC, und verzeichne an ihren Endpuncten die Winkel a = CAB, und c = ACB; so ist das Dreyeck acb ∽ ACB, und folglich kann die gesuchte Länge der Geraden AB auf eben demselben verjüngten Maßstabe durch Hülfe der Geraden ab bestimmet werden.

§. 589.

Aufgabe. Eine gerade Linie AB, das ist die Entfernung zweyer Puncte A und B zu messen, wenn beyde unzugängig sind. 139.

Auflösung. 1tens durch Hülfe des Meßtisches. Man messe eine Grund-Linie CD von der Beschaffenheit, daß man von C nach A, B, und D, und auch von D nach C, A und B sehen könne. Sodann stelle man den Meßtisch über C, visire von C nach A, B und D, und trage die gemessene Gerade von c bis d. Darauf stelle man den Meßtisch mit dem Puncte d über D dergestalt, daß dc genau in der Richtung von DC liege, und visire von d nach A und B; so werden die Visir-Linien da und db die vorigen ca und cb in den Puncten a und b durchschneiden, und die Gerade ab wird wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke die gesuchte Länge von AB bestimmen.

2tens durch Hülfe eines Winkelmessers. Man messe die Stand- oder Grund-Linie CD, und beobachte an ihren Endpuncten die Winkel ACB und ACD, CDA und CDB; so hat man in dem Dreyecke ACD die Seite CD mit den anliegenden Winkeln ACD und ADC bestimmet, folglich kann

die

Fig. 139. die Seite AD (nach 556.) gefunden werden. Eben so kann man in dem Dreyecke CDB aus der Seite CD und den anliegenden Winkeln die Seite BD berechnen. Darauf sind in dem Dreyecke ADB zwey Seiten AD und BD sammt dem dazwischen liegenden Winkel bekannt; folglich kann die dritte Seite desselben AB (nach 557.) berechnet werden.

3tens durch die Verzeichnung. Man ziehe eine Gerade dc, trage auf dieselbe nach einem verjüngten Maßstabe die Gemessene DC, und verzeichne an ihren Endpuncten die beobachteten Winkel acb = ACB, bcd = BCD, adc = ADC, und bda = BDA; so wird auf eben demselben Maßstabe mittelst der Geraden ab die gesuchte Länge von AB gefunden.

§. 590.

Aufgabe. Zu einer unzugängigen Geraden AB durch einen gegebenen Punct D auf dem Felde eine Parallele zu führen.

Auflösung. 1tens durch Hülfe des Meßtisches. Man verfahre nach der ersten Art der vorigen Aufgabe (589.), ziehe sodann auf dem Meßtische eine Parallele df zu ab, und stecke dieselbe auf den Felde aus, z. B. von D bis F; so wird DF parallel zu AB seyn, wenn der Meßtisch richtig gestellet ist.

2tens durch Hülfe eines Winkelmessers. Man bestimme nach der 2ten oder 3ten Art der vorigen Aufgabe (589.) den Winkel DAB, und verzeichne auf dem Felde in dem gegebenen Puncte D den Wechselwinkel ADF = DAB so wird DF parallel zu AB seyn (363.).

§. 591.

Aufgabe. Durch einen auf dem Felde gegebenen Punct D auf eine unzugängige Gerade AB eine Senkrechte zu fällen.

Auflösung. Man führe nach der vorigen Aufgabe (590.) durch den gegebenen Punct D zu AB eine Parallele DF, errichte sodann aus dem Puncte D eine Senkrechte auf DF ent-

entweder durch Hülfe des Meßtisches, oder eines Winkelmes- Fig.
sers, oder auch nach (360. II.); so wird dieselbe auch auf 139.
AB senkrecht seyn. Die Lage der Senkrechten wird auch ge-
funden, wenn man in D an DA einen Winkel ADG auf
dem Felde ausstecket, welcher den bereits gefundenen Win-
kel DAB zu 90° ergänzet.

§. 592.

Aufgabe. Es sey PQ eine zugängige und MN eine un- 140.
zugängige Gerade Linie; man soll in der Linie PQ ei-
nen Punct A von der Beschaffenheit finden, daß die
Gerade AB von A nach einem sichtbaren Merkmahle B
in der Geraden MN gezogen mit derselben einen gege-
benen Winkel MBA einschließe.

Auflösung. Man suche auf der Geraden MN noch ein sichtbares Merkmahl C, messe auf der Geraden PQ eine Stand-Linie DE, und bestimme sodann nach (589.) die Gerade BE und den Winkel EBC, so ist dadurch auch der Winkel EBA gefunden, und in dem Dreyecke AEB ist sodann die Seite EB mit den anliegenden Winkeln AEB und EBA bekannt; folglich läßt sich daraus die Seite EA bestimmen, deren gefundene Länge man von E bis A auftragen muß, um den gesuchten Punct A in der Linie PQ zu finden.

§. 593.

Aufgabe. Einen unzugängigen Winkel, dessen 77.
Schenkel sich rückwärts verlängern lassen, z. B. einen
Bollwerkswinkel CAB in zwey gleiche Theile zu theilen,
um die Capital-Linie PM sichtbar zu machen.

Auflösung. Man nehme in der Verlängerung der Ge-
sichts-Linien die Puncte D und E von der Beschaffenheit an,
daß man von D nach E sehen könne, beobachte die Winkel
AED und ADE; so ist dadurch in dem Dreyecke ADE auch
der dritte Winkel EAD, und folglich auch $FAD = \frac{1}{2} EAD$
bekannt. Sodann messe man (nach 588.) die Seite AD,
so ist in dem Dreyecke AFD die Seite AD mit den anlie-

gen-

Fig. genden Winkeln bekannt; folglich kann die Seite FD gefun-
77. den werden, deren Länge man von D gegen E bis F auf-
trägt um den gesuchten Punct F zu bestimmen. Ist einmahl der Punct F gefunden, so kann die Richtung AF der Capital-Linie rückwärts so weit es erforderlich ist, verlängert werden.

§. 594.

141. Aufgabe. Es sey AB eine gerade Linie in ihrer Verlängerung wegen zwischen liegender Hinderniße unsichtbar; man soll zwey Puncte D und E auf dem Felde bestimmen, die in der Verlängerung von AB liegen.

Auflösung. Man bestimme mittelst einer Grund-Linie CF (nach 589.) die Gerade BC und den Winkel ABC; so ist dadurch auch der Nebenwinkel CBE bekannt. Ferner stecke man aus C an der Linie CB einen Winkel BCD von einer beliebigen Anzahl der Grade aus, so ist in dem Dreyecke BCD die Seite BC mit den anliegenden Winkeln bekannt; folglich kann dadurch die Seite CD gefunden, und ihre Länge auf den Schenkel CD von C bis D getragen werden, um den ersten Punct D zu erhalten. Eben so wird der zweyte Punct E bestimmet, weil in dem Dreyecke EBC die Seite BC mit den anliegenden Winkeln bekannt ist, und folglich CE sich daraus finden läßt.

§. 595.

Aufgabe. Eine zugängige Höhe AB zu messen.

Auflösung. Man messe die horizontale Länge einer Stand-Linie BC von C bis an den unteren Punct B der auszumessenden senkrechten Höhe BA, nähmlich man bestimme
142. BF = DE Fig. 142., oder FC = ED Fig. 143., und
und beobachte in C mit einem vertical gestellten Winkelmesser D
143. den Höhenwinkel EDA, nachdem man nähmlich das unbewegliche Visir-Lineal des Winkelmessers entweder mittelst einer genauen Schrottwage, oder mittelst einer Libelle (431.), oder endlich mittelst eines angebrachten Pendels in eine hori-

zon-

zontale Lage gebracht, und das bewegliche Lineal nach A gerichtet hat; ferner beobachte man auch den Höhen- oder Tiefenwinkel EDB. Nun ist in dem rechtwinkeligen Dreyecke EDA nebst dem rechten Winkel auch die Seite ED und der Winkel EDA bekannt; folglich kann die Seite EA entweder durch die Rechnung (nach 560.), oder auch durch die Verzeichnung gefunden werden. Ferner läßt sich in dem rechtwinkeligen Dreyecke BED aus der Seite ED und aus dem Winkel EDB die Seite EB bestimmen, welche man in Fig. 142. zu EA addiren, und in Fig. 143. von EA abziehen muß, um die gesuchte Höhe AB zu erhalten. Fig 142. 143.

§. 596.

Aufgabe. Eine unzugängige Höhe AB, nähmlich die Erhöhung des Punctes A über den Horizont des Punctes C zu messen. 144.

Auflösung. Man messe die horizontale Länge einer Stand-Linie CD, und beobachte an ihren Endpuncten die horizontalen Winkel BCD und CDB; so kann man daraus CB berechnen. Ferner beobachte man auch den Höhenwinkel ACB; so ist in dem rechtwinkeligen Dreyecke ABC die Seite BC nebst dem Winkel ACB bekannt; folglich läßt sich daraus die Seite AB, nähmlich die Erhöhung des Punctes A über den Horizont des Ortes C bestimmen.

Wenn man bey der horizontalen Stellung des Winkelmessers die horizontalen Winkel BCD und BDC nicht beobachten kann, so muß man die Grund-Linie CD auf einem ziemlich horizontalen Boden annehmen (wenn dieses nicht seyn kann, so muß man die Länge der geneigten Linie CD messen) und stellet an ihren Endpuncten die Fläche des Winkelmessers in die Ebene CAD um die schief geneigten Winkel ACD und ADC zu messen. Sodann beobachte man auch den Höhenwinkel ACB. Nun läßt sich in dem schief geneigten Dreyecke ACD aus der Seite CD und aus den anliegenden Winkeln die Seite CA berechnen. Sodann ist in dem rechtwinkeligen Dreyecke ACB die Hypothenuse AC nebst

dem

Fig. dem Winkel ACB bekannt; folglich läßt sich daraus die ge-
144. suchte Höhe AB bestimmen.

§. 597.

145. Aufgabe. Es sey ABCDEFGH eine Figur auf dem Felde; man soll auf dem Papiere nach einem verjüngten Maßstabe mittelst des Meßtisches eine Figur entwerfen, welche der Figur auf dem Felde ähnlich ist; das ist, man soll die Figur ABCDEFGH aufnehmen.

Auflösung. Man messe eine Grund-Linie AB, stelle den Meßtisch über A, und visire aus einem Puncte desselben a, der gerade über A liegt, nach B, C, D, E, F, G, H, und trage nach einem verjüngten Maßstabe die Länge der gemessenen Grund-Linie auf die Visir-Linie aB von a bis b. Dann stelle man mittelst des Zurück-Visirens den Meßtisch dergestalt über B, daß der Punct b gerade über B zu liegen komme, und die gezogene Visir-Linie ab genau in der Richtung von AB sich befinde. In dieser Stellung des Meßtisches visire man nun aus b nach C, D, E; so werden die Visir-Linien bC, bD, bE die vorigen ac, ad, ae, in den Puncten c, d, e, durchschneiden. Dadurch sind einmahl die Puncte A, B, C, D, E auf dem Meßtische bestimmet, nähmlich wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke ist aedcb ∽ AEDCB. Bey der Auswahl der Grund-Linie hat man jederzeit zu sehen, daß sie soviel als möglich, nähmlich, soviel als es der Terrain zuläßt, in einer solchen Lage angenommen werde, daß sich alle von den zwey End- oder Standpuncten nach den übrigen zu bestimmenden Puncten gezogenen Visir-Linien unter einem nicht zu spitzigen Winkel, etwa nicht unter 45° durchschneiden, damit die Durchschnitts- oder eigentlichen Bestimmungspuncte nicht zweifelhaft werden, und damit die Arbeit eine desto größere Sicherheit und Richtigkeit erhalte. Da jedoch dieses Begehren in der Ausübung nicht allenthalben ganz erfüllet werden kann, wie in Fig. 145. bey den Puncten F, G, H der Fall ist, so stelle man den Meßtisch sodann weiters über einen anderen bereits bestimmten Punct, z. B. mit e über E,

und

und visire nach F, G, H; so werden diese Visir-Linien ef, eg, eh die aus dem Standpuncte A gezogenen af, ag, ah in den Puncten f, g, h, durchschneiden, und die Figur abcdefgh ist sodann der Figur ABCDEFGH ähnlich. Nun läßt sich die wirkliche Länge einer jeden Geraden GH, EF, AG, HC, bestimmen, wenn man auf dem zu Grunde gelegten verjüngten Maßstabe die Länge der gleichnahmigen Geraden gh, ef, ag, hc untersuchet. Fig. 145.

Die ähnliche Figur abcdefgh erhält man auch, wenn man die Geraden AB, AC, AD, AE, AF, AG, AH auf dem Felde ausmißt, ihre Längen nach einem verjüngten Maßstabe auf die gezogenen Visir-Linien ab, ac, ad, ae, ... aufträgt, und die dadurch bestimmten Puncte gehörig mit einander verbindet.

Man pflegt gemeiniglich anf dem ersten Standpuncte die Magnetnadel auf das Meßtischblatt aufzusetzen und einspielen zu lassen, sodann durch Ziehung einer Reißbley-Linie an der einen oder auch an zwey gegen über stehenden Seiten des Gehäuses derselben ihre Richtung zu bemerken, damit man dadurch die Lage der aufgenommenen Figur in Hinsicht auf die Mittags-Linie eines gewissen Ortes beynahe erkenne, vorausgesetzt, daß an diesem Orte die Abweichung der Magnetnadel bekannt sey. Allhier zu Wien ist dermahlen nach den Beobachtungen des Hrn. Dr. Triesnecker k. k. Hof-Astronomen die Richtung des magnetischen Nordpols um 15 Grad 8 Min. von Nord gegen West abweichend. Die in dem ersten Standpuncte auf dem Meßtische bemerkte Richtung der Magnetnadel hat auch den Nutzen, daß man dadurch in einem jeden anderen Standpuncte den Meßtisch, wenn man gar keine anderen Hülfsmittel hat, orientiren, nähmlich denselben also stellen kann, daß alle in den vorigen Standpuncten auf dem Meßtische gezogenen Visir-Linien, und auch alle schon aufgenommenen Verbindungs-Linien mit den dazu gehörigen Linien auf dem Felde parallel laufen. Es wird dieses erhalten, wenn man den Meßtisch zu erst horizontal, dann die Magnetnadel an ihre auf dem

Fig. 145. Tischblatte bereits bemerkte Stellung aufsetzet, und endlich das Meßtischblatt so lange herumdreht, bis die Nadel gehörig eingespielet hat.

Den Umfang eben derselben Figur kann man aufnehmen, wenn man bey dem zweyten Standpuncte B die Linie BC ausmißt, und ihre Länge auf die gezogene Visir-Linie bc nach dem angenommenen verjüngten Maßstabe aufträgt, sodann den Meßtisch mit dem bereits bestimmten Puncte c über C gehörig stellet, von c nach D visiret, die Linie CD ausmißt, und dieselbe gehörig aufträgt, um den Punct D auf dem Meßtische zu erhalten. Eben so verfährt man bey den übrigen Puncten D, E, F, u. s. w. Bey der Aufnahme der im Inneren der Waldungen befindlichen Gegenstände, z. B. der Straßen, anderer Wege, Gränzen, u. d. gl., wo aus Mangel der freyen Aussicht die Puncte nicht vermittelst der Durchschnitte der Visir-Linien bestimmet werden können, ist man gezwungen auf diese Art vorzugehen. Der Gebrauch der Magnetnadel ist in dergleichen Fällen wirklich sehr vortheilhaft, um so mehr, da man durch Beyhülfe derselben bey dem Messen und Auftragen des Umfanges einer Figur, oder eines verschiedentlich gekrümmten Weges immer einen Standpunct mit dem Meßtische überspringen kann.

§. 598.

Bey dem Aufnehmen einer weit ausgedehnten Erdstrecke vermittelst des Meßtisches mit Auftragung aller vorkommenden erheblichen Gegenstände ist vorzüglich Folgendes zu merken.

I. Die Vorbereitung zum wirklichen Aufnehmen. II. Das geometrische Trianguliren, nähmlich das Aufnehmen der Haupt- oder Fix-Puncte der ganzen Strecke. III. Das Figuriren, und Aufnehmen des Details. IV. Das Zusammenstoßen der angränzenden Sectionen bey einer über mehrere Meßtischblätter ausgedehnten Aufnahme. Es wird hier jedes insbesondere vorgenommen.

I. Die Vorbereitung zum wirklichen Aufnehmen. Fig.

Bevor man zu der wirklichen Aufnahme einer ganzen Gegend schreitet, besonders wenn man voraus sieht, daß solche nach der erfo derlichen oder angenommenen Größe des verjüngten Maßstabes nicht auf ein einziges Meßtischblatt verzeichnet werden kann; so ist es nothwendig durch Besichtigung derselben (wenn man nicht etwa schon mit einer andern Karte derselben versehen ist) sich eine so viel als möglich genaue Kenntniß davon zu verschaffen. Die Arbeit erhält dadurch folgende Vortheile.

1) Daß man den schicksamsten Platz wird bestimmen können, auf welchem die zu messende Grund-Linie abzustecken ist.

2) Wenn ein Meßtischblatt groß genug ist, um die ganze Gegend nach dem angenommenen verjüngten Maßstabe darauf zu bringen; so wird man gleich bey der ersten Stellung des Meßtisches durch Hülfe eines nur etwas geübten Augenmaßes das Blatt so zu orientiren, und den ersten Standpunct in einer solchen Stelle darauf anzunehmen wissen, daß alle Theile der ganzen Gegend sicher auf das Meßtischblatt und nicht etwa noch über dasselbe fallen.

3) Bey der Aufnahme einer größeren Gegend, wozu mehrere Tischblätter erfordert werden, wird man sich schon vor der Arbeit einen ziemlich richtigen Entwurf machen können, in welcher Ordnung und Lage man solche am schicksamsten an einander reihen und zusammenstoßen könne.

4) Wird man gleich beurtheilen können, ob die ganze Gegend mit hinreichenden fixen Puncten *) (von deren Gebrau-

*) Unter dem Nahmen Fix-Puncte oder Leitpuncte versteht man bey der Aufnahme unbewegliche Gegenstände, welche sich durch ihre hervorragende Höhe, oder durch ihr Freystehen vor anderen auszeichnen, und in der Ferne besonders von mehreren Seiten gesehen werden können. Dergleichen sind Thurmspitzen, Marterſäulen, Kreuze, einzeln stehende oder über andere hervorragende Bäume u. m. dgl. Letztere sind eben nicht die zuverlässigsten, weil man, besonders in kurzen Entfernungen beym Visiren nach denselben nicht jederzeit genau ihre Mitte treffen wird, und weil sich solche nach jeder Seite in ihrer Figur anders zeigen, daher auch leicht verwechselt werden können, und zu Irrungen Anlaß geben.

Fig. brauche und Nothwendigkeit bey der Aufnahme gleich gehandelt werden wird) versehen ist oder nicht. Im letzteren Falle muß man sich die nöthigen an den schicksamsten Oertern selbst errichten.

5) Kann man dadurch bey der Bearbeitung des Details beyläufig voraus schon wissen, wie weit man aus einem Stande arbeiten könne, und wo ein nachfolgender am schicksamsten zu nehmen sey, ohne erst jederzeit durch das Aufsuchen eines schicksamen Standpunctes viele Zeit zu verlieren.

6) Man wird mit allen Comunicationen, besonders wo Bäche oder Flüsse, Sümpfe und Moräste vorhanden sind, im voraus bekannt, damit man, um irgend wohin zu gelangen, gleich den kürzesten Weg einschlagen könne; u. m. dgl.

Die auf eine gute Recognoscirung verwendete Zeit, wären es nach der Größe der Gegend auch mehrere Tage, wird durch die zweckmäßige Anordnung, und durch die daraus entstehende Leichtigkeit der ganzen Arbeit reichlich ersetzet.

Die Absicht, in welcher eine Gegend aufgenommen wird, bestimmet die Größe des verjüngten Maßstabes, nach welchem aufgenommen werden soll.

Entweder geschieht die Aufnahme zum ökonomischen oder zum militärischen Gebrauche.

Im ersteren Falle gibt es auch noch verschiedene untergetheilte Endzwecke, wavon einer eine genauere Aufnahme des Details der ganzen Gegend und jedes darin vorkommenden einzelnen Gegenstandes erfordert, als der andere; mithin kann keine allgemein angenommene Größe des verjüngten Maßstabes statt finden. Doch muß in jedem Falle derselbe

Wenn man wegen Mangel der fixen Puncte in einer Gegend sich selbst einige derselben errichten muß; so geschieht solches, wenn man lange gerade Stangen nimmt, an deren oberen dünneren Enden man Strohbündel, oder sonstige Merkmahle anbindet, und solche, in den angemessenen Puncten besonders auf Anhöhen vertical aufrichtet, und in dieser Richtung fest stellet. Man kann auch derley Stangen, damit sie höher hervor ragen, und um Bäumen größere Bestimmtheit zu geben, auf diese anbinden und über die Wipfel derselben hervorragend machen.

selbe immer noch in einer ansehnlichen Größe angenommen Fig.
werden, um auch Kleinigkeiten, welche in Beziehung auf den
Endzweck nur von einigem Belage sind, gehörig ausdrucken
zu können.

In der militärischen Aufnahme bemerket man nicht das ganze Detail aller einzelnen Gegenstände, sondern man muß nur besonders auf diejenigen sein vorzügliches Augenmerk richten, welche eine Beziehung auf den militärischen Gebrauch haben, als nähmlich zu den Märschen und Bewegungen, zu den Stellungen und Dislocationen einer Armee u. d. gl. m. Hierzu ist kein so großer Maßstab mehr nothwendig. Bey uns ist es meistens üblich in der militärischen Aufnahme zwey natürliche Wiener-Zoll, manchmahl auch nur Einen für die Länge von tausend Schritten oder 400 Klaftern anzunehmen. In dem ersten Falle sagt man die Gegend ist nach dem ganzen, im zweyten aber die Gegend ist nach dem halben militärischen Maßstabe aufgenommen. Es wäre zu wünschen, daß für die militärische Aufnahme allenthalben eine gleiche Größe zur Bestimmung des Maßstabes angenommen würde, weil diese Gleichförmigkeit den Gebrauch der Karten sehr erleichtern, und manchen anderen Nutzen verschaffen könnte.

II. Das geometrische Trianguliren, nähmlich das Aufnehmen der Haupt- oder Fix-Puncte der ganzen Strecke.

Sobald man nun die Aufnahme mit dem Meßtische anfängt, so ist das Erste dafür zu sorgen, daß man ein Netz von Dreyecken durch eine richtige Bestimmung der Lage mehrerer Fix-Puncte auf das ganze Tischblatt bringe, oder daß man das geometrische Trianguliren vornehme, bevor man sich noch in das Detail einläßt. Zu diesem Endzwecke wird die Grund-Linie AB, von einer der ganzen Aufnahme angemessenen Länge, abgestecket, und mit der größten 207.
Aufmerksamkeit und Genauigkeit abgemessen, endlich sowohl in dem einem Endpuncte B (Tab. XVI. Fig. 207.), als auch in der Mitte C derselben ein Fähnchen eingestecket. Ueber den andern Endpunct A stellet man den Meßtisch,

gibt

Fig. 207. gibt dem Tischblatte, nachdem es horizontal gestellet ist, nach dem Augenmaße die erforderliche Orientirung, und stecket eine Anschlagnadel auf diejenige Stelle, wo auf dem Meßtischblatte der Punct A sich befindet, über welchen man sich gestellet hat. Nun legt man das, entweder mit ordinären Absehen, oder noch besser mit einem Fernrohre versehene Visir-Lineal an die Nadel, visiret auf die an der Grund-Linie aufgestellten Fähnchen, und zieht sodann die Reißbley-Linie AB längst dem ganzen Lineale. Ferner visiret man auf alle von diesem Standpuncte aus sichtbaren fixen Puncte a, b, c, d, e, bemerket die gezogenen Visir-Linien mit Buchstaben oder Zeichen, und hält darüber ein eigenes Vormerkungs-Protocoll. Endlich trägt man das für die Grund-Linie ausgemessene Längenmaß nach dem verjüngten Maßstabe auf die auf dem Meßtischblatte gezogene zugehörige Linie AB, und bemerke zugleich auch den Punct C in der Mitte derselben. Um diese bereits aus A gezogenen Visir-Linien zu durchschneiden, dadurch die Lage der anvisirten Fixpuncte zu bestimmen und andere anvisiren zu können, ferner um sich zugleich wegen der Richtigkeit sowohl in Hinsicht auf das Messen, als auch auf das Auftragen der Grund-Linie nach dem verjüngten Maßstabe sicher zu stellen, wählet man einen zweyten Standpunct D in einer solchen Lage gegen die Grund-Linie, daß die zwey aus den Endpuncten derselben gegen diesen Punct gezogenen Linien AD und BD sich nicht unter einem gar zu spitzigen Winkel, nicht viel unter 60 Grad, durchschneiden. In einem so gewählten Puncte D läßt man nun ein Fähnchen aufstellen. Nachdem man vorher noch aus dem ersten Standpuncte A das in dem zweyten aufgesteckte Fähnchen D anvisiret, und die Bley-Linie AD nach der ganzen Länge des Lineals gezogen hat; so begibt man sich mit dem Meßtische auf den zweyten Standpunct D. In dem Puncte A wird ein Fähnchen eingestecket, mithin befinden sich jetzt drey Fähnchen auf der Grund-Linie. *)

Nun

*) Da die von einem gegen den anderen Standpunct gezogenen Visir-Linien zur ferneren Orientirung des Meßtischblattes gebrauchet

Nun stellet man den Meßtisch über den zweyten Standpunct D, und zwar so, daß wenn man demselben schon die beyläufige Orientirung mit freyem Auge nach der aus dem ersten Standpuncte hierher gezogenen Visir-Linie gibt, diese genau über den auf der Erde bemerkten Punct zu liegen komme. Dem Meßtisch wird sodann seine möglichst richtige Orientirung durch das Zurück-Visiren gegeben, und sodann derselbe ganz fest gestellet. Hierauf nimmt man die Anschlagnadel aus dem Puncte A heraus, und stecket solche in das zweyte Ende der Grund-Linie B ein, legt das Visir-Lineal an die Nadel an, und visiret nach B, ziehet die Reißbley-Linie von B rückwärts gegen D, welche AD durchschneidet. Durch dieses Verfahren, welches man das Rückwärtseinschneiden nennet, wird die Lage des Punctes D auf dem Meßtische bestimmet. Um sich zu überzeugen, daß man in dem vorgehabten Verfahren richtig vorgegangen, daß die Grund-Linie sowohl richtig gemessen, als auch richtig aufgetragen sey, stecket man die Nadel in den Punct C, und visiret abermahls nach diesem Fähnchen. Hat man allenthalben richtig gearbeitet, so muß die dadurch entstehende Visir-Linie genau durch den bereits bestimmten Durchschnittspunct D gehen. Fig. 207.

Da der Punct D vor diesem Verfahren noch nicht auf dem Meßtische sich befindet und dieser bloß durch die Visir-Linie AD seine Orientirung erhält; so ist es keineswegs nöthig, daß man sich mit dem Meßtische über denjenigen Ort stelle, wo das Fähnchen in D errichtet war. Man kann sich in jedem anderen Puncte entweder auf der Linie AD zwischen A und D, oder auf der Verlängerung von AD aufstellen, und das eben beschriebene Verfahren, das Rückwärtseinschneiden vornehmen. Um in diesem Falle den auf dem Meßtische bestimmten Punct auch auf der Erdfläche anzugeben, damit man daselbst ein Fähnchen errichten oder die-

chet werden; so ist es höchst nöthig, daß man bey Ziehung der Bley-Linie die Schneide des scharf gespitzten Reißbleyes gleichförmig an die Kante anhalte, und die Linie so lange ziehe, als das Lineal oder das Tischblatt es zuläßt, um bey der vorzunehmenden Richtung das Visir-Lineal mit voller Sicherheit wieder anlegen zu können.

Fig. 207. diesen Punct mittelst eines eingeschlagenen Pflockes bezeichnen könne; so bedienet man sich des Senkels oder eines Steinchens, wie bereits §. 587. erwähnet worden ist. Nachdem man nun den Punct D auf dem Meßtischblatte bestimmet hat, stecket man die Nadel in denselben ein und visiret abermahl auf alle daselbst sichtbare fixe Puncte b, c, d, f, g, h, wovon b, c und d durch das Durchschneiden der aus D auf dieselben gezogenen Visir-Linien bereits ihre bestimmte Stelle auf dem Meßtische erhalten haben.

Um auch die Puncte f, g, und h zu bestimmen, wähle man sich in E einen neuen Standpunct, visire solchen aus D zuvor an, und begebe sich in E, nach dem man in D ein Fähnchen hat aufrichten lassen. Hier wird der Meßtisch wieder, wie zuvor gesagt worden ist, durch das Zurück-Visiren von E nach D gestellet oder orientiret. Dann schneidet man sich rückwärts ein, wozu der bereits bestimmte fixe Punct b dienet, und die Stelle des beym vorigen Standorte D gebrauchten Punctes B vertritt. *) Um die Arbeit sicher fortzusetzen, darf man bey jedem Rückwärtseinschneiden überhaupt, besonders aber bey dem Rückwärtseinschneiden auf einen Standpunct, aus welchem wieder andere fixe Puncte bestimmet werden sollen, mit einem einfachen Durchschitte der Linien DE und bE sich nicht begnügen; sondern man muß noch wenigstens einen zweyten fixen Punct c sehen können, um durch Einsteckung der Nadel in denselben und durch das Zurück-Visiren sich zu überzeugen, ob auch diese gezogene Visir-Linie genau durch den Durchschnittspunct E gehe. Sind noch mehrere bereits bestimmte fixe Puncte sichtbar; so visire man auch noch aus dem bestimmten Standpuncte E auf dieselben. Treffen alle Visir-Linien auf die gleichnahmigen fixen Puncte der Erdfläche ein, so ist man von der Richtigkeit seiner Arbeit überzeugt; und man durchschneidet nun auch, f, g und h.

Gleich

*) Man muß bey der Auswahl sowohl des neuen Standortes, als auch des fixen Punctes, woher man sich rückwärts einschneiden will, besonders bedacht seyn, daß die durchschneidenden Linien nicht zu schief, nicht beträchtlich unter 60°, aufeinander treffen.

Gleich anfänglich, als man noch in A mit dem Meß- Fig.
tische gestanden, war es bekannt, daß a und e nicht aus D 207.
sichtbar, mithin Aa und Ae nicht aus diesem Puncte D durchschnitten werden können. Aus dieser Ursache hat man auch F für einen Standort gewählet, und denselben schon aus A anvisiret. Nachdem nun die Arbeit auf der einen Seite vollendet ist; so begibt man sich mit dem Tische nach F, orientiret ihn nach der Visir-Linie AF und schneidet sich von d rückwärts ein. Zur Berichtigung dienet der Punct b. Von hier aus, nähmlich von F werden nun endlich auch a und e durchschnitten, und bestimmet werden. Sobald dieses geschehen ist, so ist das Netz für die auf ein Meßtischblatt zu verzeichnende Gegend fertig.

Die Bestimmung der Standpuncte durch das Rückwärtseinschneiden gewähret so viele Vortheile, daß solche allenthalben von den geschicktesten Geometern als die vorzüglichste Art anerkannt und angenommen ist. Man erhält zwar auch die Lage eines jeden neuen Standpunctes, wenn man die Entfernung desselben vom gegenwärtigen Standpuncte ausmißt, und dieses Maß nach dem zum Grunde gelegten verjüngten Maßstabe gehörig aufträgt. Aber es ist leicht einzusehen, daß diese Art mit dem so vielfältigen Messen den meisten Abirrungen ausgesetzt, und nebst dem auch noch sonst mit vielen Beschwerlichkeiten verbunden ist. Bey dem Rückwärtseinschneiden hingegen hat man nur eine einzige Linie, nähmlich die Grund-Linie zu messen, für welche man eine zum Messen schicksame Lage auswählen, und hierbey alle nur mögliche Sorgfalt anwenden kann. Man kann nach jeder Richtung und in jeder Gegend, wo man anders freye Aussicht hat, weitere Standpuncte wählen, ohne daß dazwischen liegende Hindernisse als Flüsse, Moräste u. m. d. gl. davon abhalten können. Man überzeuget sich in jedem neu gewählten Standpuncte von der Richtigkeit seiner Arbeit; es kann kein wesentlicher Fehler einschleichen, den man nicht gleich bemerkte, daher auch keiner sich der ganzen Arbeit mittheilen kann, welches bey der anderen Art der Fall nicht ist.

Fig. III. Das Figuriren, und Aufnehmen des Details.

Hat man nun das Netz für die aufzunehmende Gegend auf das Meßtischblatt vollständig und richtig gebracht; so kommt es darauf an auch das Detail des ganzen Terrains so hinein zu zeichnen, daß eben auch alle darin vorkommenden Gegenstände in ihrer verhältnißmäßigen Größe und Lage richtig erscheinen. Obwohl es nach verfertigtem Netze in Hinsicht auf die Richtigkeit gleich viel ist, von welchem Orte aus man diese Arbeit beginnet; so gibt es doch Gegenden, bey welchen durch eine geschickte Auswahl des Anfanges die fernere Arbeit wesentlich erleichtert wird. Regeln lassen sich hierzu keine geben, nur eine durch mehreres Aufnehmen erlangte Erfahrung geleitet durch reife Ueberlegung wird dem Geometer diese Uebersicht in der Arbeit verschaffen. Der richtigste Anfang geschieht aus einem bereits bey Verfertigung des Netzes bestimmten Standpuncte.

Nachdem nun auf einem solchen Standpuncte der Meßtisch richtig gestellet und orientiret ist; so wird das so genannte Figuriren vorgenommen. Es geht nähmlich der Geometer mit einem vorläufig abgerichteten Gehülfen, welcher eine hinlängliche Menge nummerirter Pflöcke (kleiner Pfähle) mit sich trägt, die ganze Gegend so weit herum, als der Gehülfe in der Folge von dem gewählten Standpuncte aus noch füglich gesehen werden kann, läßt in dem Puncte einer jeden besonderen Veränderung des Terrains einen nummerirten Pflock, in der ordentlichen Reihe der Zahlen, einschlagen, zeichnet sich in seine Schreibtafel von Pflocke zu Pflocke mit Beysetzung der gleichnahmigen Zahlen die ganze Gegend mit den in der Situations-Zeichnung für jeden Gegenstand gewählten Zeichen auf.

Die Absicht, wozu die Aufnahme geschieht, und die hierzu gewählte Größe des verjüngten Maßstabes, gibt dem Geometer an die Hand, wie weit derselbe mehr oder weniger Puncte anzunehmen, und sich in das Detail einzulassen habe.

Er kehret sodann wieder zu seinem Meßtische zurück, Fig.
steht noch einmahl nach, ob derselbe nicht etwa verrucket sey, läßt seinen Gehülfen eine Meßfahne über einen jeden nnmmerirten eingeschlagenen Pflock nach der Ordnung der Zahlen aufstellen, visiret die Fahne von dem Meßtische an, und bezeichnet die Visir-Linie mit der Nummer des Pflockes. Diese Visir-Linien werden ganz kurz nur in jener Gegend gezogen, wo man beyläufig nach dem Augenmaße beurtheilet, daß der beabsichtigte Punct auf das Tischblatt hinfallen dürfte. Denn es ist höchst überflüssig solche aus dem Standpuncte aus zu ziehen und dadurch gleichsam so viele Sonnen als Standpuncte auf dem Papiere zu bilden. Es wird durch das Verreiben des vielen Reißbleyes nur das Papier schmutzig gemacht, und man geräth der so vielen langen Linien wegen leicht in Verwirrung. Um auch sicher zu seyn, wenn mehrere Linien nahe an einander fallen, zu welcher jede aufgeschriebene Nummer eigentlich gehöre; so stellet man dieselbe bestmöglichst auf die dazu gehörige Linie, und bezeichnet solche mittelst eines hinter der Nummer genau auf die Linie gemachten Tüpfchens mit dem Reißbleye, oder man schließt die Nummer mittelst eines Halbkreises an die dazu gehörige Linie ein. Damit der Gehülfe sich nicht eher mit der Meßfahne von einem Puncte entferne, als die Visir-Linie gezogen worden ist; so müssen zuvor bestimmte Zeichen zum Abdanken (Abfertigen) verabredet, und dieselben während der ganzen Arbeit unabgeändert beybehalten werden. Da es dessen ungeachtet sich leicht eräugnen kann, daß bey großen Entfernungen etwa beym Meßtische oder beym Aufstellen der Meßfahne ein Verstoß geschehe; so verabredet man ein besonderes Zeichen, welches der Gehülfe gibt, wenn er auf einem Fünfer und Zehner abgedanket ist, wodurch der Geometer am Meßtische sich überzeugen kann, ob er mit dem Gehülfen eben dieselbe Nummer hat oder nicht. Wird nun dem Gehülfen das nähmliche verabredete Zeichen vom Meßtische her erwiedert, so gehet er weiter fort; geschieht es nicht, so ist es ein Zeichen, daß bis zu dem vorletzten Fünfer ein Fehler unterlaufen ist. Daher

Fig. her gehet der Gehülfe auf diesen zurück und stellet sich wiederhohlt über die letzten fünf Nummern auf, wo der Geometer zugleich am Meßtische durch wiederhohltes Anvisiren seine gezogene Linien und Nummern revidiret, und alles wieder in Ordnung bringet. Durch dieses so einfache practische Hülfsmittel gewinnt man Sicherheit, und öfters auch sehr viel an der Zeit. Denn bey dessen Unterlassung kann es sich fügen, daß hundert und mehrere Puncte beym Figuriren angenommen werden, und am Ende die Nummer der letzten Visir-Linie nicht mit der Nummer des zuletzt eingeschlagenen Pflockes überein stimmet; man weiß nun nicht, wo eigentlich der Fehler eingeschlichen sey. Daher muß der Gehülfe neuerdings mit der Meßfahne von Nummer Eins über alle Pflöcke sich aufstellen, und der Geometer alle Visir-Linien durch neues Visiren nachsehen. Gleicher Maßen ist es dem Gehülfen gut einzubinden, daß er im Gehen jederzeit die Fahne so trage, daß die Leinwand derselben an der Erde hinschleife, und daß er solche über keinen Pflock eher aufstelle, als bis er die Nummer desselben angesehen, und sich überzeuget hat, daß er in der richtigen Ordnung ist *).

Es handelt sich nun um einen zweyten Standort zum Durchschneiden der vom ersteren nach allen Puncten gezogenen Visir-Linien. Es ist nicht nothwendig, daß dieß von einem bereits bey Verfertigung des Netzes bestimmten Standpuncte geschehe. Denn diese würden zur Aufnahme des Details bey weitem nicht hinreichen, und man wird noch viele Zwischenstände nehmen müssen. Hierbey treten die bereits bestimmten fixen Puncte in ihre vortheilhafte Wirkung. Man ärntet nun reichlich nebst der stäten Sicherheit auch den Ersatz der auf die Verfertigung des Netzes verwendeten Zeit ein. Schon beym Figuriren wird der Geometer bemerken, an welchem Orte er am schicksamsten seinen zweyten Standort annehmen könne; nur muß er sich dabey umsehen,

daß

*) Wer nicht selbst viel aufgenommen hat, wird derley Bemerkungen für geringfügig halten; die Erfahrung aber lehret, daß man auf Ordnung, Pünctlichkeit und Vorsicht äußerst halten muß, wenn man sowohl geschwind als richtig arbeiten will.

daß er zum Rückwärtseinschneiden die nöthigen fixen Puncte Fig.
an Handen habe. Auf einem so gewählten weiter zu nehmenden Standpuncte läßt er ein Fähnchen aufstellen, und visiret nun solches von seinem ersten Standpuncte an *).

Nachdem solches geschehen, und in dem ersten Standpuncte ein Fähnchen errichtet worden ist, begibt er sich auf den neuen Standort. Hier ist das Verfahren zur Stellung und Richtung des Meßtisches, dann zur Bestimmung des Standpunctes auf dem Meßtischblatte eben dasselbe, wie solches bey Verfertigung des Netzes bereits beschrieben worden ist. Ist nun die Nadel in den neu bestimmten Standpunct eingestecket, so stellet sich der Gehülfe mit der Meßfahne wieder über einen jeden mit einem nummerirten Pflocke bezeichneten Punct. Dieß kann nun entweder nach eben derselben Ordnung wie zuvor, oder auch umgekehrt, jedoch mit Verabredung und mit Behutsamkeit im Aufstellen geschehen. Der Geometer am Meßtische durchschneidet alle zuvor gezogenen Visir-Linien, und sticht mit einer Nadel solche gleich durch, wodurch nun ein jeder mit einem Pflocke bezeichnete Punct auf dem Meßtische bestimmet wird. Sollten die zwey Visir-Linien eines Punctes zu schief auf einander treffen, mithin ihr Durchschnittspunct zweifelhaft bleiben; so mißt man die Entfernung eines anderen sicher bestimmten nahe liegenden Punctes von dem zweifelhaften entweder mittelst der Schritte (fünf Schritte auf zwey Wiener-Klafter) oder mit der Meßkette, oder auch mit dem Klafterstabe ab, nimmt diese Entfernung mit dem Zirkel auf dem verjüngten Maßstabe, setzet den einen Zirkelspitz in den ersteren Punct ein, und durchschneidet die Visir-Linie des zweyten Punctes, wodurch solcher auch seine richtige Bestimmung erhält. In der Nähe des Meßtisches befindliche Puncte können auch durch das Ausmessen und Auftragen ihrer Entfernungen, wie auch der senkrechten Abstände derselben von einer schon bekannten Linie bestimmet werden. So wie dem Gehülfen das Zeichen zum Abgehen von einem Puncte gegeben wird; ziehet der-

sel-

*) Bevor ein neuer Standort anvisiret wird, ist es immer gut der Stellung des Meßtisches wieder nachzusehen, ob solche nicht etwa während der bereits vorgehabten Arbeit verrucket worden sey.

Fig. selbe den daselbst eingeschlagenen Pflock wieder aus, und sammelt auf diese Art alle ein.

Sind nun alle diese Puncte bestimmet; so kann aus diesem zweyten Standorte das weitere Figuriren vorgenommen werden; und man suchet wieder einen neuen Standort um die hier anvisirten Puncte zu durchschneiden. Auf diese Art wird die Arbeit fortgesetzet, und die ganze Gegend aufgenommen. Befinden sich bey einem Meßtische zwey Geometer, welche in der Situations-Zeichnung hinlänglich geübt sind, so wird die Arbeit sehr befördert, wenn der eine bloß die Operation bey dem Meßtische, und der andere das Figuriren besorget. Ist der Geometer am Meßtische gut geübet, so kann in eben derselben Zeit auf einer Seite durchschnitten, und auf der anderen figuriret werden; nur muß für jede Parthey ein besonderes Zeichen zum Abdanken angenommen werden.

Das Einzeichnen des Terrains kann gleich auf dem Meßtischblatte nach dem Durchschneiden vorgenommen werden; gewöhnlich aber geschieht solches unter der Ruhezeit, da nicht auf dem Felde gearbeitet wird. Es ist immer nöthig, daß solches nicht zu lange verschoben werde, weil sonst manche mit Reißbley bezeichnete Nummer auf dem Papiere des Meßtischblattes verwischet, und das Ganze zweifelhaft wird; auch das Bild des Terrains dem Figuranten entfällt, daß er sonst mit Beyhülfe der in seiner Schreibtafel verfertigten Zeichnung auf dem Papiere vollkommener darstellen kann. Er nimmt nähmlich seine Schreibtafel in die Hand, zeichnet nach den in derselben und auf dem Tischblatte gleichnahmig nummerirten Puncten die Situation auf das Tischblatt zu erst mit Reißbley vollkommen auf, und arbeitet solche dann auch gleich mit Tusche aus.

Zu einer vollkommenen Richtigkeit in der Arbeit gehöret auch, daß das Papier auf dem Meßtischblatte ganz flach und eben aufliget, daher, wenn solches nur wie gewöhnlich an dem Rande befestiget wird, und bey feuchter Luft sich innerhalb aufhebt und Blattern machet, die Arbeit unterbleiben muß. Will man nicht so viele Zeit verlieren,

(besonders im Frühjahre und Herbste, da die Luft frühe und Abends meistens feucht ist); so kann man sich auch gegen das Aufsteigen des Papiers auf folgende Art verwahren. Man nimmt das Weiße oder Klare von einem Ey, und schlägt davon einen Schaum auf einem Teller, feuchtet den zum Aufspannen bestimmten Bogen Papier auf derjenigen Seite, welche auf das Tischbrett zu liegen kommt, mit einem naßen Schwamme mäßig an, und bestreichet dann eben dieselbe Seite allenthalben gut mit dem Eyerschaume. Man leget das Papier auf das Meßtischblatt, und streichet solches mit einem weiß leinenen Tuche gut aus, damit es sich auf und an das Holz durchaus glatt anleget. Endlich werden die Ränder mit einem dünnen Schreinerleim oder mit Buchbinderpappe befestiget. Ein auf diese Art aufgespanntes Papier hebt sich selbst in der feuchtesten Luft nicht auf, es ziehet sich beym Abschneiden vom Tischblatte nicht ein, und ist dessen ungeachtet leicht und ohne Verletzung herab zu nehmen. Fig.

IV. Das Zusammenstoßen der angränzenden Sectionen bey einer über mehrere Meßtischblätter ausgedehnten Aufnahme.

Ist die Gegend von einem solchen Umfange, daß sie nach dem, der Absicht gemäß, angenommenen verjüngten Maßstabe nicht auf ein einziges Meßtischblatt, gebracht werden kann, daß man also mehrere Meßtischblätter dazu nöthig hat; so kommt es weiters darauf an, auf welche Art man die Zusammenfügung mehrerer Blätter am sichersten und schicksamsten bewirken könne. Wenn man nur einen Meßtisch hat, muß man wenigstens mit zwey Tischblättern dazu versehen seyn, mit welchen die Aufnahme nach und nach bewirkt werden kann. Hat man mehrere Meßtische, und auch die hierzu erforderlichen Geometer; so kann mit allen Meßtischen zugleich das Detail gearbeitet, und dadurch die Aufnahme sehr beschleuniget werden.

Hier ist zuerst zu beobachten, daß man sich die Größe eines Rechteckes für jedes auf die Meßtischblätter aufgespannte weiße Papier bestimmet. Man kann etwa zur Grund-

Fig. Linie desselben 24 und zur Höhe 16 Zoll annehmen, welches Rechteck man sodann eine Section nennet *).

Um nun das Netz für sämmtliche Sectionen zu verfertigen, welche zu der Aufnahme einer bestimmten größeren Gegend erforderlich seyn dürften, kann man einen noch kleineren Maßstab annehmen, als derjenige ist, nach welchem aufgenommen werden soll; und zwar einen Maßstab von einer solchen Größe, daß man das Netz der ganzen Gegend auf ein einziges Meßtischblatt bringen kann. Man theilet das Papier dieses Tischblattes in kleine Rechtecke (Sectionen ein), deren Seiten mit denjenigen, die zur wirklichen Aufnahme bestimmt sind, in eben dem Verhältnisse stehen, in welchem der zur Verfertigung des Netzes angenommene kleinere Maßstab zu dem zur Aufnahme bestimmten größeren Maßstabe steht. Um diese Eintheilung schicksam zu treffen, wird uns die vorläufig gemachte Recognoscirung am besten leiten können. Hierauf wird nun das Netz der ganzen Gegend nach vorbeschriebener Art auf diesem Tischblatte verfertiget. Bey Verfertigung desselben hat man darauf zu sehen, daß in eine jede derley kleine Section wenigstens ein Standpunct, und zwey aus demselben sichtbare fixe Puncte gebracht werden.

Wenn das ganze Netz fertig ist, so wird man gleich daraus ersehen, wie viele Sectionen man eigentlich zur Aufnahme der vorgegebenen Gegend nöthig hat. Man kann bey Verfertigung dieses Netzes auch gleich den Hauptumfang der ganzen Gegend, und die darin vorkommenden vorzüglicheren Gegenstände des Details aufnehmen. Dadurch erhält man zugleich das Gerippe (Esquelette) der ganzen Gegend.

Nun werden von diesem Tischblatte die in jeder kleinen Section befindlichen Stand- und Fix-Puncte in die grossen

*) Die Verzeichnung dieser Rechtecke muß mit der größtmöglichen Genauigkeit sowohl in Hinsicht auf die Längenmaße, als auch auf die senkrechte Stellung der Einschließungs-Linien gemacht werden. Die im §. 387. II. bemerkte Verzeichnung eines Rechteckes kann hier mit Nutzen angewendet werden.

sen Sectionen nach dem angenommenen Verhältnisse mit der größten Genauigkeit übertragen. Gleicher Maßen kann die Orientirung der Magnetnadel übertragen werden. Soll nun die Arbeit des Details vorgenommen werden; so stellet sich ein jeder Geometer mit dem ihm auf seiner Section übergebenen Standpuncte über den gleichnahmigen auf der Erdfläche; und orientiret den Meßtisch nach einem ebenfalls übertragenen fixen Puncte, indem er das Visir-Lineal in den Stand- und in den Fix-Punct anleget, das Tischblatt so lange drehet, bis die Visir-Linie auf den letzteren genau eintrifft. Man überzeugt sich von der Richtigkeit der Orientirung, wenn man auch den zweyten und etwa noch die übrigen fixen Puncte aus dem Standpuncte anvisiret, dann nachsieht, ob die Visir-Linien genau durch die gleichnahmigen Puncte auf dem Meßtische gehen. Hierzu kann man auch noch die Magnetnadel zur Hülfe nehmen. Man kann nun noch mehrere fixe Puncte, und zwar so viele bestimmen, als deren für eine solche Section nöthig seyn dürften. Sodann wird die Bearbeitung des Details bis zur gänzlichen Ausfüllung einer solchen Section bewirket. Es gehöret mit zur Vorsicht der Arbeit, daß man das Papier, worauf das ganze Netz der Gegend sich befindet, nicht eher von dem Meßtischblatte abschneidet, bis nicht die letzte Section für das Detail bereits ihre Puncte von demselben erhalten hat. Fig.

Dieses Verfahren (das Zusammenstoßen der angränzenden Sectionen vermittelst des verjüngten Triangulirens) kann statt finden, wenn die aufzunehmende Gegend nicht etwa gar zu weit ausgedehnt, und der zur Aufnahme bestimmte verjüngte Maßstab nicht zu groß ist. Denn ist dieses der Fall; so wird der zur Verfertigung des Netzes anzunehmende Maßstab nach Verhältniß des ersteren für das Detail bestimmten, zu klein ausfallen, und das Netz auf den großen Sectionen zu viel vergrößert werden müssen, wobey mit aller angewandten Aufmerksamkeit, wie es jedem Geometer bekannt ist, nicht immer eine vollkommene Genauigkeit und Richtigkeit erzielet werden kann.

Fig. 208. Man kann die Aufnahme und Zusammenstoßung der Sectionen auch auf folgende Art bewirken, ohne daß vorher das Netz der ganzen Gegend nach einem kleineren Maßstabe auf ein einziges Tischblatt aufgenommen wird.

Nachdem man die Größe für die Sectionen zuvor bestimmet, und die Rechtecke auf die zwey vorhandenen Tischblätter verzeichnet hat; so gehet der Geometer mit einem derselben KL in diejenige Gegend, wo er beym Recognosciren den schicksamsten Platz für die Stand-Linie gefunden hat, welche er abstecket und ausmessen läßt. Er stellet sich nun mit dem Meßtische über das eine Ende derselben, bestimmet sowohl diesen Punct auf dem Meßtische, als auch die Orientirung desselben, wie er nach der erhaltenen Kenntniß der ganzen Gegend glaubt, daß die Lage und Aneinanderreihung der Sectionen am füglichsten und schicksamsten ausfallen dürfte.

Er verfertiget sich nach kl. das Netz für diese Section und suchet dann in der Nähe derjenigen Sections-Gränzlinie, an welche die folgende angestoffen werden soll, einige fixe Puncte (Tab. XVI. Fig. 208) E, F, G, H zu bestimmen, welche entweder dieß- oder jenseits der Sections-Linie, jedoch noch auf das Meßtischblatt fallen. Zu diesem Ende wird auch ein Standpunct I in derselben Gegend angenommen und bestimmet, welcher desto zweckdienlicher ist, wenn er über die Sections-Linie hinaus liegt. Aus diesem Standpuncte ziehe man gegen einen der vorbesagten Fix-Puncte E die Visir-Linie IE von einer solchen Länge, als es das Lineal und Tischblatt zulassen.

Man nehme sodann das zweyte Tischblatt kl zur Hand, und übertrage die auf dem ersten Tischblatte gezogene Visir-Linie IE, und die nahe an der Sections-Gränzlinie AD befindlichen Fix-Puncte E, F, G, H, nebst dem Standpuncte I in eben derselben Lage, die sie gegen die Sections-Seite AD haben, auf das zweyte Tischblatt kl gegen diejenige Sections-Gränzlinie ad, vermittelst welcher diese folgende Section db mit der vorigen CA vereiniget werden soll. Man beschreibe zu dieser Absicht vermittelst des Stangenzirkels aus dem Puncte A mit der Eröffnung AI einen Bogen IM,

bis

bis die Sections Linie in dem Puncte M durchschnitten wird. Mit eben dieser Eröffnung des Zirkels beschreibe man auch auf kl aus dem Puncte a einen Bogen mi von der Sections-Linie einwärts von unbestimmter Länge, nehme die Sehne MI genau, setze den einen Zirkelspitz in m ein, und durchschneide den Bogen in i; so erhält man die Lage des Standpunctes i. Auf eben dieselbe Art verfahre man bey der Uebertragung der übrigen nahe an der Sections-Linie liegenden fixen Puncte E, F, G, H. Ferner übertrage man auch zur Ueberzeugung den Durchschnittspunct N in n, und sehe zu, ob die gezogene Linie ei auch genau durch n gehe. Nachdem dieses alles berichtiget ist; so nehme man das Tischblatt kl auf das Stativ, stelle sich mit dem Puncte i über den gleichnahmigen auf der Erdfläche, und orientire den Meßtisch nach der Linie ei, wie zuvor gezeiget worden ist. Endlich stecket man die Nadel in i, und überzeuget sich von der richtigen Stellung durch das Anvisiren der Puncte f, g, h. Auch hier kann man, so wie bey dem ersten Verfahren gesagt worden ist, die Orientirung der Magnetnadel übertragen, und dieselbe durch das Aufsetzen und Einspielen der Nadel prüfen. Treffen die Visir-Linien sämmtlich in den gleichnahmigen Puncten ein; so kann man nun die weitere Verfertigung des Netzes für die Section ac fortsetzen. Man hat hier nicht mehr nöthig eine Linie auszumessen; sondern man kann aus diesem ersten Standpuncte i einen weiter folgenden und mehrere neue Fix-Puncte anvisiren, sodann auf dem neu gewählten Standpuncte mittelst der übertragenen Fix-Puncte sich rückwärts einschneiden, und von da aus die neuen Visir-Linien durchschneiden; worauf sodann die Arbeit für dieses Tischblatt, wie bereits bekannt ist, fortgesetzet wird. Fig. 208.

So wie man an die Linie AD die Section ac angestossen hat; eben so kann man an alle übrigen Sections-Linien sowohl von CA als von ac noch andere Sectionen anstossen und zusammen reihen. Sind mehrere Geometer vorhanden; so arbeitet einer gleich, so bald alle die Anstoßungen an eine Section in Richtigkeit gebracht sind, an dem

Fig. Detail derselben. Auf diese Art wird bis zur Beendigung der ganzen Arbeit fortgefahren.

Durch das Verzeichnen gleich großer Sectionen auf die Tischblätter, und durch die Zusammenstoßung derselben auf oben beschriebene beyde Arten erhält man die wesentlichen Vortheile, daß erstens bey der Bestimmung der Hauptpuncte, bey der geometrischen Triangulirung, in allen Sectionen nur ein einziges Maß, die gemessene Grund-Linie, zum Grunde lieget; daß zweytens bey dem Zusammenstoßen der Sectionen dieselben genau zusammenpassen müssen, wenn anders die Ausfüllung einer jeden ins besondere richtig vorgenommen worden ist; und drittens daß bey zwey Geometern, deren aufzunehmende Sectionen an einander gränzen, keine besondere Aussteckung und Uebergabe der Gränz-Linien auf dem Terrain nöthig ist, und daß doch dabey jeder derselben bestimmt weiß, was von ihm aufgenommen werden muß. Endlich viertens gewinnet die Karte ein besseres Ansehen, weil solche aus gleich großen Blättern, mit geraden, in eine Richtung fallenden Linien zusammen gesetzet wird. Das Zusammenstoßen nach einer Umfangs-Linie irgend eines Gegenstandes ist das unsicherste und schlechteste Mittel.

Anmerkungen.

1) Wenn sich der Fall ereignet, daß man die Aufnahme einer Erdstrecke in einer Gegend anfangen muß, wo das Terrain zu uneben ist, um eine Grund-Linie mit zureichender Genauigkeit messen zu können; so kann man auf folgende Art vorgehen.

Von dem Standpuncte, von welchem die Aufnahme beginnen soll, wähle man zur Grund-Linie eine angemessene Entfernung gegen einen auf dem Terrain schon vorhandenen ausgezeichneten oder aber mit einem Fähnchen ausgesteckten Punct, und zwar eine Entfernung beyläufig von der Größe und Lage, wie sie zu der Aufnahme beschaffen seyn soll, die man vor hat. Für das Längenmaß dieser gewählten Grund-Linie, ohne sie wirklich zu messen, nehme man eine nur nach dem Augenmaße abgeschätzte Zahl von Klaftern an.

Man

Man stelle sich mit dem Meßtische über den einen End- Fig.
punct der angenommenen Grund-Linie, und verfahre weiters ganz wie in II. gesagt worden ist. Endlich trage man das abgeschätzte Längenmaß auf die gegen den anderen Endpunct der angenommenen Grund-Linie gezogene Visir-Linie nach dem zur Absicht der Aufnahme erforderlichen verjüngten Maßstabe auf.

Um sich auf dem zweyten Standpuncte rückwärts einzuschneiden, hat man bey diesem Verfahren nur einen einzigen Punct. Nähmlich der Meßtisch wird nach der aus dem einen Endpuncte der Grund-Linie, worüber man sich zuerst gestellet hatte, gegen diesen zweyten Standpunct gezogenen Visir-Linie orientiret, und sodann dieser zweyte Standort aus dem zweyten Endpuncte der Grund-Linie rückwärts eingeschnitten.

In diesem zweyten Standorte wird man noch in keiner vollen Ueberzeugung seyn, ob der durch das Rückwärtseinschneiden bestimmte Standpunct und auch die aus demselben bereits durchschnittenen fixen Puncte die genaue Richtigkeit in der Bestimmung ihrer Lage haben oder nicht. Kommt man aber weiter auf den dritten Standort; so wird man daselbst sich schon von einem der bereits durchschnittenen fixen Puncte rückwärts einschneiden, und durch das Anvisiren der übrigen von der Richtigkeit der Arbeit überzeugen können. Nun kann man die Arbeit mit Verfertigung des Netzes nöthigen Falles über mehrere Sectionen fortsetzen, sodann auch die Aufnahme des Details vornehmen, jedoch ohne einiges Messen und Auftragen der Entfernungen verschiedener Puncte, sondern immer nur durch das Anvisiren, und Durchschneiden derselben.

Kommt man endlich mit einer Section in eine Gegend, wo das Terrain die genaue Messung einer Linie zuläßt; so steckt man diese aus, und bestimmt die Endpuncte derselben mittelst des Anvisirens und Durchschneidens auf dem Meßtische, und mißt sie auf der Erde genau ab. Man nehme sodann die auf dem Meßtische so bestimmte Entfernung dieser zwey Puncte, trage diese Entfernung auf eine seitwärts ge-

Fig. zogene Linie, und theile sie in so viele gleiche Theile, als man Klafter bey der Messung für die Länge der Entfernung dieser zwey Puncte auf der Erde gefunden hat. Dadurch erhält man den Maßstab für die bereits geschehene Aufnahme. Damit die Theilung dieser Linie zu Verfertigung des Maßstabes leichter geschehen könne, so messe man auf der abgesteckten Linie eine runde Zahl in Klaftern ab, und stecke in diesen bestimmten Punct das zweyte Fähnchen als in einen Fix-Punct ein.

Sollte nun eine auf diese Art aufgenommene Karte mit einer andern, nach einem andern verjüngten Maßstabe aufgenommenen, zusammen gestossen werden; so versteht sich von selbsten, daß jene erst auf diesen Maßstab vergrößert oder verkleinert werden müßte.

2) Mehrere Vortheile, welche bey dem Aufnehmen einer Gegend angewendet werden können, lassen sich nicht wohl in einem Lehrbuche deutlich angeben, weil sie von den Veränderungen des Terrains abhängen, und deßwegen eben so wie diese mannigfaltig sind. Die verschiedenen Kunstgriffe und Behelfe wird man durch fleißige und aufmerksame Uebung, durch eigenes Nachdenken, und durch eine geschickte Anwendung und Combinirung der erlernten theoretischen Gründe sich zu erwerben im Stande seyn. Man glaubt auch noch wiederhohlt anempfehlen zu müssen, daß an Pünctlichkeit und Ordnung ja nichts vernachlässiget werde, weil oft eine kleine Vernachlässigung von sehr üblen Folgen seyn, und den Verlust vieler Zeit und Arbeit verursachen kann.

3) Ein Gebäude, einen Garten, und andere derley ökonomische Gegenständen im Grundrisse, im Querdurchschnitte, und nach der äußeren Ansicht (Façade) aufzunehmen, und nach einem angenommenen verjüngten Maßstabe aufzuzeichnen, ist man im Stande, wenn man die ersten Aufgaben der practischen Meßkunst inne hat, und in der Zeichnungslehre unterrichtet ist. Eben dahin gehöret auch das Abzeichnen eines vorgelegten Körpers nach einer gewählten Ansicht, wie auch die perspectivische Vorstellung desselben aus einem angenommenen Gesichtspuncte auf einer ge-

gegebenen Ebene, und mehr dergleichen, welches hier mit Fig. Stillschweigen übergangen wird.

4) Das Ausstecken einer auf dem Meßtische nach einem festgesetzten verjüngten Maßstabe verzeichneten Figur (z. B. des Grundrisses einer Festung) nach voraus gegangener Aufstellung und Orientirung des Meßtisches, wird jeder leicht ausführen können, der sich das bisher Vorgetragene eigen gemacht hat; daher man für überflüßig hält, darüber etwas insbesondere zu sagen.

5) Schlüßlich kommt noch zu bemerken, daß für den militärischen Gebrauch im Felde der Meßtisch sammt dem Visir-Lineal, die wegen ihrer Größe und Schwere im Kriege von einzelnen Individuen nicht leicht mitgeführet werden können, bey Verfertigung des Netzes (bey dem geometrischen Trianguliren) und bey der Ausfüllung des Details einer militärisch aufzunehmenden Gegend mit zulänglicher Genauigkeit durch ein anderes sehr einfaches Meß-Instrument, durch den catoptrischen Zirkel, wird ersetzet werden können. Einen solchen catoptrischen Zirkel kann man leicht bey sich in der Rocktasche tragen, und mit demselben jeden nöthigen Visir-Winkel, ohne Beyhülfe eines Stativs beobachten, und ihn sodann auf das Papier auftragen, welches auf was immer für ein Reisbrett ohne Stativ gespannt ist.

Dergleichen catoptrische Zirkel sind zu Augsburg bey dem mathemat- und physicalischen Instrumenten-Macher Höschel, und zu Wien bey dem Hof-Opticus Hamberger, wie auch bey dem privil. Mechanikus Gerard Sattler (dermahls wohnhaft an der Maria Hülf-Kirchengasse im Luftschützen) um billige Preise zu haben.

6) Die Aufnahme ohne alle Instrumente bloß nach Schritten und nach dem Augenmaße, nachdem man sich einige Hauptpuncte aus einer vorhandenen geographischen oder topographischen Karte zum vorläufigen Netze nach dem gewählten verjüngten Maßstabe heraus genommen hat, wird nur derjenige mit einiger Zuverlässigkeit zu bewirken im Stande seyn, welcher sich im Aufnehmen mit dem Meß-

Fig. tische bereits mehrere Uebung erworben hat, und um verschiedene practische Vortheile nicht verlegen ist.

§. 599.

145. Soll die im §. 597. vorgelegte Aufgabe trigonometrisch aufgelöset, d. h. die in Fig. 145. vorgestellte Gegend durch Hülfe eines Winkelmessers aufgenommen werden; so muß man dabey auf folgende Art verfahren. Man messe eine Grund-Linie AB, und beobachte an dem einen Endpuncte derselben die Winkel HAG, GAF, FAE, EAD, DAC, CAB, und an dem anderen Endpuncte die Winkel CBD, DBE, EBA, und in E die Winkel FEG, GEH, HEA. Sodann ziehe man auf dem Papiere eine Gerade ab, trage auf dieselbe die Länge der gemessenen Grund-Linie nach einem verjüngten Maßstabe, und verzeichne an beyden Endpuncten derselben die bekannten Winkel; so sind dadurch die Puncte a, b, c, d, e bestimmet. Ferner verzeichne man in dem schon gefundenen Puncte e an der Linie ea die in E beobachteten Winkel; so sind dadurch auch die übrigen Puncte bestimmet.

Oder man berechne in den Dreyecken ACB, ADB, AEB aus der Seite AB und aus den daran liegenden Winkeln die Seiten AC, AD, AE. Ferner berechne man auch in den Dreyecken AFE, AGE, AHE aus der schon gefundenen Seite AE und aus den daran liegenden Winkeln die Seiten AF, AG, AH. Sodann verzeichne man aus einem Puncte a die in A beobachteten Winkel, und trage auf die Schenkel derselben nach einem verjüngten Maßstabe die Längen der Geraden AB, AC, AD, AE, AF, AG, AH; so wird wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke die dadurch erhaltene Figur abcdefgh der Figur auf dem Felde ähnlich seyn. Man kann auch in den Dreyecken ACB, ADB, AEB, u. s. w. alle Seiten berechnen, und sodann die Puncte c, d, e, über der angenommenen Grund-Linie ab mittelst der Durchschnitte von Kreisbögen bestimmen, wenn man aus a und b mit den gehörigen Halbmessern Kreisbogen beschreibet u. s. w. Es ist gut, wenn man alle drey Winkel eines solchen Dreyeckes beobachtet, damit man alsogleich sehen könne, ob die

Be-

Beobachtung derselben richtig vorgenommen ist. Sollte die Fig.
Summe dieser Winkel nur um etwas Weniges von 180°
entfernt seyn, so kann man den Unterschied verhältnißmäßig
vertheilen, und dann die Seiten berechnen.

Bey großen trigonometrischen Vermessungen ist es nicht rathsam die berechneten Dreyecke nach der angeführten Art mittelst des Transporteurs, oder mittelst der Durchschnitte der Seiten zu verzeichnen, weil ein jeder bey dem Auftragen begangene Fehler, so klein er auch ist, sich den übrigen Dreyecken mittheilet, und in der Folge beträchtlich werden kann. In solchen Fällen nimmt man eine Linie SN an, 146.
welche durch einen Standpunct A, und durch einen anderen Punct N gezogen ist, berechnet die darauf senkrechten Ordinanten Ee, Dd, Ff, Cc, Bb, Ii, Gg, Hh, wie auch die Abstände dieser Senkrechten von dem Puncte A oder die zugehörigen Abscissen, nähmlich Ae, Ad, Af, u. s. w. und verzeichnet mittelst dieser Ordinaten die berechnete Figur. Man ziehet nähmlich auf dem Papiere eine Gerade SN, nimmt auf derselben A für den Standpunct A an, und trägt nach einem verjüngten Maßstabe von A bis b den berechneten Abstand Ab, errichtet aus b eine Senkrechte bB, und trägt auf dieselbe die berechnete Länge Bb der Senkrechten Bb, um den Punct B zu erhalten. Eben so werden die übrigen Puncte C, D, u. s. w. bestimmet. Diese Art der Verzeichnung hat den Vortheil, daß wenn auch irgendwo bey der Bestimmung eines Punctes ein kleiner Fehler begangen wird, derselbe jederzeit nur für sich allein bleibet, und sich den übrigen Puncten nicht mittheilet. Ist man mit den gehörigen Hülfsmitteln versehen, um in dem Puncte A (nach der im §. 583. Aufgabe V. gezeigten Methode) die Richtung der Mittags-Linie genau ausstecken zu können; so nimmt man die Gerade SN in dieser Richtung an, damit dadurch die Lage des berechneten trigonometrischen Netzes in Hinsicht auf die Weltgegenden Ost, West, Süd und Nord festgesetzet werde. Auch erhält man dabey den Vortheil, daß die geographische Länge und die Breite oder Polhöhe eines jeden

durch

Fig. 146. durch die vom Puncte A gerechneten Abscissen und Ordinaten bestimmten Punctes sehr leicht gefunden werden kann, weun die geographische Länge und Breite des Punctes A bekannt ist. Denn in diesem Falle sind die Abscissen die Breitenunterschiede, und die Ordinaten sind die Längenunterschiede, zwischen dem Puncte A und dem zugehörigen Puncte. Wenn man daher beyde, nach der im §. 582. gegebenen Anleitung, in Bogenmaß verwandelt, so muß das Bogenmaß der Abscisse zu der Breite des Punctes A addiret, oder davon abgezogen werden, je nachdem die Abscisse nördlich oder südlich ist; eben so muß der aus dem Bogenmaße der Ordinate berechnete Längen-Unterschied am Pole zu der Länge des Punctes A addiret oder davon abgezogen werden, je nachdem die Ordinate östlich oder westlich liegt, um die geographische Breite und die Länge für einen jeden dazu gehörigen Punct zu erhalten. Sollte aber die Lage der Mittags-Linie nicht genau gefunden werden können; so ist es besser um allen Irrthümern auszuweichen, jede andere bestimmte Richtung für die Abscissen-Linie SN anzunehmen.

Die Ordinaten Ee, Dd, Cc, Gg, u. s. w. nebst ihren von dem Puncte A gerechneten Abscissen können aus den einmahl berechneten Seiten und Winkeln der ganzen Figur auf folgende Art gefunden werden. Man beobachtet in A den Winkel, welchen eine aus A in was immer für einem bestimmten Puncte gezogene Gerade mit AN einschließt, man beobachtet z. B. den Winkel NAB; so können in dem rechtwinkeligen Dreyecke ABb aus der Hypothenuse AB und aus dem Winkel bAB die Seiten Ab und Bb berechnet werden, wenn man folgende Proportionen ansetzet; r: AB = sin bAB : Bb, und r: AB = sin bBA (oder cos bAB) : Ab. Ferner ist in dem rechtwinkeligen Dreyecke CAc die Hypothenuse CA nebst dem Winkel CAc = CAB — bAB bekannt; folglich können daraus die Seiten Cc und Ac berechnet werden. Man ziehe von 180° den Winkel bAB + BAG ab; so ist der Ueberrest = GAg. Folglich ist in dem rechtwinkeligen Dreyecke GAg nebst der Hypothenuse auch

der

der Winkel GAg bekannt, und Gg, Ag können sodann berechnet werden. Ferner ist GAH — GAg = HAh, und endlich HAh + IAH = IAi. Es können demnach in den zwey rechtwinkeligen Dreyecken HAh und IAi die Seiten Hh, Ah, und Ii, Ai gefunden werden. Um Af, fF, und Ad, dD zu erhalten, gedenke man durch B eine Parallele BQ zu AN; so ist ABQ = 180° — NAB (vermöge 362. III.); und ABQ — ABC — CBD = DBQ. Nun können in dem rechtwinkeligen Dreyecke DQB die Seiten BQ und DQ berechnet werden. Ferner ist BQ + bA = bd + bA = Ad, und bB — DQ = dQ — DQ = dD und DBF — DBQ = FBF. In dem rechtwinkeligen Dreyecke BPF können demnach BP und PF gefunden werden, und es ist sodann BP + bA = Af, und PF + Bb = Ff. Man gedenke auch durch F eine Parallele FR zu AN oder BQ, so ist BFR = 180° — QBF, und endlich EFR = BFR — BFD — DFE. In dem rechtwinkeligen Dreyecke EFR können demnach aus der Hypothenuse Ef und aus dem Winkel EFR die Seiten FR, ER berechnet werden, und es ist sodann Ae = Af + FR, und eE = fF — ER; u. s. w. Fig. 146.

Man gedenke durch A eine Senkrechte WO auf AN, und es sey die Gegend gegen N nach der Richtung gegen Norden, wenn SN die bestimmte Mittags-Linie ist; so ist (nach §. 583.) die Gegend von A nach S gegen Süden, von A nach O gegen Osten, von A nach W gegen Westen gestrecket. Daher können die berechneten Senkrechten und ihre Abstände von dem Puncte A auf folgende Art in eine kleine Tafel von drey Spalten eingetragen werden.

Ent-

Fig. 146.

Entfern.	Gegen Nord.	Gegen Ost.	Entfern.	Gegen Süd.	Gegen West.
A	0 Kl.	0 Kl.	I	856 Kl.	2704 Kl.
B	1305	2411	H	2811	1613
F	2713	5906	••	••	••
D	3547	998	••	••	••
E	4812	4810	••	••	••

Entfern.	Gegen Nord.	Gegen West	Entfern.	Gegen Süd.	Gegen Ost.
C	2153	1648	G	1875	2019
K	4236	1125	••	••	••

Ist die Gerade SN nicht in der Mittags-Linie des Punctes A, sondern nach einer anderen Richtung gezogen; so kann man die Aufschriften für die Spalten der angeführten Tafel mit den angenommenen Endbuchstaben der Senkrechten bezeichnen.

Wenn sehr große Strecken, die schon einige Quadrat-Meilen enthalten, genau und richtig aufzunehmen sind; so muß man die Lage der Hauptpuncte nach der angeführten Art trigonometrisch bestimmen. Man muß nähmlich eine Tabelle nach der eben gegebenen Vorschrift verfertigen, worinn die Hauptpuncte des trigonometrischen Netzes enthalten sind. Darauf werden diese Hauptpuncte aus der Tabelle auf die gleich großen Sectionen der Meßtische nach dem angenommenen verjüngten Maßstabe vermittelst der Abscissen und Ordinaten aufgetragen. Endlich muß man alle diejenigen Gegenstände, die sich in einem jeden Dreyecke besonders befinden, mit dem Meßtische aufnehmen.

Diese Methode von einer großen Strecke den Grundriß zu verfertigen, führet den besonderen Vortheil mit sich, daß einige Fehler, die bey dem Gebrauche des Meßtisches in der Aufnahme des Details sich einschleichen, nur in einzelnen Dreyecken verbleiben, und sich den übrigen gar nicht mittheilen. Die Fehler, welche bey dem Gebrauche des

Meß-

Meßtisches unvermeidlich sind, haben ihren Ursprung theils in Fig.
der veränderlichen Ausdehnung des Papiers und auch des Meß-
tischblattes bey verschiedener Temperatur der Atmosphäre, theils
in der Dicke der Anschlagnadeln, theils in der Breite der gezoge-
nen Visir-Linien, theils auch einiger Maßen in der Figur
der Erde. Man muß nähmlich einen weit ausgedehnten
Theil von der horizontalen Oberfläche der Erde, worauf man sich
die Lage der aufzunehmenden Gegenstände im Grunde vorstellet,
für eine krumme nicht aber für eine ebene Fläche ansehen, welches
letztere doch der Feldmesser mit seinem Meßtische voraussetzet.

§. 600.

Zeichnung des geographischen Kugelnetzes.

Ist endlich ein geographisches Kugelnetz (Abbildung der
Meridiane und Parallel-Kreise auf einer ebenen Fläche mit Bey-
setzung der geographischen Längen und Breiten) für ganze Länder
zu entwerfen, um in dasselbe die Hauptpuncte nach ihren be-
stimmten geographischen Längen und Breiten sammt dem Detail
einzutragen; so muß man sich vorstellen, daß von der Oberfläche
einer nach dem angenommenen Maßstabe zu der Erde proportio-
nirten, und eben so eingetheilten Kugel ein Stück ausgeschnitten,
und über eine ebene Fläche ausgebreitet werde. Da sich nun alle
Meridiane oder Breitenkreise in dem Pole vereinigen, und die
Parallel-Kreise gegen die Pole zu mit immer kleineren Halbmes-
sern beschrieben werden; so können die auf dem geographischen
Netze gezogenen Meridiane nicht parallele gerade Linien seyn,
sondern dieselben müssen gegen die Pole zusammen laufen.
Auch die Parallel-Kreise können nicht durch parallele gerade
Linien, sondern sie müssen durch parallele kreisähnliche
Bogen vorgestellet werden. Damit man nun die Haupt-
puncte eines bestimmten, von vier Bogen größter Kreise
eingeschlossenen Stückes der Erdfläche mit den dazu gehöri-
gen Meridianen und Parallel-Kreisen auf einer ebenen Flä-
che richtig abbilde; so kann die geograhische Berechnung

und

Fig. 209. und Verzeichnung desselben am füglichsten auf folgende Art vorgenommen werden.

1) Man verzeichne sich einen geradlinigen Maßstab, bey welchem eine beliebige Länge nach der Größe des aufzutragenden Stückes der Erdoberfläche für die Einheit angenommen, und mit dem Nahmen Grad bezeichnet wird, mit der Unterabtheilung von 60 Minuten zu 60 Secunden oder nur zu Zehntel=Minuten. Vermöge §. 583. Aufgabe VI. beträgt ein solcher Grad 58583,93 W=Kl. oder 57008,23 P. T.

2) In der Mitte A des angenommenen Rechteckes ziehe man zwey auf einander senkrechte Linien BE und LD; so wird EB ein Stück des Meridians für den Punct A, und LD ein Stück des auf BE senkrechten größten Kreises vorstellen.

3) Aus dem Puncte A trage man nach B und E auf BE den halben Breitenunterschied, welchen die ganze Section enthalten soll. nach dem angenommenen Maßstabe auf. Die durch die abgeschnittenen Puncte B und E auf BE senkrecht gezogenen Bogen von größten Kreisen werden sodann der erste, die obere oder nördliche, und der zweyte die untere oder südliche Sections= Linie bestimmen.

4) Damit man aber diese Sections= Linien BC und EF erhalte; so müssen für eine angenommene Entfernung AD, im Bogenmaße des größten Kreises, Durchschnittspuncte C und F dieser Sections= Linien und eines in dem Puncte D auf AD senkrechten größten Kreises CDF gesuchet werden. Es sey die Polhöhe des Punctes A $= b$ die Entfernung AD $= a$, der Breitenunterschied AB $= c$, in Graden, Minuten und Secunden ausgedruckt; so ist nach den Gründen der sphärischen Trigonometrie

tang DC $=$ cos a . tang c, und tang BC $=$ cos c . tang a.

Daraus findet man sowohl CD als auch BC in Graden, Minuten und Secunden ausgedrückt. Diese Bogenmaße für CD und BC nehme man auf dem geradlinigen Maßstabe, beschreibe aus den Puncten B und E mit der Eröffnung BC oben und unten einen Kreisbogen, und durchschneide jeden aus dem Puncte D mit der Eröffnung CD; so sind die Puncte C und F gefunden, welche mit B und E sowohl als auch

mit

mit D verbunden werden müssen. Hat die Zeichnung gegen Osten und Westen, oder gegen Norden und Süden eine sehr große Ausdehnung über 10 Grade des größten Kreises; so müssen im ersteren Falle für die nördliche und südliche Sections-Linie, im zweyten Falle für die östliche und westliche mehrere Zwischenpuncte bestimmet werden, damit man durch die Verbindung dieser Puncte die Sections-Linien richtiger erhalte. Z. B. für AD = 20° und AB = 10° ist BC = 19° 43′ 11″ und DC = 9° 24′ 29″; für AB = 10° und AD′ = 10° ist BC′ = 9° 51′ 4″ und auch D′C″ = 9° 51′ 4″; für AB′ = 5° und AD = 20° ist B′C″ = 19° 55′ 47½″ und DC″ = 4° 41′ 59½″. Eben so kann man auch mehrere Puncte der Sections-Linien bestimmen, wenn man in den angeführten Formeln die erforderlichen Werthe gehörig substituiret. Fig. 209.

5) Um die Lage der Meridian-Kreise für die von Grad zu Grad auf einander folgenden Längenunterschiede zu erhalten, von dem durch den Punct A gehenden Meridiane gerechnet; so müssen die Durchschnitte derselben auf der oberen, mittleren und unteren Sections-Linie gesuchet werden. Setzen wir allgemein den Längenunterschied = n von dem mittleren Meridiane BE gerechnet: so werden die Meridian-Durchschnitte auf der nördlichen, mittleren und südlichen Sections-Linie durch folgende Formeln erhalten:

$$\text{tang Bd} = \text{tang } n \,.\, \cos(b+c),$$
$$\text{tang Ad}' = \text{tang } n \,.\, \cos b,$$
$$\text{tang Ed}'' = \text{tang } n \,.\, \cos(b-c).$$

Man darf also nur diese Entfernungen für die auf einander folgenden Grade der Längenunterschiede berechnen, dann nach dem angenommenen Maßstabe von B, A und E aus, gehörig auftragen, und die aufgetragenen gleichnahmigen Puncte mit einander verbinden; so sind dadurch die von Grad zu Grad auf einander folgenden Meridiane gezogen. Für die zwey gegebenen Parallel-Kreise, zwischen welchen die aufzutragenden Hauptpuncte fallen, z. B. für den 55ten und 35ten kann man sich folgende Tafel der Meridian-Durchschnitte verfertigen, und diese im nöthigen Falle mittelst der vorstehenden Formeln erweitern.

Fig.

Für die Merid. Unterschiede von	Sind die Abstände der Durchschnittspuncte der Meridiane von dem mittleren Meridiane in der Breite von								
	55° auf der obern Sect. Lin.			45° auf der mittlern Sect. Lin.			35° auf der untern Sect. Lin.		
1°	0°	34′	25″	0°	42′	25″	0°	49′	9″
2	1	8	51	1	24	52	1	38	18
3	1	43	18	2	7	20	2	27	29
4	2	17	48	2	49	51	3	16	42
5	2	52	22	3	32	24	4	5	57
6	3	27	0	4	15	1	4	55	15
7	4	1	42	4	57	43	5	44	36
8	4	36	31	5	40	31	6	34	2
9	5	11	27	6	23	24	7	23	32
10	5	46	30	7	6	25	8	13	8
11	6	21	42	7	49	34	9	2	49
12	6	57	4	8	32	51	9	52	37
13	7	32	36	9	16	18	10	42	33
14	8	8	19	9	59	54	11	32	36
15	8	44	15	10	43	42	12	22	46
16	9	20	23	11	27	42	13	13	6
17	9	56	47	12	11	55	14	3	36
18	10	33	25	12	56	21	14	54	15
19	11	10	19	13	41	2	15	45	5
20	11	47	31	14	25	58	16	36	6
21	12	25	1	15	11	9	17	27	19
22	13	2	51	15	56	38	18	18	44
23	13	41	1	16	42	25	19	10	22
24	14	19	32	17	28	30	20	2	14
25	14	58	26	18	14	56	20	54	20
26	15	37	45	19	1	41	21	46	40
27	16	17	28	19	48	48	22	39	16
28	16	57	38	20	36	18	23	32	8
29	17	38	15	21	24	11	24	25	15
30	18	19	21	22	12	27	25	18	40

Um daß Netz möglichst richtig zu erhalten, kann man auch auf der Sections-Linie B′ C″, und so auch auf einer in der Mitte zwischen A und E auf AE nach 4) senkrecht gezogenen Sections-Linie die Durchschnittspuncte der Meridiane vermittelst der angeführten Formeln bestimmen. Es sind nähmlich Fig. 209.

Für Merid. Unterf. von	Abstände der Durchschn. auf der Sect. Linie in der Breite von 50°	40°	Für Merid. Unterf. von	Abstände der Durchsch. auf der Sect. Lin. in der Breite von 50°	40°
4°	2°34′24″	3° 3′53″	22°	14°33 30″	17°11 50″
8	5 9 43	6 8 42	23	15 15 41	18 0 45
12	7 46 48	9 14 52	24	15 58 13	18 49 57
14	9 6 18	10 48 47	25	16 41 8	19 39 26
16	10 26 36	12 23 19	26	17 24 24	20 29 13
18	11 47 49	13 58 37	27	18 8 4	21 19 17
19	12 28 48	14 46 35	28	18 52 9	22 9 41
20	13 10 4	15 34 45	29	19 36 40	23 0 26
21	13 51 38	16 23 10	30	20 21 38	23 51 32

o) Damit endlich auch die Lage der Parallel-Kreise für die von Grad zu Grad, oder auch von 30 Minuten zu 30 Minuten fortlaufenden Polhöhen gefunden werde; so bestimme man sich die Ausbiegung oder Abweichung der Parallel-Kreise auf der unteren, mittleren, und auch so weit es sich thun läßt, auf der oberen Sections-Linie im ersten Falle durch die Formeln tang x = cos$n$. tang $(b-c)$ und $(b-c)-x$=d″ h″; im zweyten Falle durch tangx' = cos$n$. tang$b$, und $b-x'$=d′h′; im dritten Falle aber durch tangx'' = cos$n$. tang $(b+c)$ und $b+c-x''$ =dh. Die erhaltenen Maßen müssen auf dem Maßstabe gehörig genommen, dann von der unteren, mittleren und oberen Sections-Linie, auf jedem zugehörigen Meridiane aufgetragen, und zwey neben einander aufgetragenen Puncte mit einander verbunden werden. So bald dieses geschehen ist, so lassen sich leicht die übrigen Parallel-Kreise ziehen. Auch für die Abweichungen oder Ausbiegungen der, durch den unteren, mittleren und oberen Punct gehenden, bestimmten Parallel-Kreise z. B. zwischen den 35ten und 55ten Grade der Polhöhe kann man folgende Tafel verfertigen, und nöthigen Falles nach den angeführten Formeln erweitern.

Fig.

Für die Merid. Unterschiede von	Sind die Abweich. oder Ausbieg. der Parallel-Kreise nach den Richtungen der Meridiane in der Breite von								
	55° auf der obern Sect. Lin.			45° auf der mittlern Sect. Lin.			35° auf der untern Sect. Lin.		
1°	0°	0′	15″	0°	0′	16″	0°	0′	15″
2	0	0	59	0	1	3	0	0	59
3	0	2	13	0	2	21	0	2	13
4	0	3	36	0	4	11	0	3	56
5	0	6	9	0	6	33	0	6	10
6	0	8	52	0	9	27	0	8	53
7	0	12	4	0	12	52	0	12	6
8	0	15	46	0	16	49	0	15	49
9	0	19	58	0	21	18	0	20	3
10	0	24	40	0	26	19	0	24	47
11	0	29	52	0	31	52	0	31	3
12	0	35	33	0	37	58	0	36	49
13	0	41	45	0	44	37	0	42	7
14	0	48	27	0	51	49	0	48	57
15	0	55	39	0	59	35	0	56	19
16	1	3	22	1	7	54	1	4	14
17	1	11	36	1	16	46	1	12	42
18	1	20	20	1	26	13	1	21	43
19	1	29	35	1	36	15	1	31	19
20	1	39	21	1	46	51	1	41	29
21	1	49	38	1	58	3	1	52	14
22	2	0	27	2	9	50	2	3	36
23	2	11	47	2	22	13	2	15	34
24	2	23	39	2	35	13	2	28	9
25	2	36	3	2	48	49	2	41	22
26	2	48	59	3	3	4	2	55	14
27	3	2	26	3	17	56	3	9	45
28	3	16	25	3	33	26	3	24	56
29	3	30	58	3	49	35	3	40	49
30	3	46	3	4	6	24	3	57	24

Ueber eine nach einem gegebenen Maßstabe richtig und genau gezeichnete Karte kann man eben so leicht ein geographisches Kugelnetz spannen, wenn nur durch einen Punct derselben die Mittags-Linie gezogen, und die Polhöhe für diesen Punct bekannt ist. In diesem Falle muß man sich aus dem Maßstabe der Karte nach dem bekannten Verhältnisse der zum Grunde gelegten Einheit zu einem Grade, einen Grad-Maßstab verfertigen, wenn z. B. bey der Aufnahme und Zeichnung der Karte entweder die Wiener-Klafter, oder auch die österreichische Postmeile zum Grunde lieget, so muß man im ersten Falle 58583,93 Wiener-Klafter, und im zweyten 14,64599 österreichische Postmeilen für 1 Grad des geradlinigen Maßstabes annehmen. Ferner muß man in dem Puncte A, dessen Polhöhe bekannt ist, eine Senkrechte auf die bekannte Richtung der Mittags-Linie errichten, und die Entfernung der beyden äußersten Puncte B und D von dem Puncte A auf diesem Grad-Maßstabe messen; so ist in den oben in 4) angeführten Formeln die Polhöhe in dem Puncte $A=b$, $AB=c$, $AD=a$. Nun können die Durchschnitte der Sections-Linien C und F, wie auch die Durchschnittspuncte der Meridiane und die Ausbiegungen der Parallel Kreise nach der oben gegebenen Methode gefunden werden. Fig. 209.

Anmerkung. Es ist einleuchtend, daß bey der Eintheilung des geographischen Kugelnetzes eben dieselbe Verfahrungsart auf der westlichen Hälfte beybehalten werden muß. Die angeführten Formeln sind aus den Gründen der sphärischen Trigonometrie abgeleitet. Man wird die Richtigkeit derselben sogleich einsehen, wenn man eine Erdkugel zur Hand nimmt, und die Lage der hier vorkommenden Kreise betrachtet. Die hier aus einander gesetzte Zeichnungsart eines geographischen Kugelnetzes hat vor den bisher gewöhnlichen, selbst vor der beliebten Murdochischen Projection erhebliche Vorzüge, weil bey der hier vorgeschlagenen Zeichnung des geographischen Kugelnetzes die Umrisse der Länder, die Lage, und die wechselseitigen Entfernungen der darin bemerkten Oerter weniger verunstaltet werden, als bey jeder anderen bisher gebrauchten Projection.

Fig. Man vergleiche hiermit Tob. Mayer, vollständige und gründliche Anweisung zur Verzeichnung der Land-See- und Himmels-Karten und der Netze zu Coniglobien und Kugeln. Erlangen bey Joh. Jac. Palm 1794. 8.

§. 601.

137. Aufgabe. Die Entfernung zweyer Puncte A und B Fig. 137. nebst der Richtung der Magnetnadel ist auf dem Meßtische gegeben; man soll dadurch die Lage des Standpunctes C bestimmen, von dem man nach A und B visiren kann.

Auflösung. Man stelle den Meßtisch mittelst der Magnetnadel dergestalt über C, daß ab mit der gleichnahmigen Linie AB parallel laufe, und lege sodann bey dieser Stellung des Meßtisches das Meß-Lineal einmahl an a, einmahl an b, und visire bey der ersten Anlage nach A, bey der zweyten nach B; so werden sich auf dem Meßtische die bemerkten Visir-Linien rückwärts in dem Puncte c durchschneiden, und dadurch wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke acb und ACB die Lage des Punctes C in c bestimmen.

§. 602.

147. Aufgabe. Die Länge einer unzugängigen Geraden AB ist gegeben, man soll daraus die Lage der Puncte C und D bestimmen, von denen man nach A und B sehen kann.

Auflösung. 1tens durch Hülfe des Meßtisches. Man stelle den Meßtisch in C, und visire nach A, B, D, Sodann stelle man den Meßtisch in D dergestalt, daß die Visir-Linie c′ d′ genau in der Richtung CD liege, und visire aus einem beliebigen Puncte dieser Visir-Linie d′ nach A und B; so ist wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke d′c′a′b ∽ DCAB. Endlich trage man nach einem verjüngten Maßstabe die Länge AB auf die Gerade ba′ von b bis a, und verzeichne (§. 426.) die Figur bacd ∽ ba′c′d′; so ist dadurch die Lage der Puncte C und D nähmlich die Länge von CA, CB, DA, DB, DC bestimmet.

2tens

2tens durch Hülfe eines Winkelmessers. Man beobachte in C die Winkel ACB, BCD, und in D die Winkel CDA, ADB. Dann nehme man für CD eine willkührliche Länge an, z. B. man setze CD = 1, und berechne nach dieser Voraussetzung AC, AD, CB, DB und AB. Endlich schließe man wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke: die berechnete Länge AB verhält sich zu der wirklichen bekannten Länge AB, gleichwie jede andere berechnete AC, AD, CD, ... sich zu der wirklichen Länge von AC, AD, CD, ... verhält. Man findet die Lage eben dieser zwey Puncte durch die Verzeichnung, wenn man an einer Geraden von willkührlicher Länge c'd' die beobachteten Winkel verzeichnet, sodann BA nach einem verjüngten Maßstabe auf ba' von b bis a aufträgt, und endlich (nach §. 426.) acdb ∽ a'c'd'b verzeichnet. Fig. 147.

Es ist ohne meine Erinnerung klar, daß diese Aufgabe auf eben dieselbe Art aufgelöset werden kann, wenn einer aus den zwey Puncten D und C diesseits, der andere jenseits der bekannten Linie AB lieget.

§. 603.

Aufgabe. A, B, C, sind drey Oerter auf dem Felde, deren Lage gegen einander bekannt ist, D ist ein vierter Ort, von dem man nach A, B, C sehen, und die Winkel m, n beobachten kann; man soll daraus die Lage des Punctes D, nähmlich die Entfernung DA, DB, DC bestimmen. 148 bis 153.

Auflösung. Wenn nebst der Lage der drey Puncte A, B, C auch noch die Richtung der Magnetnadel auf dem Meßtische gegeben ist; so kann der Standpunct D (nach §. 601.) gefunden werden, allwo zugleich die dritte Visir-Linie, wenn sie sich mit den zwey ersteren genau in einem Puncte durchschneidet, zur Versicherung dienet, daß der Meßtisch richtig orientiret ist. Wenn hingegen die Richtung der Magnetnadel nicht gegeben ist; so wird die Lage des Punctes D auf folgende Art bestimmet.

Fig. 148. Erster Fall, wenn der Ort D entweder in einer Seite des bekanten Dreyeckes ABC Fig. 148., oder auf 149. der Verlängerung liegt Fig. 149.

Auflösung. Man beobachte den Winkel m, so sind in dem Dreyecke ADC alle drey Winkel nebst der Seite AC bekannt. Folglich kann daraus DA und DC gefunden werden.

Ist das Dreyeck ABC Fig. 148, 149 auf dem Meßtische gegeben, so stelle man denselben dergestalt über D, daß die zu AB gleichnahmige Linie genau in der Richtung AB liege, lege sodann das Visir-Lineal an den zu C gleichnahmigen Punct, und visire nach C; so wird diese Visirlinie die zu AB gleichnahmige Linie, welche man im erforderlichen Falle verlängern muß, durchschneiden, und dadurch die Lage des Punctes D auf dem Meßtische bestimmen.

Es ist gar nicht schwer zwischen zwey unzugängigen Puncten A und B Fig. 148. einen dritten Punct D auf dem Felde zu finden, der mit A und B in einer und derselben Geraden liegt. Zwey Männer werden dazu erfordert. Der eine stellt sich in einen beliebigen Punct e und der andere in d auf die Verlängerung von Ae. Sodann gehet der Mann e gegen die Gegend AB mit dem Auge seitwärts nach d sehend, und der Mann d folget ihm dergestalt nach, daß er beständig in der Verlängerung von Ae verbleibet. Wenn nun e so weit vorgerückt ist, daß er den Mann d und den Punct B in einer und derselben geraden Linie erblicket; so bleibt er stehen, und die zwey Männer e und d befinden sich sodann beyde in der Geraden AB, der erste in E und der zweyte in D.

Zweyter Fall, wenn der Ort D außer dem be-
151. kannten Dreyecke ABC liegt Fig. 150, 151.
150.

Auflösung. Man stelle sich vor, daß durch die zwey äußersten Puncte A, C, und durch den gesuchten Punct D ein Kreis geführet sey, und gedenke die Gerade BD und die Sehnen AE und CE; so ist $m = m'$, $n = n'$ (§. 372. II.). Nun kann in dem Dreyecke AEC aus der bekannten Seite AC und aus den daran liegenden Winkeln

die

die Seite EC berechnet werden. Dann sind in dem Dreyecke EBC die zwey Seiten EC und BC nebst dem eingeschlossenen Winkel ECB bekannt; folglich kann dadurch der Winkel CBE Fig. 150. und auch CBD Fig. 151 gefunden werden. Endlich sind in dem Dreyecke CBD alle drey Winkel nebst der Seite BC bekannt; folglich kann dadurch DC und DB und sodann auch DA gefunden werden. Fig. 150. 151.

Da in diesem Falle auch $p = p'$ und $q = q'$ ist (§. 372. II.); so kann der Standpunct D, wenn das Dreyeck auf dem Meßtische gegeben ist, auf folgende Art durch Verzeichnung gefunden werden. Man stellet den Meßtisch über D, Fig. 150, und visiret aus dem gerade darüber liegenden Puncte des Meßtisches nach A, B, C, um die Winkel m und n zu erhalten. Nun trägt man den links beobachteten Winkel m rechts, und den rechts beobachteten Winkel n links auf die Linie ac des gegebenen Dreyeckes um den Punct e zu erhalten. Darauf ziehet man durch e und b eine unbestimmte gerade Linie. Endlich verzeichnet man $acd = aed$, und $cad = dec$ nähmlich $p' = p$, und $q' = q$; so ist wegen dabc ∽ DABC in dem Durchschnittspuncte d die gesuchte Lage des Punctes D gefunden.

Wenn es nun erforderlich ist aus dem Standpuncte D nach anderen Gegenden zu visiren, um entweder einige schon bereits gezogene Visir-Linien zu durchschneiden, oder um Visir-Linien zu erhalten, die man in folgenden Standpuncten durchschneiden muß; so ist es allerdings nothwendig den Meßtisch in D zu orientiren. Dieses geschieht, wenn man den Meßtisch mit dem bereits gefundenen Puncte d gerade über D stellet, das Visir- oder Meß-Lineal an d und c anleget, und den Meßtisch so lange herumdrehet, bis man durch die Dioptern des Meß-Lineals den Punct C erblicket. Sodann legt man bey dieser Stellung des Meßtisches das Meß-Lineal an da und db, und untersuchet, ob man auch die zwey Puncte A und B genau in dieser Richtung erblicket, welches richtig eintreffen muß, wenn nur bey der Verzeichnung der Figur dabc kein Fehler eingeschlichen ist.

Fig. 150. 151. Aus Fig. 150. ist leicht zu ersehen, daß die Lage der Geraden BD und des Punctes D unbestimmt bleibt, wenn die beobachteten Winkel m, n den bekannten Winkeln BCA, BAC des gegebenen Dreyeckes ABC gleich sind, oder welches einerley ist, wenn $m + n + ABC = 180°$ seyn sollte, weil in diesem Falle die Puncte B und E über einander fallen.

Es ist schwer nach der angeführten Art in Fig. 150. den Punct D auf dem Meßtische durch die Verzeichnung vollkommen genau zu bestimmen. Man erhält seinen Endzweck leichter und richtiger, wenn man das gegebene Dreyeck auf dem Meßtische Fig. 151. mit einem dreyfüßigen Zirkel absticht, und dasselbe auf die gezogenen Visir-Linien DA, DB, DC dergestalt durch das Versuchen überträgt, daß der Punct a genau in der Visir-Linie DA, b in DB, und c in DC liege. Sodann nimmt man abermahl mit dem dreyfüßigen Zirkel das Dreyeck a'D c', und überträgt es auf die Linie ac um die gesuchte Lage des Punctes D auf dem Meßtische in d zu erhalten.

Auch läßt sich die Lage des Punctes D auf dem Meßtische mittelst eines durchsichtigen Papieres bestimmen. Man zieht nähmlich auf einem Stücke eines durchsichtigen Papieres Fig. 150. die Visir-Linien DA, DB, DC, und leget sodann durch das Versuchen eben dasselbe durchsichtige Papier dergestalt auf das gegebene Dreyeck abc, daß die Visir-Linie DA genau durch a, DB durch b, und DC durch c gezogen sey. Endlich bemerket man in dieser Stellung des durchsichtigen Papiers den gemeinschaftlichen Durchschnittspunct der drey gezogenen Visir-Linien auf dem Meßtische; so ist dadurch die gesuchte Lage des Punctes D auf dem Meßtische in d gefunden.

152. **Dritter Fall, wenn die drey gegebenen Puncte A, B, C in einer geraden Linie liegen** Fig. 152.

Auflösung. Man verfahre eben so, wie bey dem vorhergehenden zweyten Falle; so wird man die gesuchte Lage des Punctes D erhalten.

Vierter Fall, wenn der Ort D in dem bekannten Dreyecke ABC liegt Fig. 153.

Fig. 153.

Auflösung. Man stelle sich vor, daß durch den Ort D, und durch A und C ein Kreis geführet sey, und gedenke die Sehnen AE und CE; so ist $a' = a =$ der Ergänzung des gemessenen Winkels n zu 180°, und $c' = c =$ der Ergänzung von m. Nun kann in dem Dreyecke AEC aus der bekannten Seite AC, und aus den daran liegenden Winkeln die Seite EC gefunden werden. Sodann sind in dem Dreyecke ECB die zwey Seiten EC und CB sammt dem eingeschlossenen Winkel bekannt; folglich kann daraus der Winkel q und auch CBE gefunden werden. Endlich sind in dem Dreyecke CDB alle drey Winkel sammt der Seite BC bekannt; folglich kann daraus DC und DB, und dann auch DA gefunden werden.

Wenn die drey Puncte A, B, C Fig. 153. auf dem Meßtische gegeben sind, so kann man auf demselben die Lage des Punctes D durch Hülfe eines dreyfüßigen Zirkels, oder auch mittelst eines durchsichtigen Papieres eben so bestimmen, wie es bey dem zweyten Falle gezeiget worden ist.

§. 604.

Aus Fig. 154, 155, 156, 157 ist es deutlich zu ersehen, daß man die nach der vorigen Aufgabe (§. 603.) gesuchte Lage des Punctes D sehr leicht berechnen kann, wenn nur einmahl der Winkel $x =$ BAD bekannt ist. Dieser Winkel BAD kann aus dem gegebenen Dreyecke ABC und aus den zwey beobachteten Winkeln m, n auf folgende Art gefunden werden.

154. 155. 156. 157.

Es sey die bekannte Seite $AB = a$, $BC = b$, der eingeschlossene bekannte Winkel $ABC = p$, und der gesuchte Winkel $BAD = x$; so ist (Fig. 154. und 157.) $BCD = 360° - p - m - n - x = q - x$, Fig 155 ist $BCD = p - m - n - x = q - x$, und Fig. 156 ist $BCD = 180° - m - n - x = q - x$,

Nun

Fig. 154. Nun ist $\sin m : a = \sin x : BD$, nähmlich $BD = \frac{a.\sin x}{\sin m}$,

und $\sin n : b = \sin (q - x) : BD$; .... $BD = \frac{b.\sin(q-x)}{\sin n}$

folglich auch $\frac{a.\sin x}{\sin m} = \frac{b.\sin(q-x)}{\sin n}$,

oder $\frac{a.\sin x}{\sin m} = \frac{b}{\sin n}.\left(\frac{\sin q.\cos x - \sin x.\cos q}{r}\right)$ (v. §. 542. III.)

$$\frac{a \,.\, r \,.\, \sin n}{b \,.\, \sin m} = \sin q \,.\, \cot x - \cos q.$$

$$\frac{a \,.\, r \,.\, \sin n}{b \,.\, \sin m \,.\, \sin q} + \frac{\cos q}{\sin q} = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\frac{a \,.\, r^2 \,.\, \sin n}{b \,.\, \sin m \,.\, \sin q} + \cot q = \cot x.$$

Es ist bey dieser Formel wohl zu merken, daß $\cot q$ negativ sey, wenn $q > 90°$ ist, und daß $x > 90°$ seyn muß, wenn die berechnete Tangente des gesuchten Winkels negativ ausfällt.

Beyspiel.

Es sey Fig. 154 $p = 126° 40'$, $m = 25°$, $n = 36°$, $a = 621$ Kl. und $b = 919$ Kl.; so ist $q = 172° 20'$. Nun kann x durch Hülfe einer trigonometrischen Tafel für den Halbmesser $r = 1$ auf folgende Art berechnet werden.

Es ist $\log a = \log 621 = 2{,}7930916$ Fig.
$\log \sin n = \log \sin 36° = 9{,}7692187 - 10$ 154.
$\log r^2 = \log 1^2 = 0$

$\log a \cdot r^2 \cdot \sin n = 2{,}5023103$

Ferner $\log b = \log 919 = 2{,}9633155$
$\log \sin m = \log \sin 25° = 9{,}6259483 - 10$
$\log \sin q = \log \sin 172° 20' = 9{,}1251872 - 10$

$\log b \cdot \sin m \cdot \sin q = 1{,}7144510$

$$\log \frac{a \cdot r^2 \cdot \sin n}{b \cdot \sin m \cdot \sin q} = 0{,}8478593$$

$$\frac{a \cdot r^2 \cdot \sin n}{b \cdot \sin m \cdot \sin q} = \ldots + 7{,}0446480$$

$\cot q = \cot 172° 20' = - \cot 7° 40' = - 7{,}4287064$;

folglich ist ..... $\cot x = - 0{,}3840584$
und endlich $x = 111° 0' 35''$, wenn man nähmlich zu der Cotangente 0,3840584 den zugehörigen Winkel $68° 59' 25''$ aufsuchet, und denselben wegen des Zeichens — von 180° abziehet.

Da nun der Winkel BAD $= x = 111° 0' 35''$ ist; so ist BCD $= 61° 19' 25''$ ABD $= 43° 59' 25''$, DBC $= 82° 40' 35''$. Die Seiten DA, DB, DC können demnach durch folgende Proportionen berechnet werden:

$\sin m : a = \sin ABD : DA$
$\sin 25° : 621 = \sin 43° 59' 25'' : DA$
$\sin m : a = \sin x : DB$
$\sin 25° : 621 = \sin 68° 59' 25'' : DB$
$\sin n : b = \sin DBC : DC$
$\sin 36° : 919 = \sin 82° 40' 35'' : DC$

Anmerkung: Es kann bey dem Gebrauche dieser Formel $\cot x = \frac{a \cdot r^2 \cdot \sin n}{b \cdot \sin m \cdot \sin q} + \cot q$ und zwar bey Fig. 154 sich zutragen, daß $q > 180°$ sey. In einem solchen Falle muß man 180° von q abziehen, und sodann zu dem Ue-

Fig. 154. herreste in den trigonometrischen Tafeln den zugehörigen Sinus und die Cotangente aufsuchen um sin q und cot q zu erhalten. Es ist aber wohl zu merken, daß ein solcher Sinus jederzeit negativ ist, und folglich $\frac{a \cdot r^2 \cdot \sin n}{b \cdot \sin m \cdot \sin q}$ das Zeichen — hat. Hingegen ist die Cotangente in einem solchen Falle nur damahls negativ, wenn der Ueberrest, nachdem man nähmlich 180° von q abgezogen hat, größer als 90° ausfällt. Ist aber dieser Ueberrest kleiner als 90°; so ist die entsprechende Cotangente positiv. Denn aus 122. Fig. 122. erhellet es ganz deutlich, daß der Sinus FD eines jeden Bogens AEaF über 180° negativ ist, weil er in Hinsicht auf BD eine entgegengesetzte Lage hat. Aus eben dieser Figur 122. ist es sehr leicht zu ersehen, daß die Cotangente EM eines Bogens AEaQ über 180° positiv ist, wenn aQ $<$ 90° ist. Hingegen ist die Cotangente ES eines Bogens AEaR über 180° negativ, wenn aR $>$ 90° ist. Eben so ist die Tangente AT von AEaQ positiv, und die Tangente AP von AEaR negativ. Man findet auch den Sinus, Cosinus, die Tangente und Cotangente eines Bogens über 180° aus den Formeln (§. 542. I. II.) und (§. 552. I. III.), wenn man $a = 180°$ setzet. Es ist nach gehöriger Reduction

I. $\sin (180° + b) = -\sin b$;
II. $\cos (180° + b) = -\cos b$;
III. $\text{tang} (180° + b) = \text{tang}\, b$;
IV. $\cot (180° + b) = \frac{r^2}{\text{tang}\, b} = \cot b$

In der Formel I. bleibt sin b immer negativ, es möge b kleiner oder größer als 90° seyn. Hingegen würde bey den Formeln II. III. IV.) das Zeichen verkehrt werden müssen, wenn $b > 90°$ seyn sollte. Auf eben dieselbe Art findet man den Sinus, Cosinus, die Tangente und Cotangente eines Bogens über 360° u. s. w.

II. Abschnitt.

Von dem Centriren der Winkel, von der Reduction der schiefgeneigten Winkel auf den Horizont, von der Verbesserung der Höhen- und Tiefenwinkel, und von dem Unterschiede des wahren und scheinbaren Horizontes.

I. Vom Centriren der Winkel.

§. 605.

Aufgabe. Bey den Dreyecken ABC Nro. 1, 2, 3, 4, 5, 6, konnte wegen einiger Hindernisse der Winkel ACB nicht gemessen werden. Man hat daher den Winkelmesser in D gestellet, und den Winkel ADB beobachtet. Nun soll daraus der Winkel ACB gefunden werden. Fig. 158.

Auflösung. Bey dem Dreyecke Nro. 1 ist ADB = C + CAD (vermöge §. 379.), und folglich C = D — CAD. Bey Nro. 2. ist C = D + CAD. Bey Nro. 3. ist m + n = p + CAD + q + CBD, und folglich p + q = m + n — CAD — CBD, nähmlich C = D — CAD — CBD. Bey Nro. 4. ist m + n = p + CAD + q + CBD, nähmlich C = D + CAD + CBD. Endlich bey Nro. 5. ist E = D + CAD und auch E = C + CBD; folglich ist auch C + CBD = D + CAD; nähmlich C = D + CAD — CBD. Hingegen ist bey dem 6ten Dreyecke C = D — CAD + CBD. Wenn man nun die Winkel CAD und CBD auf irgend eine Art bestimmen könnte, so wäre es sehr leicht aus dem gemessenen Winkel D den gesuchten Winkel C zu finden. Die Winkel CAD und CBD können nach einer von folgenden zwey Methoden am füglichsten bestimmet werden.

I. Man nehme in der Linie AC einen beliebigen Punct d von der Beschaffenheit an, daß man von d nach A und D sehen könne, messe sodann die Winkel ADd und AdD, und ziehe ihre Summe von 180° ab, so gibt der Ueberrest

Fig. 158. den Winkel CAD. Eben so kann der Winkel CBD bestimmet werden.

II. Man errichte aus dem Puncte D die Senkrechte Dd auf AD, und Dd' auf BD, und messe diese Senkrechten Dd, Dd', auf das genaueste. Sodann berechne man die Seite AD aus der Seite AB und aus dem Winkel ABD Fig. 158. Nro. 1, 2, welche schon aus einer vorhergehenden Messung oder Berechnung für bekannt angenommen werden, indem man sagt: sin D : AB = sin B : AD. Endlich findet in dem rechtwinkeligen Dreyecke ADd folgende Proportion statt: AD : Dd = r : tang dAD, woraus man nun den Winkel dAD oder CAD bestimmet. Bey den Dreyecken 3, 4, 5, 6 werden die Seiten AD und BD nur beynahe aus folgenden Proportionen gefunden;

sin D : AB = sin ABC : AD,
sin D : AB = sin CAB : BD.

Sobald nun die Seiten AD, BD gefunden sind; so kann man sodann die Winkel CAD und CBD, oder DAd und DBd' bestimmen. Es ist nähmlich

AD : Dd = sintot : tang DAd,
BD : Dd' = sintot : tang DBd'.

Die Seiten AD und BD werden durch die angeführten Proportionen keinesweges genau gefunden. Jedoch hat dieser Fehler keinen merklichen Einfluß auf die Bestimmung des Winkels CAD oder CBD, wenn nur die Seiten AD und BD in Hinsicht auf die Senkrechten Dd und Dd' sehr groß sind. Man setze z. B. die wirkliche Länge AD = 5000 Kl. und die Senkrechte Dd = 2 Kl.; so ist der wahre Winkel DAd = DAC = 0° 1' 22, 5". Man setze weiter, daß man durch die Rechnung AD = 5050 Kl. gefunden hätte; so findet man sodann durch fernere Rechnung den Winkel DAd = DAC = 0° 1' 21, 7"; folglich nur um $\frac{8}{10}$" zu klein.

II. Von der Reduction der Winkel auf den Horizont.

Fig.

§. 606.

Aufgabe. Es sind A, B, C drey Gegenstände, die in 159.
verschiedenen Horizonten liegen. Wenn man den Winkelmesser in A in eine horizontale Lage bringet um den horizontalen Winkel EAD zu beobachten; so sollen die Puncte B und C so beschaffen seyn, daß man in dieser Lage nach denselben nicht visiren kann, weil die Fernröhre des Winkelmessers bey dessen horizontaler Stellung keine verticale Bewegung leiden. Man ist daher genöthiget den Winkelmesser in die schiefe Lage BAC zu bringen und den schiefgeneigten Winkel BAC zu beobachten. Nun soll man den horizontalen Winkel EAD bestimmen.

Auflösung. Nachdem man den schief geneigten Winkel BAC beobachtet hat; so stelle man den Winkelmesser in eine verticale Lage und messe den Höhenwinkel EAB, und den Tiefenwinkel DAC. Aus diesen Höhen- oder Tiefenwinkeln und aus dem schief geneigten Winkel kann in einem jeden Falle der horizontale Winkel sehr leicht auf folgende Art berechnet werden, ohne daß es erforderlich ist, nur eine einzige Seite des Dreyeckes für bekannt anzunehmen.

Man gedenke die Vertical-Linie AZ, durch AZ und durch B die Vertical-Ebene AZS, ferner durch AZ und durch C die Vertical-Ebene AZT, durch A, B, C aber die schief geneigte Ebene AST. Man gedenke auch aus dem Mittelpuncte A unter einem beliebigen Halbmesser AZ eine Kugelfläche; so werden auf dieser Kugelfläche die gemeinschaftlichen krummen Durchschnitts-Linien der angeführten drey Ebenen und der Kugelfläche die Bogen größter Kreise ZT, SZ, ST, und diese das sphärische Dreyeck ZST bilden. Wenn man nun ferner durch A die horizontale Ebene QAP gedenket; so ist ZP = 90°, ZQ = 90°, ST = dem gemessenen schiefgeneigten Winkel BAC, QS = dem gemessenen Höhenwinkel EAB, und PT = dem gemessenen

Tie-

Fig. 159. Tiefenwinkel DAC. Da nun $ZS = ZQ - QS = 90° - QS$, $ZT = ZP + PT = 90° + PT$ ist, und ST nebst QS und PT gemessen worden sind; so sind in dem sphärischen Dreyecke ZST alle drey Seiten bekannt. Folglich kann daraus der sphärische Winkel Z (nach §. 578. 1.) berechnet werden. Es ist aber $Z = PQ$, und $PQ = QAP$; folglich ist auch $Z = QAP$. Nähmlich der sphärische Winkel Z ist gleich dem gesuchten horizontalen Winkel $QAP = EAD$. Da nun (vermöge §. 578. 1.)) $\log \sin \frac{1}{2} Z = \frac{1}{2} [\log \sin (P - a) + \log \sin (P - b) + \text{D. E. } \log \sin a + \text{D. E. } \log \sin b] =$ $\log \sin \frac{1}{2}$ EAD, wenn man $\frac{1}{2}$ $(ZS + ZT + ST) = P$, $ZS = a$, $ZT = b$ setzet; so wird in einem jeden Falle aus den beobachteten Höhen- oder Tiefenwinkeln und aus dem schief geneigten Winkel der gesuchte horizontale Winkel nach folgender Regel gefunden.

Man addire den Tiefenwinkel zu 90°, und subtrahire den Höhenwinkel von 90° um zwey Bogen oder Winkel a und b zu erhalten. Zu diesen zwey Winkeln addire man den schief geneigten Winkel und halbire ihre Summe. Dann subtrahire man von dieser halben Summe einmahl den Winkel a und einmahl den Winkel b, und addire zu den Logarithmen der Sinus dieser zwey Differenzen die dekadischen Ergänzungen von den Logarithmen der Sinus der zwey Winkel a und b; so ist (ohne an der Kennziffer etwas zu verändern) die Hälfte dieser Summe der Logarithmus des Sinus von dem halben gesuchten horizontalen Winkel. Man suche demnach nur zu diesem gefundenen Log sin in der Tafel den zugehörigen Winkel, und nehme denselben doppelt, so wird man den ganzen gesuchten horizontalen Winkel erhalten.

Es sey z. B. $BAC = 95° 48'$, $EAB = 4° 50'$ ein Höhenwinkel, und $DAC = 11° 30'$ ein Tiefenwinkel; so wird, um den horizontalen Winkel EAD zu finden, die Rechnung auf folgende Art angelegt:

von	90° 0′	zu	90° 0′	schief W.	95° 48′	Fig.
subtr.	4 50	add.	11 30	b =	101 30	add. 159.
a =	85 10	b =	101 30	a =	85 10	

halbirt 282 28

gibt P = 141 14

P = 141° 14′

a = 85 10	0,0015471	= D. E. log sin a	addirt.
b = 101 30	0,0088073	= D. E. log sin b	
56 4	9,9189146	= log sin $(P-a)$	
39 44	9,8056472	= log sin $(P-b)$	
	19,7349162	halbiret	
47° 28′ 30″	9,8674581	= log sin $\frac{1}{2}$ EAD	

94 57 0 = EAD = dem ges. horiz. Winkel.

Wenn beyde Gegenstände B und C höher, oder beyde niedriger als A liegen sollten; so ist es sehr leicht einzusehen, daß man im ersten Falle jeden Höhenwinkel besonders von 90° abziehen, und im zweyten Falle jeden Tiefenwinkel zu 90° addiren müßte um die zwey Winkel zu erhalten, welche wir mit a und b bezeichnet haben.

Bey der trigonometrischen Aufnahme einer Reihe von Dreyecken muß diese Reduction der Winkel auf den Horizont jederzeit vorgenommen werden, wenn man die horizontalen Winkel nicht unmittelbar messen kann, weil es erforderlich ist die Längen der Seiten aller Dreyecke in demjenigen Horizonte zu berechnen, worauf die Grund-Linie gemessen worden ist.

Diese Methode die schief geneigten Winkel auf den Horizont zu reduciren führet den besonderen Vortheil mit sich, daß die Fehler, welche bey der Beobachtung der Höhen- und Tiefenwinkel gar leicht einschleichen, keinen merklichen Einfluß auf die Berechnung des gesuchten horizontalen Winkels haben. Man setze z. B., daß man den Höhenwinkel EAB um 10 Minuten zu klein, nähmlich EAB = 4° 40′, und den Tiefenwinkel um 20 Minuten zu groß, nähmlich

Fig. 159. DAC = 11° 50′ beobachtet habe; so wird sodann aus dem schief geneigten Winkel BAC = 95° 48′ der horizontale Winkel EAD = 94° 57′ 42″ und folglich nur um 42″ größer erhalten als im vorigen Falle.

III. Von der Verbesserung der Höhen- und Tiefenwinkel, und von dem Unterschiede des wahren und scheinbaren Horizontes.

§. 607.

160 Es sey ACE ein Stück des Durchschnittes unserer Erdkugel; es seyen ferner AC, EC zwey Halbmesser, und folglich die Richtungen der Schwerkraft, oder die Richtungen frey fallender Körper in A und E; endlich sey AD senkrecht auf AC, und BF senkrecht auf BC: so ist AD eine durch den Punct A gezogene Horizontal-Linie, und BF eine durch den Punct B (z. B. durch den Gipfel eines Berges) gezogene Horizontal-Linie. Eine solche Horizontal-Linie, nähmlich eine gerade Linie, welche auf der Richtung der Schwerkraft senkrecht steht, muß man eine scheinbare Horizontal-Linie nennen, um sie von der wahren Horizontal-Linie zu unterscheiden, weil nur diejenige Linie, deren alle Puncte von dem Mittelpuncte der Erde gleich weit entfernt sind, nähmlich der Bogen AE eine wahre Horizontal-Linie genannt wird. Eben so heißt eine durch den Punct A auf AC senkrecht gelegte ebene Fläche die scheinbare Horizontal-Fläche des Punctes A. Hingegen wird eine durch den Punct A gelegte Fläche, deren alle Puncte gleich weit von C abstehen, nähmlich ein Stück der Kugelfläche, die wahre Horizontal-Fläche des Punctes A genannt. Nur damahls kann man von zwey oder mehreren Puncten sagen, daß sie in einem und demselben wahren Horizonte liegen, wenn sie gleich weit von dem Mittelpuncte der Erde entfernt sind. Wenn man aus A nach B, oder aus B nach A visiret, so heißt DAB der scheinbare Höhenwinkel, und FBA der scheinbare Tiefenwinkel. EAB und GBA hingegen heißen die wahren Höhen- und Tiefen

win-

winkel, wenn man im zweyten Falle durch B den Kreisbo- Fig.
gen oder wahren Horizont GB gedenket. Eben so ist BD 160.
oder vielmehr die Senkrechte Bd die scheinbare Erhöhung 161.
des Punctes B über den Horizont des Punctes A. Das Stück
ED des verlängerten Halbmessers zwischen dem wahren und
scheinbaren Horizonte des Punctes A heißt der Unterschied
oder vielmehr die Erhöhung des scheinbaren Horizontes
für die Entfernung AE.

Wenn eine sehr weit entfernte Höhe (nach §. 592.) zu bestimmen ist, so ist es allerdings nothwendig aus dem beobachteten scheinbaren Höhenwinkel den wahren Höhenwinkel zu finden, und sodann muß man erst aus dem wahren Höhenwinkel und aus der horizontalen Entfernung die gesuchte Höhe berechnen. Wie aus einem scheinbaren Höhen- oder Tiefenwinkel der wahre zu finden sey, lehret folgende Aufgabe.

§. 608.

Aufgabe. Aus dem gemessenen scheinbaren Höhen- oder Tiefenwinkel, aus der gegebenen horizontalen Entfernung AE zweyer Gegenstände A und B, und aus dem Halbmesser der Erde AC den wahren Höhen- oder Tiefenwinkel zu finden.

Auflösung. In Fig. 160 ist $EAB = DAB + EAD$, und $GBA = FBA - GBF$, hingegen ist in Fig. 161. $EAB = EAD - DAB$. Es ist aber $EAD = \frac{1}{2}C$, und auch $GBF = \frac{1}{2}C$ (vermöge §. 371.), weil DA und FB auf den Halbmessern in A und B senkrecht stehen, und die Umkreise EA, GB in A und B berühren. Es ist demnach auch Fig. 160. $EAB = DAB + \frac{1}{2}C$, $GBA = FBA - \frac{1}{2}C$, und Fig. 161. $EAB = \frac{1}{2}C - DAB$. Setzen wir nun den Halbmesser der Erde $AC = a$, und die horizontale Entfernung $AE = b$, welche mit dem Bogen AE, und auch mit AD einerley ist, so lange der Winkel C noch sehr klein ist; so kann der Winkel C auf folgende Art gefunden werden. Es ist der ganze zu AC gehörige Umkreis $= 2a\pi$ (ver-

Fig. möge §. 452.); ferner verhält sich $2a\pi : 360^\circ = b : C^\circ$;
160.
161. folglich ist $C = \frac{360\,b}{2a\pi} = \frac{180b}{a\pi}$ Grade $= \frac{10800\,b}{a\pi}$ Min.
162.

Nun ist (§. 583. VI.) der Halbmesser der Erdkugel $a = 3356611$ Wiener-Klafter; folglich ist nach gehöriger Reduction $C = 0{,}00102\,b$ Minuten, allwo die Entfernung $AE = b$ in Wiener-Klaftern ausgedruckt seyn muß. Endlich ist (Fig. 160.) $EAB = DAB + 0{,}00051\,b$ Minut. $GBA = FBA - 0{,}00051\,b$ Minuten, und Fig. 161. $EAB = 0{,}00051\,b$ Minuten $-$ DAB. Es sey z. B. Fig. 160. der gemessene scheinbare Höhenwinkel $DAB = 4^\circ\ 57'$ und die horizontale Entfernung $AE = b = 1960$ Wiener-Klafter, so ist der wahre Höhenwinkel $EAB = 4^\circ\ 57' + 0{,}00051 \times 1960$ Minuten $= 4^\circ\ 57' + 1' = 4^\circ\ 58'$.

Da der Unterschied zwischen dem wahren und scheinbaren Höhenwinkel in einer Entfernung von 1960 oder beynahe 2000 Wiener-Klafter erst eine einzige Minute beträgt; so ist es offenbar, daß man bey denjenigen Winkelmessern, mit denen aufs höchste einzelne Minuten können beobachtet werden, die angeführte Verbesserung in den meisten Fällen ausser Acht lassen kann, weil man selten auf Gegenstände visiret, die über 2000 Wiener-Klafter entfernt sind. Um so mehr kann die Veränderung des scheinbaren Höhenwinkels ausser Acht gelassen werden, die von der Brechung der Lichtstrahlen verursachet wird, weil sie nach der wahrscheinlichsten Meinung nur $\frac{1}{18}$ des Mittelpunctswinkels beträgt. Es ist nähmlich aus sicheren Erfahrungen bekannt, daß der Lichtstrahl von einem nahe am Horizonte befindlichen Gegenstande B (Fig. 162) nach einer etwas in die Höhe gebogenen krummen Linie in das Auge des Beobachters in A gelanget. Da nun der Beobachter in A die Lage des Gegenstandes B nach der letzten Richtung des Lichtstrahles, nähmlich nach der Richtung der Tangenten Ab beurtheilet; so wird dadurch der wirkliche scheinbare Höhenwinkel DAB um den Winkel BAb zu groß beobachtet. Dieser

ser Refractions-Winkel BAb aber ist nach der wahrscheinlich- Fig.
sten Meinung $= \frac{1}{18}$ ACE $= \frac{1}{9}$ EAD. Nach eben dieser Mei- 162.
nung ist Bb $= \frac{1}{9}$ ED.

§. 609.

Aufgabe. Für eine jede gegebene Entfernung AD, 163.
welche man noch ohne merklichen Fehler $=$ AB setzen kann, die Erhöhung des scheinbaren Horizontes nähmlich BD zu finden.

Auflösung. Es ist die gesuchte Erhöhung $BD = \frac{AB^2}{AF}$;
denn vermöge §. 411. ist BD : AD $=$ AD : DG; folglich ist auch $BD = \frac{AD^2}{DG}$ oder $BD = \frac{AB^2}{DG}$, weil wir AB nur so groß angenommen haben, daß man ohne merklichen Fehler AD $=$ AB setzen kann. Ferner kann man auch in eben derselben Voraussetzung ohne merklichen Fehler DG $=$ BG $=$ AF annehmen. Es ist sodann $BD = \frac{AB^2}{BG} = \frac{AB^2}{AF}$.

Es sey z. B. AB $=$ 200 Wiener-Klafter; so ist $BD = \frac{40000}{6713223}$, weil der Durchmesser der Erde AF $=$ 6713223 ist, nähmlich es ist BD $=$ 0,00595 Wiener-Klafter $=$ 5,148 Linien.

Diese Methode die Erhöhung des scheinbaren Horizontes für eine gegebene Entfernung zu bestimmen hat nicht die vollkommene geometrische Schärfe; jedoch weicht sie bey nicht gar zu großen Entfernungen, die in der Ausübung am gewöhnlichsten vorkommen, nicht merklich von der Wahrheit ab, wovon man sich auf folgende Art überzeugen kann. Es ist vollkommen genau BD $=$ CD $-$ CB $=$ CD $-$ AC. Es ist aber in dem rechtwinkeligen Dreyecke ACD die Hypothenuse $CD = \sqrt{(AC^2 + AD^2)}$; folglich ist auch BD $= \sqrt{(AC^2 + AD^2)} - AC$. Setzen wir nun wie im vorigen Falle AD $=$ 200, und AC $=$ 3356611 Wiener-Klafter;

so

Fig. 163. so ist $\sqrt{(AC^2 + AD^2)} = \sqrt{1126683744532 1} = 3356611,00596$; und folglich $BD = 3356611,00596 - 3356611 = 0,00596$ Klafter $= 5,149$ Linien; nähmlich es ist die wahre Erhöhung des scheinbaren Horizontes für die Weite von 200 Kl. nur $\frac{1}{1000}$ Linie größer, als sie nach der vorigen Art berechnet worden ist.

§. 610.

Nachdem man für eine bestimmte Entfernung z. B. für die Entfernung von 200 Kl. die Erhöhung des scheinbaren Horizontes $= 5,15$ Linien kennet, so kann für jede andere in W. Kl. gegebene Entfernung $= b$ die zugehörige Erhöhung $= x$ in Linien durch nachstehende Formel gefunden werden, $x = 0,0001287b^2$ W. Linien. Denn in Fig. 163. ist (vermöge des Vorhergehenden) $BD = \frac{AB^2}{AF}$, und $MN = \frac{AM^2}{AF}$; folglich ist auch $BD : MN = \frac{AB^2}{AF} : \frac{AM^2}{AF}$, oder $AB^2 : AM^2 = BD : MN$. Setzen wir nun $AB = 200$ W. Kl.; so ist $BD = 5,15$ Linien. Setzen wir ferner $AM = b$ W. Kl. und die zugehörige Erhöhung des scheinbaren Horizontes $MN = x$ Linien, und substituiren diese Werthe in der Proportion; so ist endlich $200^2 : b^2 = 5,15 : x$, nähmlich $x = \frac{5,15b^2}{40000} = 0,0001287b^2$ W. Lin.

So z. B. findet man nach dieser Formel in einer Entfernung von 1000 W. Kl. die Erhöhung des scheinbaren Horizontes $= 128,7$ Linien $=$ 10 Zoll $8\frac{2}{3}$ Linie. Nach dieser Formel sind die Erhöhungen des scheinbaren Horizontes für die von 10 zu 10 Klafter auf einander folgenden Entfernungen von 50 Wiener-Klafter angefangen, berechnet und in folgende Tafel eingetragen worden. Es ist einleuchtend, daß diese Tafel im nöthigen Falle sehr leicht fortgesetzet werden kann.

Ent-

Entfernung	Erhöh. des scheinbaren Horizontes	Entfernung	Erhöh. des scheinbaren Horizontes	Entfernung	Erhöh. des scheinbaren Horizontes.	Entfernung	Erhöh. des scheinbaren Horizontes
Kl.	Lin.	Kl.	Lin.	Kl.	Lin.	Kl.	Lin.
50	0,3	240	7,4	430	23,8	620	49,5
60	0,5	250	8,0	440	24,9	630	51,1
70	0,6	260	8,7	450	26,1	640	52,7
80	0,8	270	9,4	460	27,2	650	54,4
90	1,0	280	10,1	470	28,4	660	56,1
100	1,3	290	10,8	480	29,7	670	57,8
110	1,6	300	11,6	490	30,9	680	59,5
120	1,9	310	12,4	500	32,2	690	61,3
130	2,2	320	13,2	510	33,5	700	63,1
140	2,5	330	14,0	520	34,8	710	64,9
150	2,9	340	14,9	530	36,2	720	66,7
160	3,3	350	15,8	540	37,5	730	68,6
170	3,7	360	16,7	550	38,9	740	70,5
180	4,2	370	17,6	560	40,4	750	72,4
190	4,6	380	18,6	570	41,8	760	74,3
200	5,1	390	19,6	580	43,3	770	76,3
210	5,7	400	20,6	590	44,8	780	78,3
220	6,2	410	21,6	600	46,3	790	80,3
230	6,8	420	22,7	610	47,9	800	82,4

Fig. Anmerkung. Da es in der Ausübung gemeiniglich erforderlich ist nur für verschiedene Entfernungen unter 400 Kl. die zugehörige Erhöhung des scheinbaren Horizontes zu bestimmen; so kann man diese Erhöhung in einem solchen vorkommende Falle jederzeit sehr leicht ohne merklichen Fehler berechnen, wenn man geradezu annimmt, daß in einer Entfernung von 200 W. Kl. die Erhöhung des scheinbaren Horizontes 5 W. Linien beträgt, und sodann folgende Proportion ansetzet: Das Quadrat von 200 verhält sich zum Quadrate der in Klaftern gegebenen Entfernung, gleichwie 5 Linien zur gesuchten Erhöhung in Linien.

III. Abschnitt.

Vom Nivelliren.

§. 611.

164. Nivelliren (abwägen) heißt die Höhenunterschiede von mehreren gegebenen Puncten einer Linie oder einer Gegend mittelst horizontaler Visir-Strahle durch die wirkliche Ausmessung bestimmen. Wenn z. B. der Punct B in einer sehr grossen Entfernung von A nur um etwas Weniges über den wahren Horizont des Punctes A erhöhet wäre (Fig. 164.); so ist es offenbar, daß man diese Erhöhung nach §. 595. nicht mit hinlänglicher Genauigkeit bestimmen könnte. Es ist jedoch zuweilen erforderlich diese Erhöhung LB oder den Höchenunterschied der zwey Puncte A un B nähmlich den Unterschied ihrer Abstände von dem Mittelpuncte der Erde, auf das genaueste zu bestimmen. Dieses geschieht durch das Nivelliren auf folgende Art. Aus einem in der Mitte zwischen A und L befindlichen Puncte P gedenke man die Vertical-Linie PC, und aus einem Puncte derselben C die Visir-Strahlen CD und CE, welche durch irgend ein Hülfsmittel beyde in den scheinbaren Horizont des Punctes C gebracht sind. In A und B bemerke man ferner auf vertical gestellten Latten die Puncte D und E, wo die Visir-Strahlen CD und CE in einem und demselben scheinbaren

Hori-

Horizonte die Latten treffen, und messe die Höhen AD, BE; so ist AD — BE = BL = AH = dem Höhenunterschiede der zwey Puncte A und B. Denn man gedenke nur durch C den wahren Horizont FCG, durch B den wahren Horizont BH, und durch A den wahren Horizont AL; so ist FD = GE, weil der Punct P und auch C in der Mitte zwischen den Vertical-Linien AD und BE angenommen, und weil in gleichen Entfernungen von eben demselben Puncte die Erhöhungen des scheinbaren Horizontes gleich sind, welches leicht einzusehen ist, wenn man die Vertical-Linien AD, PC und LE so lange verlängert gedenket, bis sie in dem Mittelpuncte der Erde zusammen stoßen. Ferner ist auch wegen der concentrischen Kreisbogen oder wahren Horizonte HF = BG, AH = LB, und AF = LG; folglich ist auch AF + FD = LG + GE, nähmlich AD = LE. Es ist aber LE — BE = LB; folglich auch AD — BE = LB. Fig. 164.

Wären die zu Nivellirenden Puncte M und B von P nicht gleich weit entfernt; so müßte man für die Entfernungen PM und PL, oder CN und CE die Erhöhungen des scheinbaren Horizontes QN und GE (nach §. 610.) berechnen, jene QN von der gemessenen Höhe des Visir-Strahles MN, und diese GE von BE abziehen, und sodann die dadurch verbesserten Höhen MQ und BG von einander subtrahiren um den Höhenunterschied BL zu erhalten.

Wenn der Punct P genau in der Mitte zwischen A und L sich befindet; so ist es nicht unumgänglich nothwendig, daß die Visir-Strahlen CD und CE beyde in einem und demselben scheinbaren Horizonte liegen, sondern es ist hinlänglich, wenn sie nur beyderseits mit der Vertical-Linie gleiche Winkel eCP = dCP einschließen. Denn es ist alsdann noch immer Ad — Be = LB, weil in den zwey vollkommen gleichen Dreyecken DCd und CEe die Seiten Dd und Ee einander gleich sind.

§. 612.

Fig. 165.

§. 612.

Das Instrument, wodurch man einen Visir-Strahl in den scheinbaren Horizont bringet, wird ein Nivellir-Instrument, eine Nivellir-Wage, oder eine Wasserwage genannt. Das einfachste Nivellir-Instrument ist die sogenannte Wasserwage im eigentlichen Verstande. Diese Wasserwage besteht aus einer blechernen an beyden Enden aufwärts gekrümten Röhre MN, bey der an beyden Enden gläserne hohle Cylinder P, Q eingekittet sind (Fig. 165.). Durch Hülfe dieser Wasserwage wird ein Visir-Strahl in den scheinbaren Horizont gebracht, wenn man die Röhre mit Wasser füllet, und über die beyden Oberflächen desselben durch die gläsernen Cylinder P, Q visiret, weil das Wasser die Eigenschaft hat, daß die Oberfläche desselben in mittheilenden Röhren sich in einem und demselben Horizonte stellet. Diese Wasserwage hat die vorzügliche Eigenschaft, daß sie beym Gebrauche niemahls einer Berichtigung bedarf; nur führet sie die beträchtliche Unbequemlichkeit mit sich, daß man mit derselben auf größere Entfernungen, als etwa auf 20 Klafter, nicht mehr hinlänglich scharf visiren kann.

Außer einem Nivellir-Instrumente sind auch noch zwey Nivellir-Latten zur Ausübung erforderlich. Sie sind ohngefähr 2 Klafter lang, nach ihrer ganzen Länge in Schuhe, Zolle und Linien eingetheilet, und also beschaffen, daß sich an jeder derselben ein viereckiges Zielbrett auf- und abwärts bewegen, und in jeder Stelle mit einer Schraube befestigen läßt. Die vordere Fläche des Zielbrettes ist durch zwey senkrechte Linien in vier gleiche Theile getheilet, wovon zwey entgegen gesetzte Theile schwarz und die übrigen zwey Theile weiß überstrichen werden. Es ist für die Ausübung sehr bequem, wenn die Abmessungen des Zielbrettes an beyden Nivellir-Latten einerley sind.

§. 613.

Aufgabe. Den Höhenunterschied zweyer Puncte A und B durch das Nivelliren zu finden, wenn diese Puncte

te so beschaffen sind, daß man mit einer dazwischen ge- Fig.
stellten Wasserwage C nach beyden visiren kann. 165.

Auflösung. Man schicke einen Gehülfen mit einer Nivellir-Latte nach A und den anderen nach B, visire von P über die Oberfläche P, Q nach E, und lasse daselbst den Gehülfen bey vertical gestellter Latte das Zielbrett durch verabredete Zeichen in eine solche Lage bringen, daß der Visir-Strahl genau in den Zielpunct treffe. In dieser Lage wird nun das Zielbrett befestiget, und die Anzahl der Schuhe, Zolle und Linien von B bis an den unteren Rand des Zielbrettes gezählet, wenn die Abmessungen des Zielbrettes an beyden Nivellir-Latten einerley sind, im Gegentheile muß man die ganze Entfernung von B bis auf den Zielpunct messen. Eben dasselbe geschieht in A, nachdem man auch von Q, über die Oberfläche Q, P nach D visiret hat. Nun wird die Erhöhung des Zielbrettes an der Nivellir-Latte BE von der Erhöhung AD abgezogen, so gibt der Ueberrest den gesuchten Höhenunterschied $bB = aA$. Denn es ist $bB = bE - BE$. Es ist aber $bE = AD$, wenn man zwischen den Senkrechten AD, bE die Parallelen aB, Ab zu dem Horizonte DE gedenket; folglich ist auch $bB = AD - BE$.

§. 614.

Außer der oben beschriebenen Wasserwage (Fig. 165.) gibt es noch sehr viele andere Einrichtungen der Nivellir-Wagen, wodurch man ebenfalls entweder durch die Oberfläche eines stillstehenden Wassers, oder durch einen frey hangenden Perpendikel (Senkel), oder endlich mittelst der Wasserwage mit der Luftblase (Fig. 78.) einen horizontalen Visir-Strahl erhält. Damit man nun mit einem Nivellir-Instrumente auf große Entfernungen genau visiren könne, ist es allerdings erforderlich bey demselben ein Fernrohr anzubringen, welches aus einem Ocular- und einem Objectiv-Glase bestehet, in deren gemeinschaftlichen Brennpuncte sich ein sehr feines Fadenkreuz befindet.

Für die Ausübung ist die Wasserwage mit der Luft- 166.
blase und mit dem einfachen Fernrohre sehr bequem (Fig. 166.).

Bey

Fig. 166. Bey dieser ist AB das Fernrohr, bey A das Ocular-Glas, und bey B das Objectiv-Glas; MN ist die gläserne Röhre mit der Luftblase in einem messingenen Gehäuse, welches auf das messingene Fernrohr dergestalt befestiget ist, daß es sich mittelst der Rectificir-Schraube y etwas höher und niedriger nach Erforderniß stellen läßt; C ist ein Zirkelgewinde, ab ein Arm von Eisen oder Messing unter dem Zirkelgewinde an die Hülse D befestiget; x die Elevations-Schraube, wodurch sich das Fernrohr sammt der darauf befindlichen Röhre mit der Luftblase nach Belieben erhöhen oder erniedrigen läßt, nachdem man dieses Instrument auf ein dazu gehöriges Stativ gesetzet hat.

§. 615.

Dieses eben beschriebene Nivellir-Instrument muß jederzeit bey einer vorzunehmenden Nivellir-Operation berichtiget (rectificiret) werden, nähmlich man muß es also einrichten, daß man mittelst desselben an einem jeden beliebigen Orte einen horizontalen Visir-Strahl erhalten kann, welches nach einer von folgenden zwey Arten sehr leicht geschehen kann.

167. Erste Berichtigungsmethode. (Fig. 167.). Man messe auf einem ziemlich ebenen Boden die horizontale Länge einer Linie PQ etwa von 200 Klafter und bemerke genau auf der Hälfte derselben den Punct C. Darauf stelle man die Nivellir-Wage in C dergestalt, daß das Zirkelgewinde derselben genau über C zu stehen komme, in P und Q aber lasse man Nivellir-Latten vertical über die bemerkten Puncte P, Q aufrichten. Nun richte man das Objectiv-Glas b des Nivellir-Rohrs gegen QE, bringe mittelst der Elevations-Schraube x die Luftblase an ihre angewiesene mittlere Stelle, und lasse in dieser Stellung den Visir-Strahl auf der Latte QE in N anmerken. Nach diesem kehre man bey unverrücktem Stative das Nivellir-Rohr um, damit das Objectiv-Glas b gegen PD gerichtet sey, bringe abermahls mittelst der Elevations-Schraube die Luftblase an ihre angewiesene mittlere Stelle, und lasse in dieser Stellung den Visir-Strahl auch an der Latte PD in M anmerken und

zu-

zugleich PM ausmessen; so stehen die zwey Puncte M und N in einem und demselben wahren Horizonte, weil die Entfernungen PC und CQ vermöge der Voraussetzung einander gleich sind, und weil beyde Visir-Strahlen mit der Vertical-Linie in C gleiche Winkel einschließen. Nun übertrage man das Nivellir-Instrument nach P, stelle es daselbst dergestalt nieder, daß der Anfang des Fernrohres beym Ocular-Glase gerade über den bemerkten Punct P zu stehen kommt, das Objectiv-Glas aber gegen QN gerichtet sey, bringe in dieser Stellung das Fernrohr nach dem Augenmaße beynahe in eine horizontale Lage, und messe die Erhöhung der Achse des Fernrohres nähmlich die Erhöhung des Fadenkreuzes über den bemerkten Punct P, das ist, man messe PD. Nun übertrage man den Unterschied zwischen PD und PM auf die Latte QE von dem bemerkten Puncte N bis E aufwärts, wenn D höher liegt als M, oder von E abwärts, wenn D niedriger liegen sollte als M, so sind wegen MD = NE auch die Puncte D und E beyde in einem und demselben wahren Horizonte. Ferner berechne man für die Entfernung pQ=DE (nach §. 609.) die Erhöhung des scheinbaren Horizontes, welche für pQ = 200 W. Klaft. nur 5 Linien beträgt, und übertrage dieselbe von dem bereits gefundenen Puncte E jederzeit aufwärts bis e; so befinden sich dadurch die zwey Puncte D und e beyde in einer durch D geführten scheinbaren Horizontal-Linie. Endlich richte man mittelst der Elevations-Schraube das Fernrohr auf den Punct e, so ist der Visir-Strahl desselben im scheinbaren Horizonte. Steht nun bey dieser Stellung des Fernrohres die Luftblase an ihrer angewiesenen mittleren Stelle, so war das Nivellir-Instrument schon zuvor berichtiget, und zu einer vorzunehmenden Nivellir-Operation vollkommen tauglich, wenn sich sonst kein Fehler daran befindet. Steht hingegen bey dieser letzten Richtuug des Fernrohres die Luftblase nicht an ihrer angewiesenen mittleren Stelle; so muß man bey eben dieser Stellung des Fernrohres ohne dasselbe aus seiner Lage zu verrucken die Luftblase mittelst der Rectificir-Schraube y an ihre angewiesene mittlere Stelle bringen.

Fig. 167.

Da-

Fig. Dadurch ist endlich das Nivellir-Instrument berichtiget. Man kann nähmlich sodann durch Hülfe dieses berichtigten Nivellir-Instrumentes an jedem Orte einen horizontalen Visir-Strahl erhalten, wenn man nur mittelst der Elevations-Schraube das Fernrohr in eine solche Lage bringet, daß die Luftblase ihre angewiesene mittlere Stelle einnimmt; doch gilt dieses nur so lange, als an dem Fadenkreuze, an der Lage der Gläser, und an der Rectificir-Schraube keine Aenderung vorgegangen ist.

Wäre bey dem Nivellir-Instrumente statt der Luftblase ein Pervendikel angebracht; so müßte man eben so verfahren, und bey der letzten Richtung des Fernrohres die Lage des Perpendikels mit einem Merkmahle bezeichnen. Man erhält dann mittelst eines solchen Instrumentes jederzeit einen horizontalen Visir-Strahl, wenn man das Fernrohr in eine solche Lage bringet, daß der Perpendikel seine bezeichnete Richtung einnimmt.

Es ist ohne meine Erinnerung klar, daß man die Winkelmesser, bey denen entweder eine Luftblase oder ein Perpendikel angebracht ist, um die Höhen- und Tiefenwinkel zu messen, auf eben diese Art, berichtigen kann.

168. Zweyte Berichtigungsmethode (Fig. 168.). Man messe die horizontale Länge einer Linie PR etwa von 400 Kl. theile PR in Q, und QR in S in zwey gleiche Theile; lasse in q und r Nivellir-Latten aufrichten, über S aber stelle man das zu berichtigende Nivellir-Instrument, und visire von C einmahl nach a und einmahl nach b, nach dem man in beyden Fällen mittelst der Elevations-Schraube die Luftblase an ihre angewiesene Stelle gebracht hat; so stehen die zwey angemerkten Visir-Puncte a und b beyde in einem und demselben Horizonte. Sodann stelle man das Instrument üb r den Punct P, visire ohne auf die Luftblase Acht zu haben von D auf den bemerkten Punct b, und lasse bey dieser Richtung auf der Latte q den Punct m anmerken, auf welchen der Visir-Strahl Db trifft. Ferner übertrage man am von m bis n jederzeit auf die entgegen gesetzte Seite; so stehen auch die zwey Puncte D und n beyde in einem und

dem-

demselben Horizonte, weil wegen der gleichen Wechselwinkel mDn = mba die Linien Dn und ab parallel laufen. Denn in den zwey Dreyecken Dmn und bma, ist am = mn, mb = mD, und der Winkel Dmn = bma; folglich sind sie einander vollkommen gleich und der Winkel mDn = mba. Nun richte man das Fernrohr auf den Punct n, wenn für die Entfernung PQ die Erhöhung des scheinbaren Horizontes unmerklich ist (im Gegentheile übertrage man die zugehörige Erhöhung des scheinbaren Horizontes von dem Puncte n aufwärts, und richte das Fernrohr auf diesen gefundenen Punct;) so ist dadurch der Visir-Strahl in den scheinbaren Horizont gebracht. Endlich bringe man bey dieser letzten Richtung des Fernrohres die Luftblase mittelst der Rectificir-Schraube an ihre angewiesene mittlere Stelle; so ist dadurch das Nivellir-Instrument berichtiget. Fig. 168.

Anmerkung. Man muß bey der ersten Berichtigungsmethode auf den Nivellir-Latten jederzeit denjenigen Punct anmerken, welcher mit dem Zielpuncte des Brettes übereinstimmet, wenn man den Visir-Strahl auf den Zielpunct gerichtet hat. Wollte man aber lieber den unteren Rand des Brettes an den Nivellir-Latten anmerken; so müßten bey der ersten Berichtigungsmethode auch die Visir-Strahlen an den unteren Rand des Brettes gerichtet werden. Hingegen bey der zweyten Berichtigungsmethode und bey wirklichen Nivellir-Operationen wird der Visir-Strahl jederzeit auf den Zielpunct gerichtet, und die Erhöhung des unteren Randes des Zielbrettes an jeder Latte bemerket, wenn das Zielbrett an beyden Nivellir-Latten einerley Abmessungen hat

Die oben beschriebene Nivellir-Wage wird ein Nivellir-Instrument mit einem einfachen Fernrohre genannt, um dasselbe von anderen Nivellir-Wagen zu unterscheiden, welche entweder mit zwey parallelen Fernröhren, oder auch nur mit einem einzigen Fernrohre versehen sind, bey welchem aber zwey Objectiv-Gläser dergestalt angebracht sind, daß man von beyden Seiten das Ocular-Glas einschieben kann. Da es nicht gar leicht ist bey einer jeden vorzunehmenden Nivellir-Operation die richtige Uebereinstimmung der Achsen

von

Fig. von beyden Objectiv-Gläsern und der in beyden Brennpuncten angebrachten Kreuzfäden an solchen Nivellir-Instrumenten zu untersuchen, so wird derjenige am besten handeln, der mit einem solchen Instrumente eine Nivellir-Operation auszuführen hat, wenn er sich desselben nur wie eines Nivellir-Instrumentes mit einem einfachen Fernrohre bedienet, und dieses auf die oben beschriebene Art berichtiget. Wenn man z. B. mit einem Nivellir-Instrumente, dessen Fernrohr mit zwey Objectiv-Gläsern versehen ist, eine Nivellir-Operation auszuführen hat; so kann man sich vornehmen das Ocular-Glas immer an derjenigen Seite stehen zu lassen, wo die Elevations-Schraube angebracht ist, und man muß sodann von dieser Seite das Nivellir-Instrument eben so berichtigen, als ob es nur mit einem gewöhnlichen einfachen Fernrohre versehen wäre.

Es gibt auch Nivellir-Wagen mit der Luftblase, bey denen anstatt des Fernrohres doppelte horizontale Dioptern angebracht sind. Dergleichen Nivellir-Wagen werden auf folgende Art berichtiget. Man läßt in einer Entfernung von 30 oder
169. 40 Klaftern (Fig. 169.) eine Nivellir-Latte AB aufstellen, bringt mittelst der Elevations-Schraube die Luftblase an ihre angewiesene mittlere Stelle, und läßt die Höhe des Visir-Strahls Am anmerken. Nun wendet man die Wasserwage so um, daß das Diopter a gegen die Latte gekehret sey, bringet abermahl die Luftblase mittelst der Elevations-Schraube an ihre angewiesene mittlere Stelle, und läßt wieder die Höhe des Visir-Strahls An anmerken. Sind nun beyde Visir-Höhen vollkommen gleich; so war die Wasserwage zuvor berichtiget. Sind hingegen die Visir-Höhen ungleich; so weichen die zwey Visir-Strahlen nach entgegen gesetzten Richtungen von der Horizontal-Linie bp gleichviel ab. Daher theile man den Unterschied mn auf der Latte in p in zwey gleiche Theile, richte den Visir-Strahl nach p, bringe bey dieser Richtung des Diopter-Lineals die Luftblase mittelst der Rectificir-Schraube an ihre angewiesene mittlere Stelle; so ist dadurch ein solches Nivellir-Instrument berichtiget.

§. 616.

§. 616.

Fig. 170.

Aufgabe. Den Höhenunterschied zweyer Puncte A und B zu finden, die so weit von einander entfernt sind, daß man aus einem einzigen Zwischenstande nicht nach beyden Puncten visiren kann. Fig. 170.

Auflösung. 1) Man lasse eine Latte durch einen Gehülfen in A, und in einer schicklichen Entfernung AC durch einen anderen Gehülfen ebenfalls eine Latte in C aufrichten, das Nivellir-Instrument aber stelle man nach dem Augenmaße beyläufig in die Mitte zwischen A und C in Nro. 1., damit man die Erhöhung des scheinbaren Horizontes außer Acht lassen kann. Sodann bringe man den Visir-Strahl des berichtigten Nivellir-Instrumentes in den scheinbaren Horizont einmahl gegen F und einmahl gegen G, und lasse jeden Gehülfen seine Visir-Höhe, nähmlich die Erhöhung des unteren Randes des Zielbrettes über den Boden, aufschreiben.

2) Man schicke den vorderen in C gestandenen Gehülfen mit seiner Latte weiter auf eine schickliche Entfernung nach D, den zweyten in A gestandenen Gehülfen aber lasse man seine Latte, über den Punct C aufrichten, und stelle das Nivellir-Instrument beyläufig in die Mitte zwischen C und D in Nro. 2., visire sodann nach I und H, und lasse abermahl jeden Gehülfen seine Visir-Höhe aufschreiben.

3) Eben dasselbe beobachte man auch in den folgenden Standpuncten, nähmlich der vordere nun in D gestandene Gehülfe wird weiter nach E geschicket, der hintere nun in C gestandene Gehülfe stellet seine Latte auf den Punct D, das Instrument aber wird in Nro. 3 aufgerichtet; u. s. w. bis nähmlich der vordere Gehülfe in B angelanget ist.

4) Endlich lasse man jeden Gehülfen seine gefundenen Visir-Höhen zusammen addiren, und ziehe die kleinere Summe von der größeren ab; so ist der Ueberrest der gesuchte Höhenunterschied zwischen A und B. Ist nun die Summe der Visir-Höhen des vorderen Gehülfen, der mit seiner Latte zuletzt auf B stand, kleiner als die Summe des hinteren Gehülfen, der zuerst auf A stand; so liegt B um den gefunde-

Fig. nen Unterschied höher als A. Im Gegentheile liegt B um
170. eben diesen Unterschied niedriger als A.

Denn es ist AF — CG = Cc
CH — DI = Dd
DK — EL = — Dm
EM — BN = — Ee;

folglich auch AF+CH+DK+EM—(CG+DI+EL+BN)
=(Cc+Dd) — (Dm+Ee) = (dQ + Dd) — (Dm + mn)
=DQ — Dn=Qn=AP=Bb.

Anmerkung. Es ist nicht unumgänglich nothwendig, daß die Standpuncte des Nivellir-Instrumentes und die Latten alle in einer und derselben Vertical-Ebene sich befinden. Man erhält den gesuchten Höhenunterschied der zwey Puncte A und B eben so richtig, wenn man schon wegen dazwischen liegender Hindernisse nach was immer für einem Umwege von A bis B zu nivelliren gezwungen ist.

§. 617.

Aufgabe. Die Abstände mehrerer Puncte von dem
171. Horizonte eines angenommenen Punctes A (Fig. 171.) durch das Nivelliren zu finden, es mögen die zu nivellirenden Puncte entweder alle in einer und derselben Vertical-Ebene sich befinden, oder in einer Gegend zerstreuet herumliegen.

Auflösung. 1) Man lasse an alle solche Oerter Pflöcke einschlagen, wo sich merkliche Veränderungen des Bodens zeigen, nähmlich man bemerke alle zu nivellirenden Puncte mit Pflöcken, und stelle das Nivellir-Instrument unweit A in Nro. 1., die Latte aber durch einen Gehülfen in A, und lasse die Visir-Höhe Aa genau anmerken. Sodann stellt eben derselbe Gehülfe seine Latte in B, subtrahirt die Visir-Höhe in B von der in A gefundenen Aa, und schreibt den Unterschied an den in die Erde eingeschlagenen Pflock mit dem Zeichen + an, wenn er positiv ist. Wäre hingegen dieser Unterschied negativ und folglich B niedriger als A, so müßte er mit dem Zeichen — angeschrieben werden. Darauf stellt eben dieser Gehülfe seine Latte über C, subtra-

trahirt abermahl die Visir-Höhe Cp von der ersten in A beobachten Aa, und verfährt übrigens wie in B. Auf diese Art können nun mehrere Puncte um Nro. 1. herum aus diesem Standpuncte durch das Vergleichen mit der in A beobachteten und angemerkten Visir-Höhe nivellirt werden. Fig. 171.

2) Sodann überträgt man das Nivellir-Instrument weiter in Nro. 2. Der erwähnte Gehülfe stellet seine Latte auf was immer für einen schon bestimmten Punct z.B. auf den Punct C, beobachtet die Visir-Höhe Cc, und addiret zu derselben den auf dem Pflocke C aufgeschriebenen Höhenunterschied PC mit dem gehörigen Zeichen + oder —, um Pc nähmlich den Abstand des Visir-Strahles cs von dem Horizonte AZ zu erhalten. Mittelst dieser Höhe Pc, die wir die Vergleichungshöhe nennen wollen, werden nun die Abstände der Puncte D, E, F von dem Horizonte AZ gefunden, wenn der Gehülfe die Visir-Höhen Dq, Er, Fs von der in C gefundenen Vergleichungshöhe Pc abzieht, und die Unterschiede mit den entsprechenden Zeichen + oder — an die Pflöcke bey D, E, F gehörig anschreibet. Auf diese Art können abermahl mehrere Puncte um Nro. 2. herum mittelst der Vergleichungshöhe Pc dieses Standpunctes nivelliret werden.

3) Man übertrage das Nivellir-Instrument weiter in Nro. 3., der Gehülfe stelle seine Latte auf was immer für einen schon nivellirten Punct z. B. auf F, und addire zu der Visir-Höhe Ff den an dem Pflocke F angeschriebenen Höhenunterschied mit dem entsprechenden Zeichen + oder — um für diesen neuen Standpunct Nro. 3. die Vergleichungshöhe Sf zu finden. Darauf stellt eben derselbe Gehülfe seine Latte in G und dann in H, subtrahiret die Visir-Höhen Gt, Hx von der in F bestimmten Vergleichungshöhe Sf dieses Standpunctes, und schreibt die Unterschiede mit dem gehörigen Zeichen + oder — an die Pflöcke in G und H; u. s. w.

Fig. 171. Es wir ein jeder leicht einsehen, daß man die angeführte Subtraction der Visir-Höhen von der Vergleichungshöhe vermeiden könne, wenn man bey jedem Standpuncte die gefundene Vergleichungshöhe auf die Nivellir-Latte gehörig aufträgt, und mit einem Merkmahle bezeichnet, weil sich sodann unmittelbar die Höhenunterschiede der nivellirten Puncte auf der Latte ergeben. Nähmlich der Abstand des Merkmahles von dem unteren Rande des Zielbrettes gibt den gesuchten Höhenunterschied des nivellirten Punctes. Dieser Höhenunterschied ist positiv, wenn das Merkmahl höher steht, oder er ist negativ nähmlich eine Vertiefung, wenn das Merkmahl der Vergleichungshöhe niedriger ist, als die Visir-Höhe des nivellirten Punctes bis an den unteren Rand des Zielbrettes. Wenn man mit mehreren Nivellir-Latten, und mit mehreren verläßlichen Gehülfen versehen ist; so kann um die Arbeit zu beschleunigen, bey einem jeden Standpuncte die entsprechende Vergleichungshöhe auf eine jede Latte aufgetragen werden. Die Gehülfen schicket man sodann mit diesen Latten auf die um den Standpunct herumliegenden Puncte, und läßt sie die gefundenen Höhenunterschiede mit dem entsprechenden Zeichen + oder — auf die Pflöcke gehörig aufschreiben, womit die zu nivellirenden Puncte bemerket sind.

Wenn nun die Puncte A, B, C, D, u. s. w. alle in einer und derselben Vertical-Ebene liegen; so werden sodann ihre horizontalen Abstände gemessen, um ihre Entfernungen von dem Puncte A zu erhalten, welche man darauf sammt den zugehörigen Höhenunterschieden in eine Tafel ordentlich einträgt. Nähmlich:

Ent=

Entfernungen von dem Puncte A.		Abstände von dem Horizonte AZ.		
	O Kl.		O^{I}	O^{II} O^{III}
A				
B	18 —	+	3	9 4
C	59 —	+	3	8 6
D	101 —	+	2	3 11
E	124 —	—	2	6 9
F	145 —	—	1	1 5
G	197 —	+	2	3 0
H	219 —	—	7	2 4
I	258 —	—	8	4 3

Nachdem einmahl diese Tafel fertig ist, so ist es gar leicht den Durchschnitt der nivellirten Strecke nach einem beliebigen verjüngten Maßstabe auf einer Geraden AZ zu verzeichnen. Auch kann man sodann vermittelst dieser Tafel den Höhenunterschied von jeden zwey nivellirten Puncten finden, wenn man ihre Abstände von der Horizontal-Linie AZ in der Tafel gehörig von einander abzieht. Fig. 171.

Wenn hingegen die nivellirten Puncte auf einer Gegend zerstreuet herumliegen, so müssen dieselben mit dem Meßtische ordentlich aufgenommen, und die entsprechenden Höhenunterschiede dazu aufgeschrieben werden. Will man nicht zu jedem nivellirten Puncte des aufgenommenen Planes den zugehörigen Höhenunterschied schreiben, um nicht denselben mit allzuvielen Ziffern zu überhäufen; so kann man die aufgenommenen Puncte auf dem Plane mit Buchstaben a, b, c, ... a', b', c', ... bezeichnen, und diese Buchstaben sammt den entsprechenden Höhenunterschieden in eine Tafel ordentlich eintragen.

Man muß bey dieser Nivellir-Operation nicht auf gar große Entfernungen etwa nicht über 100 Klaftern visiren, damit man die Erhöhung des scheinbaren Horizontes außer Acht lassen könne.

§. 618.

Aufgabe. Es sey PQR eine Grube, die bis auf eine durch den Punct A gelegte horizontale Fläche auszufüllen ist; man soll den Cubikinhalt der Grube unter dieser Horizontal-Fläche berechnen, damit man die Menge der zur Ausfüllung erforderlichen Erde bestimmen könne. Fig. 172.

Auf-

Fig. 172. Auflösung. 1) Man suche an den Wänden der Grube mehrere Puncte B, C .... D, E .... welche in der durch A gelegten Horizontal-Fläche liegen. Dieses geschieht wenn man das Nivellir-Instrument etwa in c stellet, über den gegebenen Punct A eine Nivellir-Latte aufrichten, auf derselben die Visir-Höhe bemerken, und in dieser Höhe das Zielbrett befestigen läßt. Mit dieser Latte schicket man sodann den Gehülfen gegen B, und läßt ihn so lange daselbst mit aufgerichteter Latte und unverrucktem Brette hin und hergehen, und einen Punct B suchen, bis der Visir-Strahl genau auf das Zielbrett eintrifft; dieser Punct B wird sodann mit einem Pflocke bezeichnet. Auf diese Art sucht man mehrere Puncte C, D, E ..... Wenn man nun aus diesem Standpuncte c nicht den ganzen Umfang der Grube übersehen kann, so muß man sodann das Nivellir-Instrument weiter in f aufrichten, die Latte aber auf einen bereits schon gefundenen Punct z. B. auf C stellen. Von f visiret man auf C, und läßt in der Höhe des horizontalen Visir-Strahls abermahl das Zielbrett befestigen. Mit dieser Visir-Höhe suchet nun der Gehülfe, eben so wie bey dem vorigen Standpuncte, mehrere Puncte F, G, H, welche mit C und folglich auch mit A in einem und demselben Horizonte liegen, und bemerket diese gefundenen Puncte mit Pflöcken.

2) Ist einmahl die horizontale Gränze ABCFGHEDA gefunden und jeder Winkel derselben mit einem Pflocke bemerket; so theilet man die ganze innere Oberfläche der Grube unter der bestimmten Horizontal-Fläche, durch die Puncte a, b, c, d, e, dergestalt in Dreyecke ein, daß jedes Dreyeck für sich betrachtet nach dem Augenmaße eine ebene wie immer schief geneigte Fläche ausmachet. Sodann bestimmet man durch das Nivelliren (nach §. 617.) die Vertiefungen der Puncte a, b, c, d, ... unter der Horizontalfläche ACH, schreibet die gefundenen Vertiefungen an die Pflöcke, womit die Puncte a, b, c, d, ... bemerket sind, und nimmt darauf die ganze Figur ordentlich mit dem Meßtische auf, um alle horizontalen Grundflächen AbD, Aba,

abc,

abc, ... zu erhalten, und schreibet zu einem jeden aufgenommenen Puncte seine entsprechende Vertiefung. Fig. 172.

3) Endlich berechnet man den Flächeninhalt eines jeden aufgenommenen horizontalen Dreyeckes, stellet sich vor, daß der innere Raum der Grube unter der Horizontal-Fläche ACH aus so vielen dreyseitigen an dem unteren Ende schief abgeschnittenen geraden Prismen zusammengesetzet sey, als Dreyecke da sind, berechnet den Cubikinhalt eines jeden Prisma aus seiner horizontalen Grundfläche, und aus seinen drey nivellirten Seiten oder Höhen (nach §. 523.), und addiret alle diese berechneten Prismen zusammen; so wird der gesuchte Cubikinhalt der Grube zum Vorschein kommen. Es sey zum Beyspiel der berechnete Flächeninhalt des Dreyeckes abc = 1500 □', und die Vertiefung des Punctes a = $5^{I}6^{II}$ = $5\frac{I}{2}{}^{I}$, b = 7^{I}, c = $10\frac{I}{4}{}^{I}$; so ist der Inhalt des schief abgeschnittenen Prisma, welches a b c zur Grundfläche hat = $1500 \times \frac{1}{3}(5\frac{1}{2} + 7 + 10\frac{1}{4}) = 11375$ Cub.-Fuß. Die äußersten Körper, wie z. B. AaB und Aab können immer als dreyseitige schief abgeschnittene Prismen angesehen werden, wenn man nur betrachtet, daß bey diesem Aab eine, und bey jenem AaB zwey Seiten = o sind. Es sey z. B. die horizontale Grundfläche Aab = 1000 □. Fuß; so ist der Cubikinhalt dieses Körpers = $1000.(\frac{5\frac{1}{2} + 7 + 0}{3})$ = $7583\frac{1}{2}$ Cub. Fuß u. s. w.

Wäre PQR nicht eine Grube, sondern ein Hügel, den man bis auf eine durch den Punct A gelegte horizontale Fläche abzutragen hätte; so könnte man seinen Cubikinhalt auf eben dieselbe Art berechnen.

Eben so, wie man im gegenwärtigen Falle die Puncte B, C, D, E, ... bestimmet hat, die mit A in eben demselben Horizonte liegen, kann auch auf einer zur Ueberschwemmung eingerichteten Gegend die Ueberschwemmungsgränze gefunden werden, wenn es bekannt ist, wie hoch das Wasser durch eine Schleuse oder durch sonst ein vorgelegtes Hinderniß aufgeschwellet wird.

Fig. Endlich bedienet man sich auch der Nivellir-Wage, wenn in einer Linie oder in einer Gegend mehrere Pflöcke dergestalt einzuschlagen sind, daß ihre Köpfe alle in einem und demselben Horizonte sich befinden. Wenn die Abstände der Pflöcke sehr klein sind, so kann man dieses mittelst einer gemeinen Schrottwage oder auch mittelst einer Libelle mit der Luftblase erhalten. Der Schrottwage oder der Libelle bedienet man sich auch, wenn eine ziemlich steile aber doch zugängige Anhöhe von einigen Klaftern durch horizontal und vertical gestellte Stäbe oder Latten auszumessen ist. Dieses Verfahren ist unter dem Nahmen Cultelliren bekannt.

Anmerkung. Nebst den zwey in §. 615. angegebenen Berichtigungsmethoden der Nivellir-Instrumente gibt es noch eine, bey der man nicht nöthig hat eine Entfernung genau zu messen. Man läßt nähmlich auf einem ziemlich ebenen Boden eine Nivellir-Latte aufrichten, und stellt in einer mittleren Entfernung davon von beynahe 400 bis 500 Schritten, damit der Höhenunterschied des wahren und scheinbaren Horizontes außer Acht gelassen werden könne, das Nivellir-Instrument auf. Wenn nun dasselbe in eine solche Lage gebracht worden ist, daß die Luftblase in der Mitte einspielt; so lasse man auf der Latte die Höhe des Visir-Strahles bemerken. Zieht man ferner von dieser Höhe die Höhe des Instrumentes ab, so erhält man den Höhenunterschied von dem Standpuncte des Instrumentes und von dem Standpuncte der Latte. Sodann übertrage man das Instrument auf den zweyten und die Latte auf den ersten Punct, und gehe hier eben so wie bey dem ersten Puncte vor. Sind in beyden Fällen die Höhenunterschiede gleich, so war das Instrumen schon berichtiget; sind sie aber ungleich, so trage man die halbe Summe der zwey so gefundenen Höhenunterschiede auf die Latte, richte den Visir-Strahl auf den dadurch bestimmten Punct, und bringe dann die Luftblase mittelst der Rectificir-Schraube in die Mitte. Dadurch ist nun das Nivellir-Instrument berichtiget; wovon man sich durch das Stellen auf den andern Punct überzeugen kann.

IV. Abschnitt.

Fig.

Von dem Gebrauche des Barometers bey Höhenmessungen.

§. 619.

Es ist zuweilen erforderlich den Höhenunterschied zweyer Oerter zu finden, die so weit von einander entfernt sind, daß man den gesuchten Höhenunterschied weder mittelst des Nivellirens, noch auch mittelst einer trigonometrischen Operation füglich bestimmen kann. In einem solchen Falle nimmt man die Zuflucht zu dem Barometer. Es ist nähmlich aus der Naturlehre bekannt, daß das Gewicht der auf die Oeffnung der Barometer-Röhre drückenden atmosphärischen Luftsäule das Queckſilber im Barometer in einer solchen Höhe erhalte, das das Gewicht einer Queckſilbersäule, welche die offene Oberfläche des Queckſilbers zur Grundfläche und den Höhenunterschied beyder Oberflächen des Queckſilbers zur Höhe hat, eben so viel beträgt, als das Gewicht der auf die offene Oberfläche des Queckſilbers drückenden Luftsäule, und daß folglich die Gewichte verschiedener Luftsäulen von ungleichen Höhen und gleichen Grundflächen sich gegen einander verhalten wie die Höhen, auf welchen sie das Queckſilber im Barometer erhalten. Es sey z. B. einer Luftsäule, welche sich von dem Fuße eines Berges bis auf die äußerste Gränze der Atmosphäre erstrecket, und p Quadrat-Zolle zur Grundfläche hat, wirkliches Gewicht $= G$, einer anderen Luftsäule von eben derselben Grundfläche, welche sich von dem Gipfel des Berges bis auf die äußerste Gränze der Atmpsphäre erstrecket, wirkliches Gewicht sey $= g$, die erste Luftsäule erhalte das Queckſilber in einer Höhe von a Zollen, und die zweyte nur in einer Höhe von b Zollen, ferner sey das wirkliche Gewicht eines Cubik-Zolles Queckſilber $= m$ ℔; so ist aus der Hydrostatik bekannt, daß $G = apm$ ℔ und $g = bpm$ ℔ ist; folglich ist auch $G : g = apm : bpm = a : b$.

Fig. I. Damit man nun den Höhenunterschied zweyer Oerter aus ihren mittleren Barometer = Höhen bestimmen könne, muß man zuerst ausfindig machen, nach was für einem Gesetze die Barometer = Höhen von dem Horizonte gegen die Atmosphäre hinaufwärts abnehmen, wenn man die Erhöhungen über den Horizont in einer arithmetischen Reihe auf einander folgen läßt, oder weil (vermöge des Vorhergehenden) die Barometer = Höhen an verschiedenen Erhöhungen sich gegen einander verhalten, wie die Gewichte der auf die offene Oberfläche des Queckfilbers drückenden Luftsäulen von gleichen Grundflächen; so muß man ausfindig machen, nach was für einem Gesetze die Gewichte der Luftsäulen von gleichen Grundflächen in gleichen auf einander folgenden Erhöhungen über einen angenommenen Horizont abnehmen. Es
192. sey z. B. MPQN (Fig. 192.) eine verticale atmosphärische Luftsäule, die sich von der horizontalen Fläche MN bis auf die äußerste Gränze der Atmosphäre erstrecket. In gleichen Abständen Mm = mp = pr .. .. sey diese Luftsäule durch die horizontalen Flächen mn, pq, rs .... durchschnitten. Man bezeichne ferner die Gewichte der auf einander folgenden Luftsäulen MQ, mQ, pQ...., welche auf die gleichen Flächen MN, mn, pq.... drücken, mit *A*, *B*, *C*, *D*..; so wird verlanget, daß man ausfindig mache, nach was für einem Gesetze die Gewichte *A*, *B*, *C*, *D* .... abnehmen. Um dieses Gesetz zu entdecken, müssen wir aus der Naturlehre den Satz für bekannt annehmen, daß die Dichtigkeiten der atmosphärischen Luft an verschiedenen noch zugängigen Höhen über einem angenommenen Horizonte sich gegen einander verhalten, wie die Kraft oder wie das Gewicht, womit die Luft zusammen gepresset wird; oder welches einerley ist, daß die wirklichen Gewichte der atmosphärischen Luft in gleichen Räumen (unter eben demselben Cubikinhalte) sich gegen einander verhalten, wie die Kräfte, oder wie die Gewichte, womit die Luft in diesen gleichen Räumen zusammengepreßt erhalten wird.

II. Es sey nun in dem Raume Mn das Gewicht der Luft = *a'*, welche von dem Gewichte *B* der darauf drückenden

den Luftsäule mQ gepresset wird. In dem eben so großen Raume mq sey das Gewicht der Luft $= b'$, welche von dem Gewichte C der darauf drückenden Luftsäule pQ gepresset wird; u. s. w. die Barometer-Höhen an den Stellen M, m, p, r aber sollen $= a, b, c, d \ldots\ldots$ seyn; so finden vermöge des angeführten Satzes folgende Proportionen statt: Fig. 192.

$a' : B = b' : C$; $b' : C = c' : D$; $c' : D = d' : E$; u. s. w.

Es ist aber offenbar $a' = A - B$; $b' = B - C$; u. s. w.

folglich $A - B : B = B - C : C$; $B - C : C = C - D : D$; u. s. w.

und endlich durch die Zusammensetzung (componendo)

$A : B = B : C$; $B : C = C : D$; $C : D = D : E$; u. s. w.

nähmlich die Gewichte $A, B, C, D \ldots\ldots$ der in einer arithmetischen Reihe auf einander folgenden Luftsäulen nehmen gegen die Gränze der Atmosphäre hinaufwärts in einer geometrischen Reihe ab.

Da nun auch $A:B:C:D \ldots\ldots = a:b:c:d \ldots\ldots$ statt findet (§. 619.), so nehmen auch die Barometer-Höhen an den Stellen $m, p, q, r \ldots$ in einer geometrischen Reihe ab, wenn die Erhöhungen dieser Stellen über den Horizont MN in einer arithmetischen Reihe auf einander folgen.

III. Nun sey die Erhöhung $MR = k$, die Erhöhung $MS = x$, und MR sey in MS genau $n$mahl enthalten, nähmlich $x = nk$; so ist $n = \frac{x}{k}$. Ferner sey die Barometer-Höhe in $M = a$, in $R = f$, und in $S = g$; so sind die Barometer-Höhen an den in einer arithmetischen Reihe auf einander folgenden Stellen 0, 1, 2, 3, $\ldots\ldots n$, weil sie in einer geometrischen Reihe abnehmen.

$$= a, f, \frac{f^2}{a}, \frac{f^3}{a^2}, \ldots\ldots \frac{f^n}{a^{n-1}} = a\left(\frac{f}{a}\right)^n.$$

Es ist aber an der Stelle n die Barometer-Höhe $= g$ gesetzet worden; folglich ist $g = a\left(\frac{f}{a}\right)^n$, oder endlich

$g = a\left(\frac{f}{a}\right)^{\frac{x}{k}}$ wenn man statt n seinen Werth setzet.

IV.

Fig. 192. IV. Aus dieser letzten Gleichung folgt nun

$$x = k\left[\frac{\log a - \log g}{\log a - \log f}\right].$$

Diese gefundene Gleichung zeigt uns an, daß man aus den bekannten mittleren Barometer-Höhen a, g zweyer Oerter M, S ihren Höhenunterschied $x = MS$ bestimmen kann, wenn man an einem dritten Orte R (dessen Erhöhung $= k = MR$ über den Ort M sich füglich trigonometrisch ausmessen läßt) die Barometer-Höhe f zu einer Zeit beobachtet, da der Barometer an dem Orte M auf seinen mittleren Stand weiset. Die Barometer-Höhen können nach einem beliebigen jedoch alle drey nach einem und demselben Maßstabe, z. B. in Wiener Duodecimal-Linien bestimmet werden. Der gemessene Höhenunterschied k kann in einem anderen Maße z. B. in Pariser-Klaftern ausgedrucket werden, und der gesuchte Höhenunterschied x wird sodann nach gehöriger Reduction in eben demselben Maße zum Vorschein kommen, womit man den gemessenen Höhenunterschied k ausgedrucket hat.

Z. B In Wien ist an dem Horizonte, der ohngefähr durch den Fuß des St. Stephans Thurms durchgeht, die mittlere Barometer-Höhe $a = 336$ Wiener-Linien, und am Kahlenberge unweit von Wien sey an dem Horizonte der Kirche die mittlere Barometer-Höhe $g = 325{,}5$ Wiener-Linien. Um nun die Erhöhung x des Kirchen-Horizontes am Kahlenberge über den St. Stephans-Horizont zu bestimmen, so messe man ein Stück von der Höhe des St. Stephans-Thurmes z. B. das Stück vom Fuße des Thurmes bis auf die Achse, worauf die Uhrzeiger befestiget sind. Diese Höhe beträgt nun ziemlich genau 37 Wiener-Klafter. Ferner beobachte man an diesem Orte die Barometer-Höhe f zu einer Zeit, da am Fuße des Thurmes die Barometer-Höhe 336 Wiener-Linien beträgt. Es sey zu dieser Zeit bey der Uhrachse die Barometer-Höhe $f = 333{,}15$ Wiener-Linien. Nun wird, um die Erhö-

höhung des Kirchen- Horizontes am Kahlenberge über den St. Stephans-Horizont zu finden; die Rechnung auf folgende Art angelegt: Fig.

$\log a = \log 336 = 2{,}5263393$
subtr. $\log g = \log 325{,}5 = 2{,}5125510$

$\log a - \log g = 0{,}0137883 = D$
subtr. $\log f = \log 333{,}15 = 2{,}5226398$ von $\log a$.

$\log a - \log f = 0{,}0036995 = d$

$\log D = 0{,}1395108 - 2$
subtr. $\log d = 0{,}5081430 - 3$

$0{,}5713678$
addirt $\log k = \log 37 = 1{,}5682017$

gibt $\log x = 2{,}1395695$
folglich $x = 137{,}9 = 138$ Wien. Klaft.

Es wird ohne meine Erinuerung ein jeder leicht einsehen, daß man auch den Höhenunterschied zwischen dem Kirchen-Horizonte am Kahlenberge und zwischen dem St. Stephans-Horizonte aus ihren für bekannt angenommenen mittleren Barometer-Höhen finden kann, wenn man am Kahlenberge eine leicht auszumessende Höhe wirklich genau ausmißt, und an dieser Höhe die Barometer-Höhe zur gehörigen Zeit beobachtet. Es sey z. B. an dem höchsten Thurmfenster am Kahlenberge die Barometer-Höhe $= 324$ Wiener-Linien zu einer Zeit, da am Kirchen-Horizonte die Barometer-Höhe 325,5 und am St. Stephans-Horizonte 336 Wiener-Linien beträgt; die Erhöhung des angeführten Thurmfensters über den Kirchen-Horizont sey $= 20{,}07$ Wiener-Klafter. Aus diesen wird nun der gesuchte Höhenunterschied bestimmet, wenn man $a = 325{,}5$, $g = 336$, $f = 324$, $k = 20{,}07$ setzet, und diese Werthe in der gefundenen Gleichung $x = k \left[\frac{\log a - \log g}{\log a - \log f}\right]$ gehörig substituiret.

Nähm-

Fig. Nähmlich $\log a = \log 325{,}5 = 2{,}5125510$
subtr. $\log g = \log 336 = 2{,}5263393$

$\log a - \log g = (-)0{,}0137883 = D$
subtr. $\log f = \log 324 = 2{,}5105450$ von $\log a$

$\log a - \log f = 0{,}0020060 = d$

$\log D = 0{,}1395108 - 2$
subtr. $\log d = 0{,}3023309 - 3$

$0{,}8371799$
addiret $\log k = \log 20{,}07 = 1{,}3025474$

gibt $\log x = 2{,}1397273$
folglich $x = 137{,}95 = 138$ W. Klafter
oder vielmehr wegen des Zeichens (—) ist $x = -138$ W. Kl.

Dieses Zeichen (—) zeiget an, daß der gesuchte Höhenunterschied in Hinsicht auf den Kirchen-Horizont am Kahlenberge negativ, nähmlich eine Vertiefung sey.

V. Der Höhenunterschied zweyer Oerter läßt sich aus ihren mittleren Barometer-Höhen noch bequemer berechnen, aber vielleicht nicht so zuverlässig, als nach der eben angeführten Art. Man kann nähmlich die Rechnung auf folgende Art abkürzen.

Wenn man mehrere mit dem Barometer angestellte Versuche mit einander vergleichet, so findet man erstens, daß an der Meeresfläche die mittlere Barometer-Höhe 345 Wiener-Linien beträgt; zweytens: daß in einer Erhöhung von $25\frac{1}{4}$ Wiener-Klafter über die Meeresfläche die Barometer-Höhe um 2 Wiener-Linien niedriger; nähmlich 343 Wiener-Linien gleich ist. Setzen wir daher in der oben (IV.) gefundenen Gleichung, $a = 345$, $f = 343$, $k = 25\frac{1}{4} = 25{,}25$, und die Erhöhung eines beliebigen Ortes über die Meeresfläche, dessen mittlere Barometer-Höhe g Wiener-Linien beträgt, $= y$; so ist nach gehöriger Reduction $y = 10000 (\log 345 - \log g)$ Wiener-Klafter. Eben so ist die Erhöhung y' eines anderen Ortes über die Meeresfläche, dessen mittlere Barometer-Höhe g' Wie-

ner-

ner = Linien beträgt, $y' = 10000 . (\log 345 - \log g')$ Fig. Wiener=Klafter. Es ist also auch $y' - y = 10000 . (\log 345 - \log g') - 10000 . (\log 345 - \log g) = 10000 . (\log g - \log g')$ Wiener = Klafter, oder wenn wir $y' - y = x$, $g = b$ und $g' = c$ setzen, so ist

$x = 10000 (\log b - \log c)$ Wiener = Klafter.

Nähmlich man drucke die mittleren Barometer=Höhen b und c der zwey Oerter, deren Höhenunterschied gesucht wird, beyde in Linien oder auch beyde in Zollen aus, und multiplicire die Differenz der Logarithmen von diesen Barometer=Höhen mit 10000, welches gar leicht geschieht, wenn man das (,) um vier Stellen weiter gegen die Rechte rücket; so wird der gesuchte Höhenunterschied in Wiener=Klaftern zum Vorschein kommen.

Z. B. der Höhenunterschied zwischen dem St. Stephans = Horizonte in Wien und zwischen dem Kirchen=Horizonte am Kahlenberge wird aus den angenommenen mittleren Barometer = Höhen dieser zwey Oerter $b = 336$ und $c = 325{,}5$ auf folgende Art gefunden.

$\log 336 = 2{,}5263393$

$\log 325{,}5 = 2{,}5125510$

$10000 \times 0{,}0137883 = 138$ Wiener = Klaft.

Wir wollen diese Regel noch auf folgendes wirkliches Beyspiel anwenden. Nach Hr. Bouguers Beobachtung (Figure de la Terre, Paris 1749.) ist auf dem Gipfel des Berges Pichincha in Peru die Barometer = Höhe $c = 191$, und zu Carabourou ist die Barometer = Höhe $b = 254{,}75$ Pariser = Linien.

Nun ist $\log 254{,}75 = 2{,}4061142$
und $\log 191 = 2{,}2810334$ } subtr.

mult. mit $10000 \times 0{,}1250808 = 1250{,}8$ W. Kl.; folglich ist die Erhöhung des Pichincha über Carabourou gleich 1250,8 Wiener = Klafter. Durch die genaueste trigono=

Fig. gonometrische Bestimmung fand Hr. Bougner diese Erhöhung = 1209 Pariser-Klafter, welche sehr nahe 1242,4 Wiener-Klaftern gleich sind. Die Berechnung nach der gegebenen Regel weicht demnach von der wirklichen Ausmessung bey 1250 ungefähr nur um 8 Klafter ab. Es ist leicht einzusehen, daß es in diesem Falle gar nicht nothwendig ist die in Pariser-Linien ausgedruckten Barometer-Höhen auf Wiener-Linien zu reduciren.

Wenn man die Höhe eines Berges mittelst des Barometers bestimmen will; so muß man zwey übereinstimmende Barometer haben, und bey einer gelinden Witterung beynahe zu einer und derselben Zeit am Fuße und auch am Gipfel des Berges die Barometer-Höhen beobachten lassen. In einigen Fällen wird der Beobachter am Berge mit einem Feuer-Signale das Zeichen zur Beobachtung geben können; sodann wird sowohl am Gipfel als auch am Fuße des Berges in mehreren auf einander folgenden Zeittheilen die Barometer-Höhe beobachtet, und dabey zugleich die Zeit der Beobachtung angemerket.

VI. Die Barometer können auf folgende Art übereinstimmend gemacht, nähmlich dergestalt zubereitet werden, daß an einem und demselben Orte in allen Barometern das Queckſilber in einerley Zeitpuncten immer gleich hoch stehe.

Man nimmt mehrere cylindrische gläserne Röhren, deren jede ohngefähr 45 Zoll in der Länge und etwa $1\frac{1}{2}$ oder 2 Linien im inneren Durchmesser hat, schließt das eine Ende bey jeder Röhre hermetisch (daß keine äußere Luft eindringen könne) und biegt das andere offene Ende der Röhre in einer Entfernung von 33 Zollen von dem zugeschlossenen Ende herunter gerechnet zurück. Sodann füllet man diese Röhren mit wohl gereinigtem Queckſilber, nachdem sie zuvor von Staub und Feuchtigkeit sorgfältig gereiniget worden sind, und schaffet durch öfteres Umkehren die noch zurückgebliebene Luft heraus. Darauf bindet man an das zugeschlossene Ende jeder Röhre einen biegsamen Eisen- oder Meßingdraht, und hänget alle diese Röhren an einer Mauer auf. Endlich

erhit-

erhitzet man gemächlich mittelst eines Wachslichtes das Fig.
Queckſilber in den Barometer = Röhren von oben abwärts
dergeſtalt, daß es zu kochen anfängt, und dadurch eine Men=
ge Luft in den leeren Raum hinauf ſtoßet, welche man dar=
auf durch das Umkehren aus der Röhre hinausſchaffen kann.
Nach dieſer Operation wird man in einer jeden Röhre die
Barometer = Höhe (den Höhenunterſchied beyder Oberflächen
des Queckſilbers eines vertical aufgehangenen Barometers)
um einige Linien kleiner finden, und zwar in derjenigen
Röhre wird die Barometer = Höhe am kleinſten ſeyn, bey
der durch das Erhitzen und Umkehren die meiſte Luft hinaus=
geſchaffet worden iſt, weil dadurch des Queckſilbers eigenthüm=
liches Gewicht (gravitas specifica), z. B. das wirkliche Ge=
wicht eines Cubik=Zolles, zugenommen hat. Durch dieſes
öfters wiederhohlte Verfahren macht man zu erſt zwey Ba=
rometer übereinſtimmend, und darauf wendet man eben die=
ſe Methode nach der Ordnung auf die übrigen Barometer
an, um ſie mit den erſten zweyen ſchon fertigen übereinſtim=
mend zu machen. Hat man nun auf dieſe Art ſchon meh=
rere z. B. fünf Barometer übereinſtimmend gemacht, und
findet bey der 6ten Röhre, nachdem man ſie ſchon einige
Mahl erhitzet hat, die Barometer = Höhe kleiner als in den
übrigen ſchon übereinſtimmenden; ſo kann man dieſe 6te
Röhre umgekehrt mit dem Buge aufwärts aufhängen, und
dieſelbe in dieſer Stellung ohngefähr in ihrer Mitte erhit=
zen. Wenn man darauf die Röhre wieder aufrecht ſtellet;
ſo wird man finden, daß in derſelben die Barometer = Höhe
etwas zugenommen hat, weil durch das Erhitzen aus
dem Queckſiber etwas Luft entwickelt wird, welche wegen
des ſtarken Druckes der Atmoſphäre nicht aus der Röhre
dringen kann, und folglich dadurch das eigenthümliche Ge=
wicht des Queckſilbers in der Röhre vermindert. Dieſe ent=
wickelte Luft wird man in der erhitzten Röhre ganz deutlich
in ſehr kleinen Bläschen ſehen. Nachdem aber die Hitze der
Röhre ſchon etwas abgenommen hat, werden die Luftbläs=
chen nicht mehr zu ſehen ſeyn. Durch dieſe mit der vori=
gen verbundene Methode kann man auch die angeführte 6te

Fig. Röhre mit den übrigen schon fertigen übereinstimmend machen.

Sind einmahl die Barometer auf diese Art übereinstimmend gemacht; so muß man dieselben auch noch dergestalt einrichten, daß zu einer und derselben Zeit an einem und demselben Horizonte in der Wärme und Kälte die Barometer-Höhe einerley sey. Dieses kann erhalten werden, wenn man in einem jeden der übereinstimmenden Barometer ein sehr kleines Luftbläschen durch die Hitze aus dem Queckfilber in den luftleeren Raum hinauftreibet; und dieses darinnen läßt. Die Größe dieses Luftbläschens läßt sich am füglichsten durch das Versuchen in einem sehr kalten Wintertage bestimmen (da das Reaumürsche Thermometer ohngefähr auf — 10 weiset), wenn man einen Zimmerofen dergestalt erwärmen läßt, daß sehr nahe beym Ofen eben dieses Thermometer ohngefähr auf + 40 weiset. Nachdem nähmlich ein kleines Luftbläschen in den luftleeren Raum schon hinaufgetrieben ist, so wird der Barometer mit seinem Gestelle, worauf sich die Eintheilung befindet, sehr nahe bey dem heißen Ofen aufgehangen, und daselbst so lange gelassen, bis er hinlänglich erwärmet ist. Darauf hänget man eben diesen Barometer in die sehr kalte Luft, und läßt ihn daselbst so lange verbleiben, bis er ohngefähr die Temperatur der Luft angenommen hat. Findet man nun, daß die Barometer-Höhe dieses Barometers sowohl bey dem heißen Ofen, als auch in der kalten Luft mit der Barometer-Höhe eines anderen übereinstimmenden Barometers immer einerley verbleibet, welcher sich an einem Orte von mittlerer Temperatur befindet; so hat das hinaufgetriebene Luftbläschen die gehörige Größe. Findet man aber, daß die Barometer-Höhe bey dem heißen Ofen verlängert, und in der kalten Luft verkürzet wird; so ist das Luftbläschen zu klein. Hingegen ist das Luftbläschen zu groß, wenn das Gegentheil geschieht. Daher muß man im ersten Falle das Luftbläschen vergrößern, im zweyten Falle aber verkleinern, und dieses Verfahren so lange wiederhohlen, bis man seinen Endzweck erreicht. Die Ursache hier-

von ist leicht einzusehen. Es ist nähmlich bekannt, daß so- Fig.
wohl die Luft als auch das Queckſilber ſich in der Wärme ausdehnen, jedoch die Luft nach einem viel ſtärkeren Verhältniſſe. Des Queckſilbers eigenthümliches Gewicht wird in der Wärme durch die Ausdehnung kleiner und folglich dadurch nach hydroſtatiſchen Gründen bey einerley Drucke der Atmoſphäre die Barometer = Höhe vergrößert. Da ferner durch eben dieſe Wärme auch das Luftbläschen ober dem Queckſilber in der Barometer = Röhre ausgedehnet und folglich die Queckſilberſäule ſtärker herunter gedrücket wird; ſo muß dadurch die Barometer = Höhe verkleinert werden. Dieſes Vergrößern und Verkleinern der Barometer = Höhe aber wird ſich gegen einander beynahe gänzlich aufheben, wenn das Luftbläschen ober dem Queckſilber die gehörige Größe hat.

Um die Barometer = Höhe jederzeit geſchwinde überſehen zu können, muß man an dem Geſtelle, worauf die Barometer = Röhre befeſtiget iſt, eine Eintheilung von Zollen und Linien anbringen. Der o Punct (der Anfangspunct der Eintheilung) kann bey der Oeffnung des aufwärts gekrümmten Schenkels angenommen werden. Nach dieſer Eintheilung wird die wirkliche Barometer= Höhe gefunden, wenn man die Abſtände der beyden Oberflächen des Queckſilbers von dem angenommenen o Puncte, zuſammen addiret. Die Decimal= Theile der Linien können durch Hülfe eines Verniers beſtimmet werden. Siehe Fig. 206. 206.

VII. Aus der oben gefundenen Gleichung $x = 10000 \times (\log b - \log c)$ fließt auch $\log c = \log b - 0{,}0001\, x$, und $\log b = \log c + 0{,}0001\, x$. Man kann demnach aus dem in Wiener= Klaftern gegebenen Höhenunterſchiede zweyer Oerter, und aus der Barometer= Höhe des einen Ortes die Barometer= Höhe des anderen Ortes finden.

Da die Barometer = Höhen ſich gegen einander verhalten wie die Dichtigkeiten oder wie die eigenthümlichen Gewichte der Luft, nähmlich $b : c = m : n$, wenn wir die eigenthümlichen Gewichte der Luft an denjenigen zwey Oer=

Fig. ten mit m und n benennen, an welchen die Barometer-Höhen b und c statt finden; so ist $c = \frac{bn}{m}$. Folglich ist nach gehöriger Substitution $\log \frac{bn}{m} = \log b - 0{,}00001\,x$, nähmlich $\log n = \log m - 0{,}00001\,x$ eine logarithmische Gleichung für das eigenthümliche Gewicht der Luft n an einem Orte, der um x Wiener-Klafter über einen anderen Ort erhöhet ist, allwo das eigenthümliche Gewicht der Luft $= m$ ist. Diese letzte Gleichung läßt sich auch auf folgende Art vorstellen $\log \frac{m}{n} = 0{,}00001\,x$ und zwar

$\log \text{vulg} \frac{m}{n} = 0{,}00001x$. Will man nun diese Gleichung durch natürliche Logarithmen ausdrücken; so ist

$\log \text{nat} \frac{m}{n} = 0{,}0002302585\,x$ (vermöge §. 293. und 294.).

Oder wenn wir nur die ersten zwey bedeutlichen Decimal-Ziffern beybehalten, und über dieses die Grundzahl der natürlichen Logarithmen, mit h bezeichnen, nähmlich $\log \text{nat}\, h = 1$ setzen; so ist $\log \text{nat} \frac{m}{n} = 0{,}00023\,x \,.\, \log \text{nat}\, h$ (vermöge §. 295.). Daraus folgt endlich $n = mh^{-0{,}00023x}$ eine unmittelbare Gleichung für das eigenthümliche Gewicht der Luft n an einem Orte, der um x Wiener-Klafter über einen anderen Ort erhöhet ist, an welchem das eigenthümliche Gewicht der Luft $= m$ statt findet.

Z. B. am Wiener-Horizonte ist bey mittlerer Temperatur das eigenthümliche Gewicht der atmosphärischen Luft so beschaffen, daß 1 Wiener-Cubik-Schuh ziemlich genau 2 Wiener-Lothe wiegt. Setzet man nun $m = 2$, und $x = 1000$ Klafter; so findet man nach gehöriger Reduction $n = 1{,}589$. Nähmlich ein Wiener-Cubik-Schuh der atmosphärischen Luft in einer Erhöhung von 1000 Wiener-Klafter über den Wiener-Horizont wiegt nur 1,589

Wie-

Wiener-Lothe. Das eigenthümliche Gewicht oder die Dich- Fig.
tigkeit der atmosphärischen Luft ist demnach in dieser Er-
höhung um $\frac{2 - 1{,}589}{2}$ nähmlich ziemlich genau um $\frac{1}{5}$ klei-
ner als in Wien. Wenn ein Luftballon, dessen Ueberzug sammt dem übrigen Zugehör und der darinnen befindlichen brennbaren Luft im luftleeren Raume 4 Centner wiegt, am Wiener-Horizonte mit einer Kraft von 100 Pfunden schon in die Höhe zu steigen anfinge, würde daher in einer Erhöhung von 1000 Wiener-Klafter zum Steigen und Fallen gleich geneigt seyn, er würde nähmlich weder eine Kraft um Steigen noch auch eine Kraft zum Fallen haben. Die Kraft, womit ein Luftballon in die Höhe zu steigen anfängt, ist nichts anders als der Ueberschuß des Gewichtes der atmosphärischen Luft unter einem dem Luftballon gleichen Cubikinhalte. Wenn nähmlich das ganze Gewicht des Luftballons 4 Centner und das Gewicht der atmosphärischen Luft unter einem eben so großen Cubikinhalte 5 Centner beträgt; so sagt man, daß der Luftballon mit einer Kraft von 1 Centner zu steigen anfängt. Daß ein solcher Ueberschuß des Gewichtes möglich sey, erhellet daher, weil das eigenthümliche Gewicht der brennbaren Luft wenigstens 5mahl kleiner ist als das eigenthümliche Gewicht der atmosphärischen Luft, wenn der Barometer ohngefähr auf 28 Wiener-Zolle steht. Es verhält sich nähmlich bey diesem Stande des Barometers das eigenthümliche Gewicht der brennbaren Luft zum eigenthümlichen Gewichte der atmosphärischen Luft, wie 1 zu 5, zuweilen auch wie 1 zu 10, wenn die brennbare Luft von der besten Gattung ist

Anmerkung. Eine ausführlichere Abhandlung über die practische Meßkunst, über die Prüfung und Berichtigung verschiedener Instrumente, über die Bestimmung der davon abhangenden Zuverläßigkeit, u. m. d. gl. kann in diesem Lehrbuche nicht statt finden, theils weil dadurch die Gränzen desselben zu weit ausgedehnet würden, theils auch weil dazu noch andere Kenntnisse als z. B. Gründe der

Diop-

Fig. Dioptrik, Catoptrik, Astronomie u. s. w. erfordert werden. Auch ist das bisher Gesagte hinreichend, jeden fähigeren Schüler in den Stand zu setzen, daß er vollständigere Abhandlungen hierüber einsehen, und im vorkommenden Falle Gebrauch davon machen könne. Diese Gegenstände findet man unter andern in folgenden Schriften:

Unterberger (Leop. Freyh. von k. k. Feld = Zeugmeisters) Anfangsgründe der Mathematik des 2ten Theiles 2te Abtheilung. Wien bey J. Th. v. Trattnern 1780.

Haußer (Matth. Oberst = Lieut.) analytische Abhandlung der Anfangsgründe der Mathematik zum Gebrauche der k. k. Ingenieurs=Academie. 1ter und 2ter Theil. Wien 1778 in der k. k. Ingenieurs = Academie = Canzley.

Backenberg (F. H. Hauptmann und Director der mathemat. Wissensch. bey der Churfächs. Ritter = Akademie), Lehrbuch der Kriegswissenschaften. 2ter Theil, welcher das Aufnehmen sowohl als die Untersuchung und Erlangung der Kenntniß der Gegenden zum militärischen Gebrauche enthält. Dresden 1797.

Tobias Mayer gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie, 4 Bände in 8vo, 2te Aufl. Erlangen 1794.

Bohnenberger, Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung vorzüglich vermittelst des Spiegel=Sextanten. Göttingen 1795.

Adams geometrische und graphische Versuche, oder Beschreib. d. mathem. Instrumente, deren man sich in der Geometrie, Civil = und Militär=Vermessung, beym Nivelliren und in der Perspective bedienet. A. d. Engl. m. Kupf. gr. 8. Leipz. 1795.

Fig.

Sechstes Hauptstück.

Von einigen krummen Linien.

I. Abschnitt.

Vorläufige Einleitung.

§. 620.

Eine krumme Linie ist der Weg, den ein Punct zurücklegt, wenn er sich zwar nach einem bestimmten Gesetze, jedoch ohne aller Richtung fort beweget. Bey der Untersuchung der Eigenschaften einer krummen Linie muß man zuerst bedacht seyn, das Gesetz durch eine Gleichung auszudrucken, welches der Punct bey seiner Bewegung beobachtet. Dieses Gesetz heißt die Natur der krummen Linie. Das Gesetz, welches der Punct M Fig. 62. bey der Beschreibung eines Kreises beo- 62.
bachtet, ist, daß er immer gleich weit von dem Puncte C entfernt bleibt. Dieses Gesetz, oder, die Natur des Kreises läßt sich nun auf folgende Art durch eine Gleichung ausdrucken. Man setze ein beliebiges Stück des Durchmessers von A gegen B gezählt $AP = x$, die Senkrechte aus dem Puncte P bis an den Umkreis $PM = y$, und den Halbmesser $AC = a = MC$; so ist $y = \pm \sqrt{(2ax - x^2)}$. Denn es ist $PM^2 = MC^2 - PC^2$, nähmlich es ist $y^2 = a^2 - (a-x)^2$, und folglich $y = \pm \sqrt{(2ax - x^2)}$. Diese Gleichung zeigt uns an, daß man für jedes gegebene x das zugehörige y daß heißt den entsprechenden Punct in der krummen Linie finden kann. Daß aus dieser Gleichung alle die übrigen Eigenschaften des Kreises können abgeleitet werden, ist aus §. 412. zu ersehen.

Die-

Fig. Diejenigen krummen Linien, deren Natur sich durch eine algebraische Gleichung vorstellen läßt, heißen algebraische krumme Linien. Man nennt aber eine algebraische Gleichung zwey endliche einander gleiche Ausdrücke von veränderlichen und beständigen Größen, die sich dergestalt ordnen lassen, daß darin kein einziges irrazionales Glied, und in keinem Exponenten sich eine veränderliche Größe befindet. So z. B. ist $y = \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - x^2)}$ eine algebraische Gleichung, weil sich dieselbe auch also vorstellen läßt $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - x^2$, oder $y^2 + x^2 - \frac{1}{4}a^2 = 0$. Eben so ist $y = \pm\sqrt{\frac{a^2 x}{a-x}}$ eine algebraische Gleichung, und folglich die krumme Linie, deren Natur durch diese Gleichung vorgestellet wird, eine algebraische krumme Linie. Hingegen heißen diejenigen krummen Linien transcendent, deren Natur sich durch keine algebraische Gleichung ausdrucken läßt, oder in deren Gleichungen sich Kreisbogen, Sinus, andere trigonometrische Functionen, Logarithmen, unendliche Reihen, die sich nicht genau summiren lassen, u. s. w. befinden. So z. B. sind diejenigen krummen Linien transcendent, welche durch folgende Gleichungen vorgestellet werden;

$y = \sqrt{(2 - x^2)} + \text{arc cos } (1-x)$; $y = a \log x$;

$$y = b + bx + \frac{bx^2}{1.2} + \frac{bx^3}{1.2.3} + \frac{bx^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots \text{ u. s. w.}$$

§. 621.

Wie man vorgehen müsse, um die Natur einer krummen Linie, welche in einer Ebene liegt, durch eine Gleichung auszudrucken, ist schon im §. 412. erinnert worden. Man muß nähmlich eine willkührliche gerade Linie in der Ebene der Krummen für die Abscissen-Linie annehmen, und die Lage eines jeden Punctes der krummen Linie in Hinsicht auf die Abscissen-Linie durch eine Gleichung zwischen der Ordinate und der dazu gehörigen Abscisse verbunden mit einer oder auch mit mehreren unveränderlichen Grö-

ßen

ßen angeben. Es ist schon allgemein angenommen die Ab- Fig.
scissen durch x, die Ordinaten durch y, den Bogen, wel- 173.
cher von den durch den Anfangspunct und durch den End-
punct der Abscissen gezogene Ordinaten abgeschnitten wird,
durch z, nnd die unveränderlichen geraden Linien einer und
derselben bestimmten krummen Linie mit den Anfangsbuch-
staben a, b, c zu bezeichnen. Die alten Meßkünstler nann-
ten mM eine Ordinate oder eine Applicate, und PM oder
Pm eine Halbordinate.

Eine Abscissen-Linie heißt ein Durchmesser der krum-
men Linie, wenn sie alle Parallelen in zwey gleiche Theile
theilet, welche aus was immer für einem Puncte der krum-
men Linie bis auf einen anderen Punct von eben derselben
krummen Linie können gezogen werden, oder welches einer-
ley ist; wenn zu jeder Abscisse zwey gleiche Ordinaten nach
entgegen gesetzten Richtungen gehören. Ins besondere heißt
derjenige Durchmesser eine Achse, welcher die Ordinaten
senkrecht in zwey gleiche Theile theilet.

Eine Gerade TM in der Ebene der krummen Linie, Fig. 165
welche dieser in einem einzigen Puncte M begegnet ohne sie
an diesem Orte zuschneiden, heißt die Tangente der Krum-
men an dem Puncte M. Das Stück PT der Abscissen-Linie
zwischen der Ordinate PM des Berührungspunctes und zwischen
dem Durchschnittspuncte T heißt die Subtangente. Die Ge-
rade MN aus dem Berührungspuncte M auf die Tangen-
te senkrecht gezogen, und bis auf die Abscissen-Linie verlän-
gert wird die Normal-Linie oder die Normale, und das
Stück PN der Abscissen-Linie zwischen der Ordinate PM des
Punctes M und zwischen dem Durchschnittspuncte N wird
die Subnormal-Linie oder die Subnormale genannt.

Eine Gerade CD, der sich eine krumme Linie AMG Fig. 175
ohne Ende nähert ohne dieselbe jemahls zu durchschneiden,
wenn man beyde noch so weit ausdehnet, heißt die Asymp-
tote von der krummen Linie. Daß es krumme Linien gibt,
welche Asymptoten haben, erhellet aus Folgenden. Es sey
z. B. AMG eine krumme Linie, deren Natur für senkrech-

te

Fig. 173. te Ordinaten durch die Gleichung $y = \pm a \sqrt{(\frac{x}{a-x})}$ vorgestellet ist, bey welcher $AP = x$, $PM = y$, und die unveränderliche Gerade $AC = a$ gesetzet wird; so ist offenbar, daß die Gerade CD auf AC senkrecht gezogen eine Asymptote der krummen Linie AMG ist. Denn man setze $x = a + z$; so ist $y = \pm a \sqrt{(-1 - \frac{a}{z})}$ eine unmögliche Größe, es möge z noch so groß oder noch so klein angenommen werden. Folglich liegt kein einziger Punct der krummen Linie AMG diesseits der Geraden CD, nähmlich die Gerade CD wird von der krummen Linie niemahls durchschnitten. Dabey nähert sich die krumme Linie AMG der Geraden CD ohne Ende, nähmlich dergestalt, daß man einen Punct der krummen Linie finden kann, welcher von der Geraden CD um weniger absteht als um jede gegebene Größe. Um dieses letztere zu begreifen, setze man nur $x = a - t$; so ist $y = \pm a \sqrt{(\frac{a}{t} - 1)}$. Nun kann man in dieser Gleichung t so klein annehmen, und folglich einen Punct der krummen Linie so nahe an der Geraden CD bestimmen, als man es nur immer will.

Wenn man vermittelst der angenommenen Gleichung $y = \pm a \sqrt{(\frac{x}{a-x})}$ für eine negative Abscisse die entsprechende Ordinate suchet, nähmlich $-x$ statt x substituiret; so ist $y = \pm a \sqrt{(-\frac{x}{a+x})}$ eine unmögliche Größe, ein Zeichen, daß sich diese krumme Linie über den Punct A hinaus, nicht erstrecket. Diese krumme Linie hat demnach nur positive Abscissen, und jede derselben muß $< a$ seyn; die Ordinaten hingegen wachsen ohne Ende. Das Zeichen $\pm$ zeiget an, daß zu jeder Abscisse AP zwey gleiche Ordinaten gehören, deren eine rechts die andere links bis an die krumme Linie gezogen wird, und daß folglich AC ein Achse

se ist, weil wir die Ordinaten senkrecht auf AC angenommen haben. Der Anfangspunct A der Abscissen ist zugleich der Scheitel der krummen Linie. Denn man nennt denjenigen Punct in der krummen Linie, durch welchen die Achse geht, den Scheitelpunct. Daß bey der durch die erwähnte Gleichung ausgedruckten krummen Linie der Anfangspunct A der Abscissen oder der Achse AC in der krummen Linie liegt, erhellet daher, weil für $x = 0$ auch die Ordinate $y = \pm a\sqrt{(\frac{0}{a-0})} = 0$ wird. Fig. 173.

§. 622.

Wenn man diese kumme Linie $y = \pm a\sqrt{(\frac{x}{a-x})}$ beschreiben will, so kann man z. B. $a = 100$ setzen, nach einem verjüngten Maßstabe diese 100 Theile von A bis C auftragen, und etwa nach jeden 5 Theilen Senkrechte auf AC errichten. Sodann setzet man in der Gleichung $y = \pm 100\sqrt{\frac{x}{100-x}}$ nach der Ordnung $x=5$, $x=10$, $x=15$, u. s. w., berechnet zu diesen Abscissen die entsprechenden Ordinaten, trägt dieselben gehörig auf den gezogenen Senkrechten rechts und links auf, und zieht die dadurch bestimmten Puncte durch eine ununterbrochene krumme Linie zusammen. Es ist bey der angenommenen Gleichung für

$x=$	5;	10;	15;	20;	25;	30;	35;	40;	45;	50;	55;	60; ..
$y=$	22,9;	33,3;	42;	50;	57,8;	65,5;	73,4;	81,6;	90,4;	100;	110,5;	122,8; ..

Nach eben derselben Methode könnte die krumme Linie beschrieben werden; die durch $y = \pm x\sqrt{(\frac{b+x}{a-x})}$ vorgestellet wir (Fig. 174.), wenn man CB für die Abscissen-Linie, und A für den Anfangspunct der Abscissen annimmt, für a und b beliebige Werthe z. B. $a = 100$, und $b = 40$ setzet, die positiven Abscissen von A gegen B und die negativen Abscissen gegen C zählet, und darauf für verschiedene Abscissen die entsprechenden Ordinaten berechnet. Diese Fig. 174.

Ver-

Fig. Verzeichnung ist bey allen krummen Linien anwendbar, deren Gesetz durch eine Gleichung gegeben ist. Sie ist das leichteste Mittel die Gestalt einer krummen Linie zu finden, wenn dieselbe aus der gegebenen Gleichung nicht auf der Stelle gefolgert werden kann. So z. B. findet man, wenn aus der gegebenen Gleichung $a^2y^2 = a^2x^2 - x^4$ die zugehörige krumme Linie (die Lemniscate) verzeichnet wird, daß dieselbe in ihrer Gestalt mit der Ziffer 8 übereinstimmet.

§. 623.

Nachdem einmahl für eine Abscissen-Linie die Gleichung bekannt ist, so ist es leicht für jede andere beliebige Abscissen-Linie bey einer und derselben krummen Linie die
173. Gleichung zu finden. Es sey z. B. (Fig. 173.) für die Abscissen-Linie AC die Gleichung $PM^2 = Pm^2 = \frac{AC^2 . AP}{AC - AP}$.

Wenn man nun bey eben dieser krummen Linie CE für die Abscissen-Linie annimmt, und $Cp = x$, $pm = y$ setzet; so läßt sich y durch x auf folgende Art ausdrucken. Es ist $Cp = Pm = x$, $pm = PC = y$, und $AP = AC - PC = a - y$. Substituiret man nun diese Werthe in der Gleichung $Pm^2 = \frac{AC^2 . AP}{AC - AP}$; so ist $x^2 = \frac{a^2 . (a-y)}{a-(a-y)}$, und folglich $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$. Wenn man bey eben derselben krummen Linie AC für die Abscissen-Linie annimmt und den Anfangspunct der Abscissen in C setzet, ferner CP mit x, PM mit y, und CA mit a bezeichnet; so ist die Gleichung für senkrechte Ordinaten nach gehöriger Reduction nähmlich $y = \pm \sqrt{(a^3 x^{-1} - a^2)}$ u. s. w.

§. 624.

Es ist aus dem bisher Gesagten leicht zu ersehen, daß die in gleichen Abständen gezogenen Ordinaten einer krummen Linie nichts anders vorstellen als eine gewisse Reihe, bey der die Stellen der Glieder durch die Abscissen bezeichnet

net werden. Die Gleichung der krummen Linie ist dabey nichts anders als das allgemeine Glied von eben derselben Reihe. Gleichwie man nun eine jede Function einer verän- Fig.

derlichen Größe x, z. B. die Function $\frac{x^2}{1+x^2}$ für das allgemeine Glied irgend einer Reihe annehmen kann, wenn man durch x die Stellen der Glieder bezeichnet; so kann man auch jede Function einer veränderlichen Größe z. B. $\frac{x^2}{1+x^2}$ für die Gleichung irgend einer krummen Linie annehmen, wenn man durch die veränderliche Größe x die Abscissen bezeichnet. Man kann in einem solchen Falle die angenommene Function dergestalt mit derjenigen unveränderlichen Größe verbinden, welche bey der Bestimmung der verschiedenen Werthe von x die Einheit ist, daß die angenommene Function sodann ein linearischer Ausdruck wird (§. 533. Anm.) und daß sie der Ordinate $= y$ einer krummen Linie gleich gesetzet werden kann. Z. B. die Function $\frac{x^2}{1+x^2}$ läßt sich mit einer unveränderlichen Größe a auf folgende Art verbinden $\frac{ax^2}{a^2+x^2}$, damit sie ein linearischer Ausdruck wird. Nun kann man $y = \frac{ax^2}{a^2+x^2}$ setzen, und die Eigenschaften der zugehörigen krummen Linie suchen. Man wird nach vorgenommener Untersuchung finden, daß die zu dieser Gleichung zugehörige krumme Linie eben dieselbe ist, von der wir schon geredet haben.

§. 625.

Wenn der höchste Exponent einer veränderlichen Größe x oder y, oder die höchste Summe beyder Exponenten eines Gliedes in einer geordneten Gleichung einer algebraischen krummen Linie $= 2$ ist; so heißt die dazu gehörige krumme Linie eine Linie von der zweyten Ordnung,

oder

Fig. oder eine krumme Linie von der ersten Ordnung. Ist der höchste Exponent oder die höchste Summe beyder Exponenten = 3; so heißt die zugehörige krumme Linie eine Linie von der dritten Ordnung oder eine krumme Linie der zweyten Ordnung; u. s. w. Ueber dieses werden diejenigen algebraischen krummen Linien von verschiedenen Ordnungen zu einer und derselben Familie gezählet, deren Gleichungen einerley Glieder enthalten, die nur in den Exponenten verschieden sind. So z. B. sagt man, daß die krummen Linien, welche durch $y^2 = px$, $y^3 = p^2x$, $y^3 = px^2$, $y^4 = p^3x$, $y^4 = p^2x^2$ $y^4 = px^3$, $y^{m+n} = p^m x^n$ vorgestellet werden, alle zu einer, und derselben Familie gehören.

Bey der Untersuchung der krummen Linien muß man bedacht seyn 1) aus der Natur der krummen Linie die Gleichung für dieselbe herzuleiten, oder wenn die Gleichung gegeben ist, die zugehörige krumme Linie zu verzeichnen, welches in Ermanglung anderer Hülfsmittel jederzeit nach §. 622. geschehen kann; 2) für jeden gegebenen Punct der krummen Linie die Tangente, Subtangente Normale und Subnormale zu bestimmen; 3) an jedem gegebenen Orte der krummen Linie die Krümmung zu finden; 4) den Ort der größten oder kleinsten Ordinate zu bestimmen; 5) den Flächeninhalt zu berechnen, welcher von einer Abscisse, ihren Ordinaten und dem zugehörigen Bogen eingeschlossen ist; 6) die wirkliche Länge eines Bogens zu finden; u. s. w.

II. Abschnitt.

Von den Kegelschnitts-Linien.

§. 626.

Unter dem Nahmen Kegelschnitts-Linien begreifen wir diejenigen krummen Linien, welche auf der Oberfläche eines Kegels entstehen, wenn derselbe nach verschiedenen Richtungen geschnitten wird. Es können auf diese Art nebst der bekannten Kreislinie noch drey andere krumme Linien entstehen; nähmlich 1) die Parabel, 2) die Ellipse, und 3) die Hyper-

perbel. Sie werden in diesem Abschnitte nach der hier an- Fig.
geführten Ordnung insbesondere aufgestellet; dann wird zu Ende desselben eine allgemeine Gleichung hergeleitet, welche zeiget, wie diese krummen Linien auf der Oberfläche eines Kegels durch Schnitte entstehen.

I. Von der Parabel.

§. 627.

Es sey GE eine gerade Linie (Fig. 175.), CN senkrecht 175.
auf GE, und F ein Punct in der Senkrechten CN. Man gedenke eine krumme Linie M'AM von der Beschaffenheit, daß jeder Punct derselben von F eben so weit als von der Geraden GE entfernt, nähmlich daß allenthalben die Senkrechte MD = MF sey; so heißt eine solche krumme Linie eine **Parabel**. Die Gerade GE wird die **Leitlinie** (directrix), und der Punct F wird der **Leitpunct**, oder nach der schon allgemein eingeführten Benennung der **Brennpunct** (focus) der Parabel genannt.

Wenn man den unveränderlichen Abstand GF des Brennpunctes F von der Leitlinie GD in dem Puncte A in zwey gleiche Theile theilet; so ist A ein Punct der Parabel, weil er von F und von der Leitlinie GD gleich weit entfernt ist. Wenn man mehrere Puncte der Parabel durch die Verzeichnung zu suchen hat; so ist es erforderlich mehrere Senkrechten M'M auf CN zu errichten, und den Abstand CP einer jeden Senkrechten von der Leitlinie aus dem Brennpuncte F auf die Senkrechte M'M bis M' und M mittelst eines Zirkels zu übertragen; nähmlich man eröffnet den Zirkel von P bis C, setzet sodann eine Spitze in F, und durchschneidet mit der anderen Spitze die gehörige Senkrechte in M und M'.

Man kann auch die Parabel durch eine ununterbrochene Bewegung beschreiben, wenn man an einem rechtwinkeligen Winkelhaken SDE einen Faden = SD anbringt, das eine Ende des Fadens in S, und das andere in F befestiget, sodann den Winkelhaken längst der Leitlinie CE fortbewe-

get,

Fig. 175. get, und mit einem Stifte M den Faden während der Bewegung immer an den Winkelhacken andrücket. Denn der Stift M wird bey dieser Bewegung eine krumme Linie beschreiben, bey der jeder Punct eben so weit von F als von GD entfernt ist. Diese krumme Linie wird demnach eine Parabel seyn, welche F zum Brennpuncte, und GD zur Leitlinie hat.

§. 628.

Aufgabe. Eine Gleichung für die Parabel zu finden.

Auflösung. Man nehme CN für die Abscissen-Linie, und A für den Anfangspunct der Abscissen an, setze $AP = x$, die senkrechte Ordinate $PM = y$, und den Abstand des Brennpunctes von dem Anfangspuncte $= FA = c = AC$; so ist $PF = AP - AF = x - c$, und $PC = AP + AC = x + c = MD = MF$. Nun ist $FM^2 = PM^2 + PF^2$; folglich ist auch $(x+c)^2 = y^2 + (x-c)^2$ und endlich $y = \pm \sqrt{4cx}$.

Anmerkung. Wenn man GE für die Abscissen-Linie, C für den Anfangspunct der Abscissen angenommen, und $CD = x$, $DM = y$, und $CF = 2c$ gesetzet hätte; so würde man $y = \frac{x^2}{4c} + c$ gefunden haben. Wäre aber die in dem Scheitel A errichtete Tangente die Abscissen-Linie, und A der Anfangspunct der Abscissen; so würden die darauf senkrechten Ordinaten durch die Gleichung $y = \frac{x^2}{4c}$ ausgedrucket seyn.

§. 629.

Diese Gleichung $y = \pm \sqrt{4cx}$ gibt uns zu erkennen.

I. Daß AN die Achse der Parabel und A ihr Scheitel ist, weil wegen der Zeichen $\pm$ zu jeder positiven Abscisse zwey gleiche senkrechte Ordinaten nach entgegen gesetzten Richtungen gehören, und weil für $x = 0$ auch $y = 0$ wird.

II. Diesseits der Leitlinie von A angefangen wachsen die Abscissen und Ordinaten ohne Ende. Denn für $x = \infty$ wird $y = \pm \sqrt{4c\infty}$, das heißt die zwey Schenkel der Parabel laufen diesseits der Leitlinie ohne Ende fort. Fig. 175.

III. Nimmt man x negativ an; so ist $y = \pm \sqrt{(-4cx)}$ ein unmögliche Größe. Folglich liegt kein einziger Punct der Parabel über A hinaus nach der Gegend AT.

IV. Setzet man $x = c = AF$, so ist $y = \pm 2c$, nähmlich $FB = 2AF = FB'$, und folglich $B'B = 4AF = 4c$. Diese durch den Brennpunct auf die Achse senkrecht gezogene unveränderliche Gerade B'B wird der Parameter der Parabel genannt, welcher jederzeit dem vierfachen Abstande des Brennpunctes von dem Scheitel gleich ist. Setzt man nun $B'B = p = 4c$; so ist $y = \pm \sqrt{px}$, oder $y^2 = px$ nähmlich das Quadrat einer jeden Ordinate PM ist gleich dem Rechtecke oder dem Producte aus der Abscisse in den Parameter.

V. Da $y^2 = px$ ist; so ist auch $x : y = y : p$, nähmlich der Parameter einer Parabel ist die dritte Proportional-Linie zu was immer für einer Abscisse und zu der dazu gehörigen Ordinate.

VI. Da $y^2 = px$, und auch $Y^2 = pX$ ist (wenn man mit X eine andere Abscisse und mit Y die zugehörige Ordinate bezeichnet); so ist auch $y^2 : Y^2 = px : pX$ oder $y^2 : Y^2 = x : X$, nähmlich die Quadrate der Ordinaten verhalten sich wie die zugehörigen Abscissen.

VII. Eine Gerade FM aus dem Brennpuncte an was immer für einen Punct M der Parabel gezogen heißt der Leitstrahl (radius vector) des Punctes M. Der Leitstrahl eines jeden Punctes der Parabel ist gleich der zugehörigen Abscisse mehr den vierten Theil des Parameters. Denn es ist $FM = MD = PC = AP + AC = AP + AF = x + \frac{1}{4}p$.

Fig. 175.

§. 630.

Wenn man aus einem Puncte M der Parabel eine Parallele MD zur Achse, und die Gerade MF in den Brennpunct zieht, und sodann den Winkel FMD durch die Gerade TQ halbiret, so berühret diese Gerade die Parabel in dem Puncte M.

Denn ein jeder anderer Punct Q der Geraden TQ diesseits oder jenseits des Punctes M liegt außer der Parabel, welches man auf folgende Art erweisen kann. Man schneide MD = MF ab, und führe durch D eine Senkrechte GD auf MD; so ist GD die Leitlinie. Ferner ziehe man die Gerade FD; so ist wegen der Gleichheit der Dreyecke FMK und DMK die Gerade TQ senkrecht auf FD, und FK = KD. Es ist also auch QD = QF (§. 358.) Nun ist aber die Senkrechte QE < QD; folglich ist auch QE < QF. Der Punct Q liegt demnach außer der Parabel, weil im Gegentheile QE = QF seyn müßte. Eben dieses läßt sich von einem jeden anderen Puncte der Geraden TQ außer M erweisen.

§. 631.

Wir ziehen aus diesem folgende Schlüsse:

I. Die Subtangente PT ist gleich der doppelten Abscisse. Denn wegen der Gleichheit der Dreyecke FTK und DMK ist FT = DM = CP; also ist auch FT — AF = CP — AC, nähmlich AT = AP; endlich ist AT + AP = AP + AP, nähmlich PT = 2AP.

Es kann demnach an einen jeden Punct M der Parabel eine Tangente sehr leicht gezogen werden ohne den Brennpunct in Erwägung zu ziehen, wenn man auf die Achse die senkrechte Ordinate PM führet, AT = AP abschneidet, und endlich M, T durch eine Gerade verbindet.

Ist hingegen aus einem Puncte L, der außer der Parabel liegt, eine Tangente an die Parabel zu ziehen; so muß man aus L mit der Entfernung LF die Leitlinie in D dnrchschneiden, aus D eine Parallele DS zur Achse ziehen,

hen, und den Durchschnittspunct M mit dem gegebenen Puncte L durch eine Gerade LM verbinden. Denn diese Gerade LM wird die Parabel in dem Puncte M berühren, weil sie den Winkel FMD halbiret. Auch ist es leicht einzusehen, wie man bey einer schon gezogenen Tangente den Berührungspunct finden könne. Fig. 175.

II. Die Subnormale ist gleich dem halben Parameter, und folglich bey einer und derselben Parabel unveränderlich.

Denn in den zwey ähnlichen Dreyecken TPM und PMN ist TP : PM = PM : PN, nähmlich $2x : \sqrt{px} = \sqrt{px} : PN$; folglich ist $PN = \frac{1}{2}p$. Es kann demnach zu jeder Parabel, bey der die Lage der Achse gegeben ist, der zugehörige Parameter, Brennpunct, und Abstand der Leitlinie gefunden werden, wenn man an einen beliebigen Punct M eine Tangente TM zieht, die Senkrechte MN auf TM errichtet, und sodann $\frac{1}{2}$PN von A bis F und C überträgt.

III. Die Tangente TM ist $= \sqrt{(4x^2 + px)} = \sqrt{[4x(x+\frac{1}{4}p)]} = \sqrt{(4AP \,.\, FM)}$. Ferner ist die Normale $MN = \sqrt{[p(x+\frac{1}{4}p)]} = \sqrt{p} \,.\, FM$. Denn es ist $TM^2 = PT^2 + PM^2 = 4x^2 + px$, und $MN^2 = PM^2 + PN^2 = px + \frac{1}{4}p^2$.

IV. Das Quadrat der Senkrechten FK ist gleich dem Producte aus dem Leitstrahle FM in den vierten Theil des Parameters p, nähmlich $FK^2 = FM \,.\, \frac{1}{4}p$.

Denn es ist $FK^2 = FM^2 - MK^2$. Es ist aber $MK = \frac{1}{2}MT = \frac{1}{2}\sqrt{(4AP \,.\, FM)}$, und $MK^2 = AP \,.\, FM$; folglich ist auch $FK^2 = FM^2 - AP \,.\, FM = FM\,(FM - AP) = FM \,.\, AC = FM \,.\, \frac{1}{4}p$. Benennen wir nun den Leitstrahl eines Punctes der Parabel mit z, und die Senkrechte aus dem Brennpuncte auf die Tangente mit v: so ist $v^2 = \frac{1}{4}pz$. Eben so ist für einen anderen Punct, $V^2 = \frac{1}{4}pZ$. Es ist demnach auch $v^2 : V^2 = \frac{1}{4}pz : \frac{1}{4}pZ$, oder $v^2 : V^2 = z : Z$, und auch $v : V = \sqrt{z} : \sqrt{Z}$; nähmlich die Quadrate der Senkrechten aus dem Brennpuncte an verschiedene Tangenten einer und derselben Parabel gezogen verhalten sich

Fig. 175. gegen einander, wie die an die Berührungspuncte gezogenen Leitstrahlen.

V. In einem jeden Puncte der Parabel ist der Winkel SMQ = FMK, weil jeder derselben dem Winkel DMK gleich ist. Wenn demnach an eine hohle paraboli[s]che Fläche, welche durch die Umdrehung einer halben Parabel APM um ihre Achse erzeuget wird, mehrere Feuer- oder Licht- oder Stimmstrahlen mit der Achse parallel einfallen; so werden sich dieselben nach dem Abprellen alle in dem Puncte F vereinigen, weil der Abprellwinkel, jederzeit dem Einfallwinkel gleich ist. Umgekehrt, wenn aus dem Brennpuncte einer hohlen paraboli[s]chen Fläche (eines paraboli[s]chen Hohlspiegels) mehrere Feuer- oder Licht- oder auch Stimmstrahlen nach was immer für Richtungen ausgehen; so werden alle diejenigen, welche an die hohle paraboli[s]che Fläche anstossen, nach dem Abprellen in einer zur Achse parallelen Richtung fortlaufen. Befestiget man nun an den zwey entgegen gesetzten Wänden eines Zimmers zwey paraboli[s]che Hohlspiegel dergestalt, daß ihre Achsen beyde in einer und derselben geraden Linie liegen, und ihre Aushöhlungen gegen einander gekehret sind; so werden die Strahlen, welche aus dem Brennpuncte eines Hohlspiegels ausgehen, sich in dem Brennpuncte des entgegengesetzten Hohlspiegels vereinigen. Wenn man demnach in dem Brennpuncte des ersten Spiegels glühende Kohlen, und in dem Brennpuncte des zweyten Schießpulver anbringt; so wird dadurch das Schießpulver entzunden. Oder, wenn jemand seinen Mund in dem Brennpuncte des ersten Spiegels, und ein anderer sein Ohr in dem Brennpuncte des zweyten anbringt; so wird der zweyte die Worte des ersten vernehmen, wenn sie auch so leise ausgesprochen werden, daß dieselben keiner von den Umstehenden vernehmen kann.

§. 632.

176. Aufgabe. Eine Gleichung für die Parabel zu finden, wenn man eine Gerade AC, die zu der Achse BG parallel läuft, für die Abscissen-Linie annimmt, und

die

die Ordinaten zu der Tangente AT parallel zieht (Fig. 176). Fig. 176.

Auflösung. Es sey A der Anfangspunct der Abscissen, $AP = x$, $PM = y$, der Leitstrahl $AF = c$, BL die Achse, AG und MQ senkrecht auf derselben, und $p =$ dem Parameter der Achse; so ist $MQ^2 = BQ \cdot p$. Die Gleichung für die Abscissen-Linie AC wird erhalten, wenn man sowohl MQ als auch BQ durch x und y und durch die unveränderliche Größe c auszudrucken suchet. Dieses kann auf folgende Art geschehen. Man setze, weil die Lage des Punctes A unveränderlich ist, $BG = BT = u$, so ist $AG = \sqrt{pu}$, $TG = 2u$, $PS = AT = \sqrt{(4BG \cdot FA)} = \sqrt{4cu}$, $MS = PS - PM = \sqrt{4cu} - y$. In den zwey ähnlichen Dreyecken AGT und MQS ist

$AT (\sqrt{4cu} : AG (\sqrt{pu} = MS (\sqrt{4cu} - y : MQ$, und

$AT (\sqrt{4cu} : TG (2u = MS (\sqrt{4cu} - y : SQ$

nähmlich $MQ = \sqrt{pu} - \frac{y\sqrt{pu}}{\sqrt{4cu}}$

und $SQ = 2u - \frac{2uy}{\sqrt{4cu}}$.

Ferner ist $BQ = TQ - TB = TS + SQ - TB = AP + SQ - TB$

$= x + 2u - \frac{2uy}{\sqrt{4cu}} - u = x + u - \frac{2uy}{\sqrt{4cu}}$.

Substituiret man in der oberen Hauptgleichung $MQ^2 = BQ \cdot p$ für MQ und BQ die hier entwickelten Werthe; so ist

$$(\sqrt{pu} - \frac{y\sqrt{pu}}{\sqrt{4cu}})^2 = p \cdot (x + u - \frac{2uy}{\sqrt{4cu}}).$$

Aus dieser Gleichung findet man endlich nach gehöriger Reduction $y = \pm \sqrt{4cx}$, oder wenn man $4c = q$ setzet, $y = \pm \sqrt{qx}$.

§. 633.

Diese Gleichung $y = \pm \sqrt{qx}$ gibt uns zu erkennen.

I. Daß zu jeder positiven Abscisse zwey gleiche Ordinaten nach entgegen gesetzten Richtungen gehören, und daß folglich AC ein Durchmesser der Parabel ist. A ist der

Schei-

Fig. 176. Scheitel des Durchmessers (vertex diametri). Eine Gerade $= 4AF = 4c = q$ wird der Parameter des Durchmessers genannt. Er ist gleich dem vierfachen Abstande des Scheitels A von dem Brennpuncte. Auch ist leicht einzusehen, daß eine Abscisse, die dem Abstande AF gleich ist, eine Ordinate zugehöret, die durch den Brennpunct geht, und nach beyden Richtungen zusammen genommen dem Parameter des Durchmessers gleich ist. Da endlich $y^2 = qx$ ist; so ist auch $x : y = y : q$, nähmlich der Parameter des Durchmessers ist die dritte Proportional-Linie zur Abscisse und zu der zugehörigen Ordinate.

II. Die Quadrate der Ordinaten des Durchmessers verhalten sich gegen einander wie die zugehörigen Abscissen.

III. Da alles dieses auch bey einer jeden anderen Parallelen zu BG statt findet, so folgt, daß jede zur Achse parallel gezogene Gerade ein Durchmesser der Parabel ist. Auch ist leicht einzusehen, daß jeder Durchmesser die Parabel nur in einem einzigen Puncte durchschneidet. Denn nur für $x = 0$ ist auch $y = 0$. Wenn man hingegen aus was immer für einem Puncte A der Parabel eine Gerade zieht, die nicht mit der Achse parallel läuft; so wird dieselbe genugsam verlängert, die Parabel noch einmahl durchschneiden.

IV. Da nun jeder Durchmesser der Parabel alle Sehnen halbiret, die mit der Tangente des Scheitels des Durchmessers parallel laufen; so kann bey einer aufgezeichneten Parabel die Lage der Achse auf folgende Art gefunden werden. Man ziehe zwey parallele Sehnen, halbire jede derselben, führe durch diese zwey Puncte eine gerade Linie nähmlich einen Durchmesser, errichte auf diesen Durchmesser eine Senkrechte, welche sich beyderseits in der Parabel endiget, und folglich eine doppelte Ordinate der Achse vorstellet. Endlich theile man noch diese letzte doppelte Ordinate der Achse durch eine Senkrechte in zwey gleiche Theile; so wird man die Lage der Achse erhalten, und darauf den Scheitel, Parameter, Brennpunct, Leitlinie, u. s. w. bestimmen können.

V. Aus einer gegebenen ganzen Ordinate der Achse AD$=b$, und aus dem Winkel TAG$=m$ läßt sich das Stück der Achse BG, und folglich auch der Parameter der Achse bestimmen. Denn es ist sintot $(1 : \text{tang}m = AG\ (\frac{1}{2}b : TG$; folglich ist auch $TG = \frac{1}{2}b \,.\, \text{tang}\, m$, und $BG = \frac{1}{4}b \,.\, \text{tang}\, m$. Fig. 176.

Ueber dieses ist $AG^2 = p.BG$, nähmlich $p = \frac{AG^2}{BG}$; folglich

ist der gesuchte Parameter der Achse $p = \frac{\frac{1}{4}b^2}{\frac{1}{4}b\,\text{tang}m} = b.\cot m$.

§. 634.

I. Der Flächeninhalt eines paraboliſchen Stückes, welches von einer Abſciſſe von der zugehörigen Ordinate, und von dem dazwiſchen liegenden Bogen eingeſchloſſen wird, iſt gleich zwey Drittheilen des Productes aus der Abſciſſe in die Ordinate. Nähmlich es iſt $AMP = \frac{2}{3}AP \times PM$, und folglich $M'AM = \frac{2}{3}AP \times M'M$. 175.

II. Der Cubikinhalt eines Paraboloides M'AM (eines paraboliſchen Afterkegels, welcher durch die Umdrehung der halben Parabel um die Achſe erzeuget wird) iſt gleich dem halben Cylinder von eben derſelben Grundfläche und Höhe. Nähmlich es iſt der Cubikinhalt von $M'AM = \frac{1}{2}AP \times MP^2\pi$.

Denn wenn man die Abſciſſe in unendlich viele gleiche Theile theilet und durch die Theilungspuncte parallele Ordinaten gedenket; ſo wird dadurch ſowohl die paraboliſche Fläche als auch das durch die Umdrehung entſtehende Paraboloides in die Elemente aufgelöſet. Dieſe ſind im erſten Falle Rechtecke, im zweyten Falle Cylinder. Die Summirung dieſer Elemente kann man entweder durch unendliche Reihen, viel leichter aber nach den Gründen der Differenzial- und Integral-Rechnung vornehmen, welche in den folgenden Hauptſtücken abgehandelt werden.

Anmerkung. Wenn man annimmt, daß der Minentrichter einer auf die vortheilhafteſte Weiſe geladenen Mine in einem gleichartigen Erdreiche ein Paraboloides ſey, bey 177.

dem

Fig. 177. dem der Halbmesser der Grundfläche der kürzesten Widerstands-Linie gleich ist, nähmlich AB = AF, und daß der Mittelpunct des Minenofens F mit dem Brennpuncte des Paraboloides einerley sey; so kann man aus der kürzesten Widerstands-Linie $FA = a = AB$ (aus der Vertiefung des Minenofens) den Cubikinhalt des Minentrichters auf folgende Art finden. Es ist $FB = \sqrt{(AB^2 + AF^2)} = a\sqrt{2} = BE = AD$, $FD = AD - AF = a\sqrt{2} - a$, $FC = \frac{1}{2}FD = \frac{1}{2}a\sqrt{2} - \frac{1}{2}a$, und $AC = AF + FC = \frac{1}{2}a(1+\sqrt{2})$. Nun ist das Paraboloides $GCB = \frac{1}{2}AC \times AB^2\pi$; folglich ist eben dieses Paraboloides nähmlich der gesuchte Cubikinhalt des Minentrichters $= \frac{1}{4}a(1+\sqrt{2}).a^2\pi = \frac{1}{4}\pi(1+\sqrt{2})a^3 = 1{,}896a^3$. Es sey z. B. $AF = 20$ Schuhen; so ist der Cubikinhalt des Minentrichters $= 15168$ Cubikschuhen.

II. Von der Ellipse.

§. 635.

178. Es sey AB eine gerade Linie, F, f zwey Puncte auf derselben. Man gedenke eine krumme Linie von der Beschaffenheit, daß die Summe der Abstände MF + Mf von den Puncten F, f, eines jeden Punctes M immer einer unveränderlichen Geraden $F'f' = 2a$ gleich, und zugleich $2a > Ff$ sey; so wird eine solche krumme Linie eine Ellipse genannt. Die Puncte F, f heißen Leitpuncte oder Brennpuncte.

Mann kann demnach aus der gegebenen unveränderlichen Summe der Abstände $= Mf + MF = F'f'$, und aus dem gegebenen Abstande der Brennpuncte $= Ff$ eine Ellipse durch eine ununterbrochene Bewegung beschreiben, wenn man in F und f die Endpuncte eines Fadens befestiget, dessen Länge $= MF + Mf = F'f'$ ist, und sodann einen Stift M dergestalt herumbeweget, daß er immer beyde Theile des Fadens in gehöriger Spannung erhalte. Denn der Stift M wird während dieser Bewegung eine Ellipse beschreiben.

Auch

Auch kann man mittelst des Zirkels mehrere Puncte der Ellipse bestimmen wenn man eine gerade Linie $F'f' = 2a = Mf + MF$ zieht, diese in mehrere (gleiche oder ungleiche) Theile zertheilet, und sodann mit jeden zweyen zugehörigen Theilen der Geraden $F'f'$ als Halbmessern, aus F und f Durchschnittspuncte der Ellipse bestimmet. Wenn man z. B. mit dem Halbmesser $FM = F'M'$ aus F, und mit dem Halbmesser $M'f'$ aus f Kreisbogen beschreibet; so wird der Durchschnittspunct M ein Punct der Ellipse seyn. Auch m wird ein Punct eben derselben Ellipse seyn, wenn man aus F mit dem Halbmesser $Fm = F'm'$ einen Kreisbogen beschreibet, und aus f mit dem Halbmesser $fm = m'f'$ denselben durchschneidet. Auf diese Art können unzählige Puncte einer und derselben Ellipse bestimmet werden. Fig. 178.

§. 636.

Aufgabe. Eine Gleichung für die Ellipse zu finden.

Auflösung. Man nehme AB für die Abscissen-Linie, und den von f und F gleichweit abstehenden Punct C für den Anfangspunct der Abscissen an; setze $CP = x$, die senkrechte Ordinate $PM = y$, die gegebene und unveränderliche Summe der Abstände $MF + Mf = 2a$, den gegebenen und unveränderlichen Abstand $Cf = CF = c$, und $Mf = z$; so ist $Pf = c - x$, $PF = c + x$, und $MF = 2a - z$. Nun ist $Mf^2 = MP^2 + Pf^2$ nähmlich $z^2 = y^2 + c^2 - 2cx + x^2$. Es ist aber auch $MF^2 = PM^2 + PF^2$, nähmlich $4a^2 - 4az + z^2 = y^2 + c^2 + 2cx + x^2$. Folglich ist auch durch die Subtraction $z = a - \frac{cx}{a}$, und $z^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2}$. Substituiret man diesen Werth in der ersten Gleichung, so ist $a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2} = y^2 + c^2 - 2cx + x^2$. Aus dieser Gleichung findet man endlich $y = \pm \sqrt{[a^2 - c^2 - \frac{x^2}{a^2}(a^2 - c^2)]}$.

§. 637.

Fig. 178.

§. 637.

Diese gefundene Gleichung gibt uns zu erkennen.

I. Daß zu jeder Abscisse zwey gleiche Ordinaten nach entgegen gesetzten Richtungen gehören, nähmlich $PM = PM'$, und daß folglich AB eine Achse ist.

II. Daß die Ellipse eine in sich zurückkehrende Linie ist. Denn für jede positive oder negative Abscisse, die kleiner als a ist, erhält man zwey gleiche Ordinaten nach entgegen gesetzten Richtungen. Für $x = a$ und $x = -a$ hingegen ist $y = o$, nähmlich in der Entfernung $CA = CB = \frac{1}{2}(MF + Mf)$ geht die krumme Linie durch die Achse. Endlich ist für jede positive oder negative Abscisse, wenn sie größer ist als a, die zugehörige Ordinate eine unmögliche Größe. Ueber A herüber und über B hinaus gibt es demnach keine Ordinaten mehr, und A, B sind die zwey Scheitel der Ellipse.

III. Daß für gleich grosse Abscissen von C gegen B und gegen A gerechnet auch vollkommen gleiche Ordinaten gehören; und daß demnach die elliptische Fläche durch AB sowohl als auch durch DE in zwey vollkommen gleiche Theile getheilet ist.

IV. Daß der Abscisse $x = o$ die größte Ordinate entspricht, nähmlich daß $CD = CE$ die größte Ordinate ist, und daß von C gegen B sowohl als auch gegen A die Ordinaten immer abnehmen, bis sie endlich in A und B gänzlich verschwinden. Auch ist leicht einzusehen, daß die größte Ordinate $CD < CB$ ist, weil $CD^2 = a^2 - c^2$, und $CB^2 = a^2$ ist.

V. Daß beyde Brennpuncte von den anliegenden Scheiteln der Ellipse gleichweit entfernt sind. Denn es ist $CF = Cf$, und auch $CA = CB$; also ist auch $FA = fB$.

VI. Der Leitstrahl fM ist $= CB - \frac{Cf.CP}{CB}$, und $FM = CB + \frac{Cf.CP}{CB}$. Denn es ist (vermöge der Auflösung 636.) $z = a$

$-\frac{ex}{a} = fM$, $FM = 2a - z = a + \frac{cx}{a}$, und $a = CB$ Fig. 178.

wenn man in der gefundenen Gleichung für die Ellipse $y = 0$ setzet.

VII. Da nun $CB = a$, und auch $CA = a$ gefunden wird, wenn man $y = 0$ setzet; so ist $AB = 2a$. Es ist aber vermöge der Benennung $2a$ die unveränderliche Summe der Abstände von den Brennpuncten eines jeden Punctes M der Ellipse. Folglich ist in der Ellipse die Summe der Abstände eines jeden Punctes M von den Brennpuncten immer der Geraden AB gleich, welche die Scheitel verbindet.

§. 638.

Diese Gerade AB durch beyde Brennpuncte bis an die Scheitel der Ellipse gezogen wird die große Achse oder auch die Zwerchachse (axis major, axis transversus) genannt. Der von beyden Brennpuncten oder auch von beyden Scheiteln gleichweit abstehende Punct C der großen Achse heißt der Mittelpunct, und der Abstand des Mittelpunctes von dem einen Brennpuncte wird die Excentricität genannt. Die Gerade DE durch den Mittelpunct auf die Zwerchachse senkrecht gezogen und beyderseits bis an den Umfang der Ellipse verlängert, heißt die kleine Achse oder die vereinigte Achse (axis minor, axis conjugatus).

Aus der großen Achse und aus der Excentricität der Ellipse kann jederzeit die kleine Achse gefunden werden, und umgekehrt. Denn es ist vermöge der gefundenen Gleichung, wenn man $x = 0$ setzet, $y = \sqrt{(a^2 - c^2)} = CD = \sqrt{(CB^2 - Cf^2)}$. Dieses läßt sich auch aus den rechtwinkeligen Dreyecken FCE und fCE ableiten. Denn da in diesen zwey vollkommen gleichen Dreyecken, $EF = Ef$, und vermöge des Vorhergehenden $EF + Ef = AB$ ist; so ist auch $\frac{1}{2}(EF + Ef) = \frac{1}{2} AB$, nähmlich $Ef = CB$. Es ist aber $CE = \sqrt{(Ef^2 - Cf^2)}$; folglich ist auch $CE = \sqrt{(CB^2 - Cf^2)} = \sqrt{(a^2 - c^2)}$.

Fig. 178. Aus der Gleichung $CE = \sqrt{(CB^2 - Cf^2)}$ folgt $CE^2 = (CB + Cf).(CB - Cf) = (CA + Cf)(CB - Cf) = Af.fB$; folglich ist auch $Af : CE = CE : fB$. Nähmlich die kleine Halbachse ist die mittlere Proportionale zwischen den Abständen eines Brennpunctes von den beyden Scheiteln der Ellipse.

Anmerkung. Aus beyden gegebenen Achsen F' f' und D' E' kann die Ellipse beschrieben werden, wenn man beyde Achsen dergestalt senkrecht auf einander stellet, daß sie sich wechselsweise in C halbiren, und wenn man sodann aus dem Endpuncte E der kleinen Achse mit einem Halbmesser $CB = \frac{1}{2}F'f'$ die große Achse AB in F und f durchschneidet um die Excentricität $Cf = CF$ nähmlich um die Brennpuncte F und f zu erhalten. Sind einmahl die Brennpuncte bestimmet, so wird die Ellipse nach §. 635. beschrieben. Auch kann aus der gegebenen kleinen Achse und aus dem Abstande der Brennpuncte die große Achse, oder aus der großen Achse und aus dem Abstande der Brenpuncte die kleine Achse gefunden werden.

§. 639.

Wenn wir die kleine Halbachse mit b bezeichnen nähmlich wenn wir $a^2 - c^2 = b^2$ setzen, und diesen Werth in der gefundenen Gleichung für die Ellipse subştituiren; so erhalten wir $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, oder $\frac{a^2}{b^2}y^2 = a^2 - x^2$. Setzen wir in dieser Gleichung $b = a$, oder in der vorigen $c = 0$, so ist $y = \pm\sqrt{(a^2 - x^2)}$ eine Gleichung für die senkrechten Ordinaten eines Kreises, allwo die Abscissen auf dem Durchmesser von dem Mittelpuncte angerechnet werden. Eine Ellipse wird demnach in einen Kreis verwandelt, wenn man die zwey Achsen einander gleich setzet, oder die Excentricität verschwinden läßt.

Aus dieser gefundenen Gleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$

folgt auch

I. Daß sich das Quadrat einer jeden Ordinate zum Producte aus den beyden Abschnitten der großen Achse verhält, wie das Quadrat der kleinen Achse zum Quadrate der großen Achse, weil sich die gefundene Gleichung auch auf folgende Art vorstellen läßt; Fig. 178.

$y^2 = \frac{4b^2}{4a^2} \cdot (a+x)\,(a-x)$, nähmlich es ist

$PM^2 = \frac{DE^2}{AB^2} \times (AP \cdot PB)$, und endlich $PM^2 : AP \cdot PB = DE^2 : AB^2$.

II. Daß sich die Quadrate der Ordinaten gegen einander verhalten, wie die Producte aus den zugehörigen Abschnitten der großen Achse. Denn da $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a+x)\,(a-x)$, und $Y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a+X)\,(a-X)$ ist; so ist auch $y^2 : Y^2 = (a+x)\,(a-x) : (a+X)\,(a-X)$.

III. Daß sich jede Ordinate der Ellipse zu der zugehörigen Ordinate des Kreises auf der großen Achse verhält, wie die kleine Halbachse zu der großen Halbachse, oder wie die kleine Achse zu der großen: nähmlich (Fig. 179.) $PM : PM' = CE : CB$; wie auch $pm : pm' = CE : CB$; folglich auch $PM : pm = PM' : pm'$. 179.

Denn in der Ellipse ist $PM^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, und im Kreise ist $PM'^2 = a^2 - x^2$ für eben dieselbe Abscisse $CP = x$. Folglich ist auch $PM^2 : PM'^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) : a^2 - x^2$, nähmlich $PM : PM' = b : a$, u. s. w.

§. 640.

Für die Ellipse läßt sich auch eine Gleichung finden, wenn man den Anfangspunct der Abscissen an das eine Ende der großen Achse versetzet. Denn es sey $AP = x$, $PM = y$, $AC = CB = a$, und $DC = CE = b$; so ist $CP = x - a$. Nun ist vermöge des Vorhergehenden

Fig. 179. $PM^2 = \frac{CE^2}{CB^2}(CB^2 - CP^2)$; folglich ist auch

$y^2 = \frac{b^2}{a^2}[a^2 - (x-a)^2]$, und endlich $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$

eine Gleichung, aus der sich ebenfalls alle bisher entwickelten Eigenschaften der Ellipse ableiten lassen. Wenn man die ganze große Achse mit a und die ganze kleine Achse mit b bezeichnet; so findet man $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax - x^2)$.

§. 641.

Eine dritte Proportional-Linie zur großen und kleinen Achse wird in der Ellipse der Parameter der großen Achse genannt, nähmlich $\frac{(2b)^2}{2a} = p = \frac{2b^2}{a}$ ist der Parameter der großen Achse. Eine dritte Proportional-Linie zur kleinen und großen Achse aber heißt der Parameter der kleinen Achse, nähmlich $\frac{2a^2}{b} = P$ ist der Parameter der kleinen Achse.

Da $\frac{1}{2}p < b$ ist; so muß es auf der großen Achse zwischen A und C sowohl als auch zwischen C und B einen Punct von der Beschaffenheit geben, daß die Ordinate FG dem halben Parameter, und folglich GG' dem ganzen Parameter der großen Achse gleich sey. Um diesen Punct F oder f nähmlich CF = Cf zu finden, setze man (in der Gleichung §. 639.) $y = \frac{1}{2}p$, nähmlich $y = \frac{b^2}{a}$, so ist $\frac{b^4}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$. Daraus findet man $x = \pm\sqrt{(a^2 - b^2)}$, nähmlich $x = Cf$, oder $x = CF$, wenn F, f die Brennpuncte sind: In der Ellipse ist demnach eine Gerade durch den Brennpunct auf die große Achse senkrecht gezogen, und beyderseits bis an den Umfang der Ellipse verlängert gleich dem Parameter der großen Achse.

Der

Der Parameter der kleinen Achse läßt sich in der El- Fig.
lipse durch keine Ordinate vorstellen, weil $\frac{2a^2}{b} > 2a$, oder 179.
$P > 2a$ ist; nähmlich weil der Parameter der kleinen Achse größer ist als die große Achse selbst.

Da $\frac{2b^2}{a} = p$ gesetzet worden; so ist $b = \sqrt{\frac{1}{2}ap}$,
und $a = \frac{2b^2}{p}$. Nähmlich aus den beyden gegebenen Achsen läßt sich der Parameter, und aus dem Parameter und aus einer Achse läßt sich die andere Achse finden.

§. 642.

Wenn man in die Gleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$ (vermöge §. 640.) den Parameter der großen Achse hineinbringet, nähmlich $b^2 = \frac{1}{2}ap$ setzet; so ist $y^2 = px - \frac{px^2}{2a}$ wieder eine Gleichung für die Ellipse.

Setzen wir in dieser Gleichung $p = 2a$, so ist $y^2 = 2ax - x^2$ eine Gleichung für den Kreis.

Setzet man hingegen $2a$ in Hinsicht auf p so groß, daß der Quotient $\frac{p}{2a}$ kleiner als jede angebliche Größe sey, nähmlich setzet man $2a = \infty$ in Hinsicht auf p; so ist für jede endliche Abscisse vom Scheitel an gerechnet $y^2 = px$, eine Gleichung für die Parabel, weil das zweyte Glied $\frac{px^2}{2a} = \frac{px^2}{\infty}$ in Hinsicht auf das erste Glied bey der Gleichung $y^2 = px - \frac{px^2}{2a}$ verschwindet. Eine Ellipse also, deren große Achse in Hinsicht auf ihren Parameter unendlich groß ist, kann in jeder endlichen Entfernung von ihren Scheiteln gerechnet als eine Parabel angesehen werden, die mit ihr einerley Parameter, einerley Abscissen-Linie, und einerley Scheitel hat. Da bey dieser

Fig. ser Voraussetzung ($2a = \infty$ in Hinsicht auf p) auch die Excentricität $= \infty$ ist und umgekehrt; so folgt, daß man sehr excentrische Ellipsen bey ihren Scheiteln (z. B. die Laufbahnen der Cometen bey ihren Sonnennähen für parabolische Linien ansehen könne.

§. 643.

180 Auch läßt sich für die Ellipse eine Gleichung finden, wenn man die kleine Achse für die Abscissen-Linie und den Mittelpunct C, oder auch den einen Scheitel der kleinen Achse für den Anfangspunct der Abscissen annimmt (Fig. 180.). Es sey z. B. $CP = x$, die senkrechte Ordinate $PM = y$, $CB = a$, und $CE = b$; so ist $GM = CP = x$, $CG = PM = y$. Nun ist (vermöge §. 539.) $GM^2 = \frac{CE^2}{CB^2}(CB^2 - CG^2)$; folglich ist auch $x^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - y^2)$. Daraus findet man $y^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - x^2)$.

Setzet man hingegen $DP = x$, $PM = y$; so ist $CP = x - b = GM$, folglich $(x-b)^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - y^2)$; und endlich $y^2 = \frac{a^2}{b^2}(2bx - x^2)$.

Jede dieser zwey Gleichungen gibt uns zu erkennen:

I. Daß zu jeder Abscisse zwey vollkommen gleiche Ordinaten nach entgegen gesetzten Richtungen gehören.

II. Daß sich das Quadrat einer jeden Ordinate der kleinen Achse zum Producte aus den beyden Abschnitten eben derselben kleinen Achse verhält, wie das Quadrat der großen Halbachse zum Quadrate der kleinen Halbachse. Wie auch daß sich die Quadrate der Ordinaten der kleinen Achse gegen einander verhalten, wie die Producte aus den zugehörigen Abschnitten der kleinen Achse von ihren Scheiteln oder Endpuncten gezählet.

III. Daß sich auch die Ordinaten der kleinen Achse gegen einander verhalten, wie die gleichnahmigen Ordinaten eines Kreises auf der kleinen Achse, oder daß sich jede elliptische Ordinate der kleinen Achse zur übereinstimmenden Kreis-Ordinate auf eben dieser Achse verhält, wie a zu b; u. s. w. Fig. 180.

In der letzten Gleichung $y^2 = \frac{a^2}{b^2}(2bx - x^2)$ setze man $a^2 = \frac{1}{2}bP$; so ist $y^2 = Px - \frac{Px^2}{2b}$ wieder eine Gleichung für die Ellipse durch die kleine Halbachse und ihren Parameter ausgedrucket.

Man könnte auch in die zwey Gleichungen $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ und $y^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - x^2)$ den Parameter hineinbringen, wenn es erforderlich wäre; dieses ist aber nicht gewöhnlich, weil der Parameter der kleinen Achse nie als eine Constructions-Linie erscheinen kann.

§. 644.

Aus dem Vorhergehenden sehen wir, daß bey der Ellipse nur folgende drey Gleichungen zu bemerken sind. Diese müssen wohl dem Gedächtnisse eingepräget werden.

I. $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, wenn man den Mittelpunct der Ellipse für den Anfangspunct der Abscissen annimmt, die eine Halbachse mit a, die andere mit b bezeichnet, und die Abscissen auf der Halbachse a zählet.

II. $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$, wenn man die eine Halbachse mit a die andere mit b benennet, die Achse $2a$ für die Abscissen-Linie, und ihren Scheitel für den Anfangspunct der Bbscissen annimmt.

III. $y^2 = px - \frac{px^2}{2a}$ wenn man eine aus den zwey Achsen mit $2a$, und ihren Parameter mit p bezeichnet, die

Fig. Achse $2a$ für die Abscissen-Linie und ihren Scheitel für den Anfangspunct der Abscissen annimmt.

Anmerkung. Wenn man bey dem zweyten und dritten Falle die ganzen Achsen mit a und b bezeichnet; so ist in der zweyten Gleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax - x^2)$, und in der dritten $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$.

§. 645.

181. Wenn man an was immer für einen Punct M der Ellipse (Fig. 181.) aus beyden Brennpuncten die Leitstrahlen FM, fM zieht, einen derselben z. B. den größeren fM verlängert, und den Winkel GMF durch die Gerade MT halbiret; so berühret diese Gerade MT die Ellipse in dem Puncte M.

Denn ein jeder anderer Punct Q der Geraden MT liegt außer der Ellipse, welches man auf folgende Art darthun kann. Man schneide $MG = MF$ ab, und ziehe GF, so ist $GE = EF$ und MT senkrecht auf GF. Ferner ziehe man aus was immer für einem Puncte Q die Geraden QG, QF, Qf, so ist $QG = QF$. Nun ist $fQ + QG > fG$; folglich ist auch $fQ + QF > fG$. Es ist aber $fG = fM + MF = AB$; folglich ist auch $fQ + QF > AB$. Der Punct Q liegt demnach außer der Ellipse, weil sonst $fQ + QF = AB$ seyn müßte. Eben dieses läßt sich von einem jeden anderen Puncte außer M erweisen.

Anmerkung. Es ist demnach sehr leicht an einen gegebenen Punct M der Ellipse eine Tangente zu ziehen. Ist hingegen durch einen außer der Ellipse gegebenen Punct T
180. (Fig. 180.) eine Tangente an die Ellipse zu ziehen; so beschreibe man aus diesem gegebenen Puncte mit der Entfernung Tf des einen Brennpunctes einen Kreisbogen fR, durchschneide diesen Kreisbogen aus dem anderen Brennpuncte mit dem Halbmesser $FR = AB$, verbinde R und F durch die Gerade RF, und ziehe von T nach Q die Gera-

de

de TQ. Diese Gerade TQ wird die Ellipse in Q berühren. Denn es ist TR = Tf, und auch Qf = QR; folglich ist fR senkrecht auf TQ, und der Winkel fQT = RQT. Fig. 180.

Es ist (Fig. 181.) der Winkel TMF = fMQ, weil jeder derselben dem Winkel GMT gleich ist, nähmlich die Leitstrahlen eines und desselben Punctes der Ellipse schließen mit der Tangente dieses Punctes gleiche Winkel ein. Wenn demnach mehrere Feuer- oder Licht- oder auch Stimm-Strahlen aus einem Brennpuncte eines elliptischen Hohlspiegels (der durch die Umdrehung des halben elliptischen Umfanges AMB um die große Achse AB erzeuget wird) nach was immer für Richtungen ausfahren; so werden dieselben nach dem Abprellen sich wieder in dem anderen Brennpuncte vereinigen. 181.

§. 646.

Nun läßt sich in der Ellipse für jede gegebene Abscisse die zugehörige Subnormale PN, die Normale MN, die Subtangente PT, und die Tangente MT bestimmen, wenn man aus dem Puncte M die Senkrechte MN auf MT errichtet. Es ist nähmlich

I. Die Subnormale $PN = \frac{b^2 x}{a^2}$, wenn man die Abscissen auf der grossen Achse von dem Mittelpuncte zählet. Denn da MN und FG senkrecht auf MT sind; so ist fMN ∽ fGF; folglich ist auch fG : fF = fM : fN. Es ist aber $fG = fM + MF = AB = 2a$, $fF = 2c$, $fM = a + \frac{cx}{a}$ wenn man $CF = c$ setzet (§. 636.); folglich ist $2a : 2c = a + \frac{cx}{a} : fN$, nähmlich $fN = c + \frac{c^2 x}{a^2}$. Es ist aber $PN = fP - fN$, und $fP = c + x$; folglich ist endlich $PN = x - \frac{c^2 x}{a^2} = \frac{(a^2 - c^2)x}{a^2} = \frac{b^2 x}{a^2}$, wenn man statt $a^2 - c^2$ seinen Werth b^2 substituiret (§. 639.).

Fig. 181. **Anmerkung.** Wenn man $AP = x$ setzet, so erhält man nach gehöriger Reduction $PN = \frac{b^2}{a} - \frac{b^2 x}{a^2}$; oder auch

$PN = \frac{1}{2}p - \frac{px}{2a}$, wenn man den Parameter $p = \frac{2b^2}{a}$ hineinbringet.

II. Die Normale $MN = \sqrt{[b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^4}(a^2 - b^2)]}$

$= b\sqrt{(1 - \frac{c^2 x^2}{a^4})}$ für die Abscisse CP wird aus dem rechtwinkeligen Dreyecke MPN gefunden.

III. Die Subtangente $PT = \frac{a^2 - x^2}{x}$ für die Abscisse CP findet man aus den ähnlichen Dreyecken NPM und PMT. Denn es ist $NP (\frac{b^2 x}{a^2} : PM (\frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)} = PM$

$(\frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)} : PT = \frac{a^2 - x^2}{x}$.

Anmerkung. Setzet man $x = 0$, so ist $PT = \infty$; folglich läuft die Tangente an dem Scheitel der kleinen Achse mit der großen Achse parallel. Setzet man $x = a$, so ist $PT = 0$. Folglich steht die Tangente an dem Scheitel der großen Achse senkrecht auf derselben. Für $AP = x$ ist $PT = \frac{2ax - x^2}{a - x}$. Setzet man in dieser Formel $x > a$, nähmlich $AP > AC$; so ist PT negativ. Folglich fällt in diesem Falle die Subtangente nicht von P gegen den Anfangspunct A, sondern auf die entgegen gesetzte Seite.

IV. CT ist $= \frac{a^2}{x}$ für die Abscisse $CP = x$. Denn es ist $CT = CP + PT = x + \frac{a^2 - x^2}{x} = \frac{a^2}{x}$. Es ist also $x : a = a : CT$, nähmlich $CP : CA = CA : CT$.

V.

V. AT ist $= \frac{a^2}{x} - a = \frac{a(a-x)}{x}$ für die Abscisse Fig. 181.
CP $= x$.

Die Tangente MT läßt sich aus dem rechtwinkeligen Dreyecke MPT bestimmen.

Nachdem man einmahl die Subtangente, Subnormale, Normale für jede Abscisse auf der großen Achse kennet; so wird es nun nicht mehr schwer seyn, eben diese Linien für jede Abscisse auf der kleinen Achse zu bestimmen.

§. 647.

Eine Gerade AB (Fig. 182.) von einem Puncte A der 182.
Ellipse an einen andern Punct B eben derselben Ellipse durch den Mittelpunct C gezogen heißt ein Durchmesser der Ellipse. Eben so ist DE ein Durchmesser dieser Ellipse. Zwey Durchmesser, deren jeder mit der Tangente des Scheitels von dem anderen Durchmesser parallel läuft, heißen vereinigte oder zusammen gehörige Durchmesser (diametri conjugatae). Eine dritte Proportional-Linie zu dem ersten und zweyten vereinigten Durchmesser wird der Parameter des ersten Durchmessers genannt.

§. 648.

Aufgabe. Es soll eine Gleichung für die Ellipse gefunden werden, wenn man einen Durchmesser BA für die Abscissen-Linie annimmt, den Anfangspunct der Abscissen in den Mittelpunct setzet, nähmlich CP mit x benennet, und die Ordinaten PM $= y$ zu dem vereinigten Durchmesser DE oder zu der Tangente AT parallel gedenket. Diese Gleichung zwischen x und y soll blos durch die zwey Stücke CA $= m$ und CD $= n$ der vereinigten Durchmesser ausgedrucket werden.

Auflösung. Es sey CP $= x$, PM $= y$, CA $= m$, CD $= n$, die große Halbachse $= a$, die kleine $= b$. Da die Puncte A und D eine festgesetzte Lage haben; so setze man der Kürze wegen die Senkrechte auf die große Halbachse AG $= t$, die Senkrechte DN $= p$,

CG

Fig. 182. CG$=u$, CN$=\omega$, GT$=s$, AT$=q$. Nun ist (vermöge §. 644.) $t^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - u^2)$

$$p^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - \omega^2).$$

$$s = \frac{a^2 - u^2}{u}.$$

In den zwey ähnlichen Dreyecken ATG und DCN ist $TG^2(\frac{(a^2-u^2)^2}{u^2}:AG^2)\frac{b^2}{a^2}(a^2-u^2)=CN^2(\omega^2:DN^2(\frac{b^2}{a^2}(a^2-\omega^2)$ nähmlich $\frac{a^2-u^2}{u^2}:1=\omega^2:a^2-\omega^2$; daraus folgt $\omega^2=a^2-u^2$.

In eben diesen beyden Dreyecken ist

$$AT^2(q^2:GT^2)\frac{(a^2-u^2)^2}{u^2}=CD^2(n^2:CN^2(a^2-u^2;$$

nähmlich $q^2:\frac{a^2-u^2}{u^2}=n^2:1$ daraus folgt

$$q^2 = \frac{n^2}{u^2}(a^2-u^2).$$

Man ziehe ferner aus dem Puncte M die Senkrechte MQ auf die große Halbachse; so ist $MQ^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-CQ^2)$ oder $\frac{a^2}{b^2}.MQ^2=a^2-CQ^2$.

Damit nun die gesuchte Gleichung erhalten werde, so muß MQ^2 und CQ^2 durch x und y, ferner durch m und n ausgedrucket werden. Dieses kann auf folgende Art geschehen. Man verlängere MQ, fälle auf diese Verlängerung aus dem Puncte P die Senkrechte PS, und aus eben demselben Puncte P die Senkrechte PV auf die große Halbachse. Nun ist in den ähnlichen Dreyecken AGT und PMS,

$$AT(q:AG(t=PM(y:MS=\frac{ty}{q};$$

$$AT(q:GT(s=PM(y:PS=\frac{sy}{q}.$$

Fer-

Ferner ist in den ähnlichen Dreyecken CPV und CAG Fig. 182.

$$CA(m : AG(t = CP(x : PV = \frac{tx}{m};$$

$$CA(m : CG(u = CP(x : CV = \frac{ux}{m}.$$

Folglich ist $MQ = PV - MS = \frac{tx}{m} - \frac{ty}{q}$;

$$\text{und } CQ = CV + PS = \frac{ux}{m} + \frac{sy}{q}$$

Wenn man diese Werthe in der oberen Hauptverglei-

chung $\frac{a^2}{b^2}.MQ^2 = a^2 - CQ^2$ substituiret; so erhält man

$$\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{tx}{m} - \frac{ty}{q}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{ux}{m} + \frac{sy}{q}\right)^2 \text{ nähmlich}$$

$$\left(\frac{a^2}{b^2}.t^2 + s^2\right)\frac{y^2}{q^2} + \left(us - \frac{a^2}{b^2}.t^2\right)\frac{2xy}{mq} + \left(\frac{a^2}{b^2}.t^2 + u^2\right)\frac{x^2}{m^2} = a^2.$$

Es ist aber, wenn man in dieser Gleichung bey einem jeden Gliede ins besondere für die Größen t, s und q die oben angesetzten Werthe substituiret, das erste Glied

$$\left(\frac{a^2}{b^2}t^2 + s^2\right)\frac{y^2}{q^2} = \frac{y^2}{q^2}\left[a^2 - u^2 + \frac{(a^2 - u^2)^2}{u^2}\right] = \frac{y^2}{q^2}(a^2 - u^2).\frac{a^2}{u^2} =$$

$$y^2\frac{(a^2 - u^2)a^2}{u^2} : \frac{n^2}{u^2}(a^2 - u^2) = \frac{y^2 a^2}{n^2}$$; ferner ist das zweyte

$$\left(us - \frac{a^2}{b^2}.t^2\right)\frac{2xy}{mq} = (a^2 - u^2 - a^2 + u^2)\frac{2xy}{mq} = 0$$; das dritte

$$\left(\frac{a^2}{b^2}.t^2 + u^2\right)\frac{x^2}{m^2} = (a^2 - u^2 + u^2)\frac{x^2}{m^2} = \frac{a^2x^2}{m^2}.$$

Folglich ist $\frac{y^2 a^2}{n^2} + \frac{a^2 x^2}{m^2} = a^2$.

Daraus findet man endlich $y^2 = \frac{n^2}{m^2}(m^2 - x^2)$ die gesuchte Gleichung, welche mit jener für senkrechte Ordinaten auf der großen oder kleinen Achse vollkommen übereinstimmet.

Fig. 182. met. Dieses ist leicht einzusehen, wenn man bedenket, daß diese Gleichung allgemein ist, jene aber nur einen besondern Fall ausdrucket.

Diese Gleichung gibt uns zu erkennen: 1), daß zu jeder positiven und negativen Abscisse zwey gleiche Ordinaten nach entgegen gesetzten Richtungen gehören, und daß demnach der Durchmesser die ganzen Parallelen MM' zu der Tangente AT und auch seinen vereinigten Durchmesser halbiret. 2). Daß jeder Durchmesser in dem Mittelpuncte der Ellipse halbiret ist. 3) Daß sich das Quadrat einer jeden Ordinate zum Producte aus den beyden Abschnitten des ersten Durchmessers von seinen beyden Scheiteln gerechnet verhält, gleichwie das Quadrat des vereinigten Durchmessers zum Quadrate des ersten Durchmessers, auf dem die Abscissen gezählet werden; u. s. w.

Es ist nun leicht den Anfangspunct der Abscissen an den Scheitel eines Durchmessers zu versetzen; wie auch anstatt des vereinigten Durchmessers in die Gleichung den Parameter des ersten Durchmessers zu bringen; u. s. w.

Anmerkung. Nun ist es nicht schwer zu einer verzeichneten Ellipse die Lage und Größe der großen und kleinen Achse nebst der Excentricität durch Verzeichnung zu finden. Man ziehe nähmlich zwey parallele Sehnen, theile dieselben in zwey gleiche Theile, und verbinde die Theilungspuncte; so wird die Verbindungs-Linie ein Durchmesser; folglich die Mitte desselben der Mittelpunct der Ellipse seyn. Aus diesem Mittelpuncte schneide man nun mit einer beliebigen Eröffnung oben und unten, oder auch rechts und links von dem Umfange der Ellipse zwey Puncte ab; so ist die Verbindungs-Linie eine doppelte Ordinate auf der großen oder auf der kleinen Achse. Diese in zwey gleiche Theile getheilet, und der Theilungspunct mit dem Mittelpuncte verbunden gibt endlich entweder die große oder die kleine Achse, und eine in dem Mittelpuncte errichtete Senkrechte die andere Achse. Durchschneidet man ferner aus dem Endpuncte der kleinen Achse mit einer Eröffnung, welche der großen Halbachse

gleich ist, auf beyden Seiten die große Achse; so hat man Fig. durch diese Durchschnittspuncte auch die Brennpuncte also 182. auch die Excentricität erhalten.

§. 649.

Wir wollen noch folgende zwey Eigenschaften der Ellipse entwickeln.

I. Die Summe der Quadrate von jeden zweyen vereinigten Durchmessern ist gleich der Summe der Quadrate von den beyden Achsen, nähmlich es ist $4m^2+4n^2=4a^2+4b^2$, oder $m^2+n^2=a^2+b^2$.

II. Das Product aus jeden zweyen vereinigten Durchmessern mit dem Sinus ihres Neigungswinkels multipliciret ist gleich dem Producte aus den zwey Achsen, nähmlich $2m.2n.\sin q=2a.2b$, oder $mn.\sin q=ab$, wenn man den Winkel DCA oder auch DCB$=q$, und den Halbmesser der trigonometrischen Tafeln $=1$ setzet.

Denn in den zwey ähnlichen Dreyecken DCN und ATG ist $AG^2:GT^2=DN^2:NC^2$, nähmlich es ist

$$\frac{b^2}{a^2}(a^2-CG^2):\frac{(a^2-CG^2)^2}{CG^2}=\frac{b^2}{a^2}(a^2-CN^2):NC^2.$$

Daraus folgt $CN^2+CG^2=a^2$.

Nun ist aber auch $CN^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-DN^2)$,

und $CG^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-AG^2)$;

folglich ist $\frac{a^2}{b^2}(b^2-DN^2)+\frac{a^2}{b^2}(b^2-AG^2)=a^2$.

Daraus folgt $DN^2+AG^2=b^2$.

Wenn man diese beyden Gleichungen zusammen addiret, so ist $CN^2+DN^2+CG^2+AG^2=a^2+b^2$. Es ist aber $CN^2+DN^2=CD^2$, und $CG^2+AG^2=AC^2$; folglich ist $CD^2+AC^2=m^2+n^2$;
nähmlich I. $m^2+n^2=a^2+b^2$.

Fig. 182. Um die zweyte Eigenschaft zu erweisen, ziehe man AD; so ist der Flächeninhalt des Dreyeckes ACD $=$ $\frac{1}{2}$ (DN $+$ AG) (CN $+$ CG) $-$ $\frac{1}{2}$ CN . DN $-$ $\frac{1}{2}$ CG . AG $=$ $\frac{1}{2}$ CN . AG $+$ $\frac{1}{2}$ CG . DN.

Es ist aber $CN = \sqrt{(a^2 - CG^2)}$, und $AG = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - CG^2)}$; folglich ist $\frac{1}{2}CN.AG = \frac{b}{2a}(a^2 - CG^2) = \frac{ab}{2} - \frac{b}{2a}.CG^2$.

Ferner ist $DN^2 = b^2 - AG^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}(a^2 - CG^2) = \frac{b^2}{a^2}.CG^2$, nähmlich $DN = \frac{b}{a}.CG$; folglich ist $\frac{1}{2}CG.DN = \frac{b}{2a}.CG^2$.

Es ist also der Flächeninhalt des Dreyeckes $ACD = \frac{ab}{2} - \frac{b}{2a}.CG^2 + \frac{b}{2a}.CG^2 = \frac{1}{2}ab$.

Es ist aber auch eben dasselbe Dreyeck $ACD = \frac{1}{2}AC.CD.\sin ACD = \frac{1}{2}mn.\sin q$ (vermöge §. 564. II.); folglich ist auch $\frac{1}{2}mn.\sin q = \frac{1}{2}ab$, und endlich II. $mn.\sin q = ab$.

Anmerkung. Da das Dreyeck $ACD = \frac{1}{2}ab$ ist, so ist das Parallelogramm $CL = ab$, und $IL = 4ab = 2a.2b$, nähmlich bey der Ellipse ist das herumbeschriebene Parallelogramm auf jeden zweyen vereinigten Durchmessern dem Rechtecke auf den beyden Achsen gleich.

§. 650.

Aus den gefundenen Gleichungen $m^2 + n^2 = a^2 + b^2$ und $mn.\sin q = ab$ folgt, daß man aus zwey gegebenen vereinigten Durchmessern $DE = 2n$, $AB = 2m$, und aus ihrem Neigungswinkel $ACE = q$ beyde Halbachsen a, b, der Ellipse finden, und sodann die Ellipse (nach §. 635.) beschreiben könne.

Denn

Denn da $a^2 + b^2 = m^2 + n^2$, und $ab = mn \sin q$ ist; Fig.

so ist $\begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 = m^2 + n^2 + 2mn.\sin q \\ a^2 - 2ab + b^2 = m^2 + n^2 - 2mn.\sin q \end{cases}$ 182.

folgl. $\begin{cases} a + b = \sqrt{(m^2 + n^2 + 2mn.\sin q)} \\ a - b = \sqrt{(m^2 + n^2 - 2mn.\sin q)} \end{cases}$

und $\begin{cases} a = \frac{1}{2}\sqrt{(m^2+n^2+2mn\sin q)} + \frac{1}{2}\sqrt{(m^2+n^2-2mn.\sin q)} \\ b = \frac{1}{2}\sqrt{(m^2+n^2+2mn.\sin q)} - \frac{1}{2}\sqrt{(m^2+n^2-2mn.\sin q)} \end{cases}$

Eben so lassen sich aus den gegebenen Achsen $2a$, $2b$ zwey vereinigte Durchmesser finden, welche einen gegebenen Winkel $ACE = q$ einschließen.

Auch läßt sich aus dem gegebenen Neigungswinkel $ACE = q$ zweyer vereinigten Durchmesser, aus dem halben Durchmesser $AC = m$, und aus der großen Halbachse $CF = a$ der Winkel $ACF = v$ bestimmen, welchen der halbe Durchmesser mit der Halbachse einschließt.

Denn in dem Dreyecke CAT ist $\sin CTA : CA = \sin CAT : CT$. Es ist aber $\sin CTA = \sin TCE = \sin (q - v)$, $CA = m$, $\sin CAT = \sin CAL = \sin ACE = \sin q$, und $CT = \frac{a^2}{CG}$ (§. 646. IV.); folglich

$$\sin(q-v) : m = \sin q : \frac{a^2}{CG}, \text{ nähmlich } CG = \frac{a^2 \sin(q-v)}{m.\sin q}.$$

Ferner ist in dem rechtwinkeligen Dreyecke CGA, $\sin G : AC = \sin CAG$ oder $\cos ACG : CG$, nähmlich

$$1 : m = \cos v : \frac{a^2 \sin(q-v)}{m.\sin q}, \text{ und daraus findet man}$$

$$m^2.\cos v.\sin q = a^2 \sin(q-v) = a^2(\sin q.\cos v - \sin v.\cos q),$$

nähmlich $\frac{\sin v}{\cos v} = \frac{a^2 - m^2}{a^2} \cdot \frac{\sin q}{\cos q}$, und endlich $\text{tang } v = \frac{a^2 - m^2}{a^2}.\text{tang } q$, oder auch $\text{tang } v = \frac{(a+m)(a-m).\text{tang } q}{a^2}$,

welches sich sehr leicht mittelst der Logarithmen entwickeln läßt.

§. 651.

Fig. 179.

§. 651.

Der Flächeninhalt einer Ellipse läßt sich bestimmen. Er ist gleich $ab\pi$, wenn man die eine Halbachse mit a die andere mit b und das Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise eines Zirkels mit π bezeichnet.

Denn man stelle sich vor, daß die Achse AB (Fig. 179.) in eine unendliche Anzahl gleicher Theile getheilet sey. Man gedenke sodann aus allen Theilungspuncten senkrechte Ordinaten bis an den Umfang der Ellipse, und verlängere diese Ordinaten bis an den Umkreis auf der großen Achse; so ist dadurch die halbe Ellipse BG'A und auch die halbe Kreisfläche BM'A in ihre Elemente aufgelöset. Nun verhält sich jedes elliptische Element zu dem übereinstimmenden Kreis-Elemente, wie die elliptische Ordinate zu der übereinstimmenden Kreis-Ordinate, weil jede zwey solche Elemente für zwey Rechtecke auf einer und derselben Grund-Linie angesehen werden können, deren Höhen die Ordinaten sind. Oder jedes elliptische Element verhält sich zu dem übereinstimmenden Kreis-Elemente wie die kleine Halbachse b zu der großen a, weil sich jede elliptische Ordinate zu der übereinstimmenden Kreis-Ordinate auf der großen Achse wie b zu a verhält. Es verhält sich demnach auch die Summe aller elliptischen Elemente zur Summe aller Kreis-Elemente wie b zu a (§. 191.); nähmlich die halbe elliptische Fläche verhält sich zur halben Kreisfläche auf der großen Achse wie b zu a; und auch die ganze elliptische Fläche $= e$ verhält sich zur ganzen Kreisfläche $= k$, wie b zu a, nähmlich

$e : k = b : a$, und folglich $e = \frac{b}{a}.k$. Es ist aber auf der großen Achse die ganze Kreisfläche $k = a^2\pi$; folglich $e = ab\pi$.

Anmerkung. Da $ab\pi = (\sqrt{ab})^2\pi$ ist; und $\sqrt{ab}$ die mittlere geometrische Proportional-Linie zwischen a und b vorstellet; so kann man auch sagen: die ganze elliptische Fläche ist einem Kreise gleich, dessen Halbmesser zwischen den beyden Halbachsen der Ellipse die mittlere geometrische Proportional-Linie ist.

Es ist leicht einzusehen, daß auch jeder halbe elliptische Abschnitt AG'F zum übereinstimmenden Kreisabschnitte AG''F sich verhält wie b zu a, und auch jeder elliptische Ausschnitt ACG' zum übereinstimmenden Kreisausschnitte ACG'' wie b zu a, weil das Dreyeck FCG' : FCG'' = FG' : FG'' = b : a sich verhält. Fig. 179.

§. 652.

Der Cubikinhalt = E eines Ellipsoid auf der großen Achse (welches durch die Umdrehung der Ellipse um die große Achse erzeuget wird) ist $E = \frac{4}{3}ab^2\pi$, und der Cubikinhalt = E' eines Ellipsoid auf der kleinen Achse ist $E' = \frac{4}{3}ba^2\pi$. Folglich ist das halbe Ellipsoid auf der großen Achse $\frac{1}{2}E = \frac{2}{3}ab^2\pi$, und auf der kleinen Achse $\frac{1}{2}E' = \frac{2}{3}b.a^2\pi$. Nähmlich auf jeder Achse ist das halbe Ellipsoid gleich $\frac{2}{3}$ eines Cylinders von einer und derselben Grundfläche und Höhe.

Denn man zertheile nur wieder wie im vorigen Falle das Ellipsoid und die Kugel auf der großen Achse in ihre Elemente (in lauter eingeschriebene Cylinder von einer gleichen und unendlich kleinen Höhe), so wird sich jedes ellipsoidische Element zu dem übereinstimmenden Kugel-Elemente verhalten, wie die Kreisfläche der elliptischen Ordinate zur Kreisfläche der übereinstimmenden Ordinate des Kreises auf der großen Achse (§. 514. II.), weil die Kreisflächen von diesen übereinstimmenden Ordinaten nichts anderes sind als die Grundflächen der Elemente (der eingeschriebenen Cylinder von gleicher Höhe). Oder jedes ellipsoidische Element verhält sich zum übereinstimmenden Kugel-Elemente wie das Quadrat der elliptischen Ordinate zum Quadrate der Kreis-Ordinate auf der großen Achse (§. 456.); oder endlich jedes ellipsoidische Element verhält sich zum übereinstimmenden Kugel-Elemente wie b^2 zu a^2. Folglich ist auch die Summe aller ellipsoidischen Elemente zur Summe aller Kugel-Elemente wie b^2 zu a^2, nähmlich das Ellipsoid = E auf der großen Achse zur Kugel = K auf eben derselben Achse

wie

Fig. wie $b^2 : a^2$. Es ist demnach $E = \frac{b^2}{a^2} K$. Es ist aber $K = \frac{4}{3} a^3 \pi$; folglich ist auch $E = \frac{4}{3} ab^2 \pi$, und $\frac{1}{2} E = \frac{2}{3} a.b^2 \pi$.

Eben so kann man darthun, daß auch das Ellipsoid $= E'$ auf der kleinen Achse zur Kugel auf eben derselben Achse sich verhält wie a^2 zu b^2, weil das Quadrat jeder elliptischen Ordinate der kleinen Achse zum Quadrate der übereinstimmenden Kreis-Ordinate auf eben dieser Achse sich verhält wie $a^2 : b^2$ (643. III.); und folglich ist $E' = \frac{4}{3} ba^2 \pi$ und $\frac{1}{2} E' = \frac{2}{3} b.a^2 \pi$.

III. Von der Hyperbel.

§. 653.

183. Es sey P′P eine gerade Linie; F, f zwey Puncte auf derselben. Man gedenke eine krumme Linie von der Beschaffenheit, daß die Differenz der Abstände fM — FM eines jeden Punctes M immer einer unveränderlichen Geraden $B'A' = 2a$ gleich sey; so heißt eine solche krumme Linie eine **Hyperbel**. Die zwey Puncte f, F werden wie bey der Ellipse **Leitpuncte** oder **Brennpuncte** genannt; und der von f und F gleichweit abstehende Punct C der Geraden fF heißt der **Mittelpunct** der Hyperbel.

Aus den gegebenen Geraden fF und B′A′ kann demnach eine Hyperbel beschrieben werden, wenn man die Gerade B′A′ verlängert, auf derselben mehrere Puncte G nach Belieben annimmt, sodann mit dem Halbmesser B′G aus f einen Kreisbogen beschreibt, und darauf diesen Kreisbogen mit dem Halbmesser GA′ aus F durchschneidet um die Puncte M, m der Hyperbel zu erhalten. Auf diese Art kann man so viele Puncte der Hyperbel bestimmen, als es nur erforderlich ist. Auch läßt sich eine Hyperbel durch eine ununterbrochene Bewegung beschreiben, wenn man an ein Lineal fL einen Faden FML anbringt, der um B′A′ kürzer ist als fL. Sodann befestiget man das eine Ende des Fadens in F und das andere in L, drehet das Lineal fM mit

dem

dem Ende f um den unbeweglichen Punct f, und drücket bey dieser drehenden Bewegung den Faden ML mit einem Stifte M immer an das Lineal fL; so wird der Weg, welchen der Punct M bey dieser Bewegung zurückleget, eine Hyperbel seyn. Fig. 183.

§. 654.

Aufgabe. Eine Gleichung für die Hyperbel zu finden.

Auflösung. Man nehme die durch f, F gezogene Gerade für die Abscissen-Linie und C für den Anfangspunct der Abscissen an, setze $CF = Cf = c$, $Mf - MF = B'A' = 2a$, $CP = x$, die senkrechte Ordinate $PM = y$, und $FM = z$; so ist $fM = 2a + z$, $fP = CP + Cf = x + c$, und $FP = CP - CF = x - c$.

Nun ist $FM^2 = FP^2 + PM^2$; nähmlich $z^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2$; und $fM^2 = fP^2 + PM^2$; d.i. $4a^2 + 4az + z^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2$;

folglich ist $z = \frac{cx}{a} - a$; und $z^2 = \frac{c^2x^2}{a^2} - 2cx + a^2$.

Man substituire diesen Werth in die erste Gleichung statt z^2; so ist $\frac{c^2x^2}{a^2} - 2cx + a^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2$. Daraus findet man endlich $y = \pm \sqrt{[\frac{c^2 - a^2}{a^2}(x^2 - a^2)]}$ die gesuchte Gleichung für die Hyperbel.

Anmerkung. Aus der gegebenen Auflösung erhellet auch, daß der Leitstrahl (radius vector) $FM = \frac{cx}{a} - a$; und $fM = a + \frac{cx}{a}$ ist.

§. 655.

Diese gefundene Gleichung gibt uns zu erkennen, 1) daß zu jeder positiven oder negativen Abscisse, die größer ist als a, zwey gleiche Ordinaten nach entgegen gesetzten Richtungen gehören. 2) Daß für $x = CA = a$,

und

Fig. 183. und auch für $x = CB = -a$ die Ordinate $= o$ ist. B und A sind demnach die Scheitel der Hyperbel. Die Gerade $BA = 2a = fM - FM$ heißt die erste Achse der Hyperbel. 3) Für $x = CA = v$ und auch für $x = CB = -v$ ist die Ordinate unmöglich. Zwischen A und B gibt es demnach keine Ordinaten. 4) Hingegen ist für $x = \infty$, und auch für $x = -\infty$ sowohl die positive als auch die negative Ordinate auf beyden Seiten unendlich groß. Die Hyperbel geht demnach mit vier Schenkeln, mit zweyen von A gegen die Gegend P, und mit zweyen gegen P' ohne Ende fort. Auch ist leicht einzusehen, daß bey einer und derselbeu Hyperbel alle vier Schenkel einander vollkommen gleich sind.

§. 656.

Um die gefundene Gleichung abzukürzen setze man

$$c^2 - a^2 = b^2 = (c+a)(c-a)\text{; so ist } y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2).$$

Diese Gerade b heißt die zweyte Halbachse. Sie ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen $c+a$ und $c-a$, nähmlich zwischen den Abständen Eines Scheitels der Hyperbel von den beyden Brennpuncten. Will man nun aus dem Mittelpuncte C auf die erste Achse eine Senkrechte verzeichnen, die der zweyten Achse gleich ist; so durchschneide man die Senkrechte CD aus A mit einem Halbmesser $AD = CF = c$, so ist CD die zweyte Halbachse, und folglich DE die ganze zweyte Achse, wenn man $CE = CD$ abschneidet. Denn es ist $CD^2 = AD^2 - AC^2 = c^2 - a^2 = b^2$.

184. Will man hingegen an dem einen Scheitel A der Hyperbel (Fig. 184.) eine Senkrechte ED verzeichnen, die der zweyten Achse gleich ist; so darf man nur die gezogene Senkrechte ED aus dem Mittelpuncte C mit dem Halbmesser CF in E und D durchschneiden. Denn es ist sodann $AD^2 = CD^2 - CA^2 = c^2 - a^2 = b^2$ und $AD =$ der zweyten Halbachse. Aus diesem ist nun auch leicht zu ersehen, wie man aus den gegebenen zwey Achsen einer Hyperbel die Brennpuncte bestim-

stimmen, und sodann die krumme Linie (nach §. 653.) beschreiben könne. Fig. 183.

§. 657.

Die abgekürzte Gleichung der Hyperbel $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ $= \frac{b^2}{a^2}(x+a)(x-a)$ gibt uns zu erkennen, daß sich das Quadrat einer jeden Ordinate zum Producte aus den Abständen der Ordinaten von den beyden Scheiteln verhält, wie das Quadrat der zweyten Achse zum Quadrate der ersten Achse; wie auch, daß sich die Quadrate der Ordinaten gegen einander verhalten, wie die Producte aus den Abständen der Ordinaten von den beyden Scheiteln der Hyperbel.

§. 658.

Wenn man die Senkrechte Cp (Fig. 183.) für die Abscissen-Linie, und C für den Anfangspunct der Abscissen annimmt, und $Cp = x$, $pm = y$, $CA = a$, $CD = b$ setzet; so ist $y^2 = \frac{a^2}{b^2}(x^2 + b^2)$ wieder eine Gleichung für die Hyperbel.

Denn es ist $Cp^2 = Pm^2 = \frac{b^2}{a^2}(CP^2 - a^2) = \frac{b^2}{a^2}(pm^2 - a^2)$ $= \frac{b^2}{a^2}(y^2 - a^2) = x^2$; folglich ist $y^2 = \frac{a^2}{b^2}(x^2 + b^2)$.

Nimmt man hingegen CP für die Abscissen-Linie, und den Scheitel A der Hyperbel für den Anfangspunct der Abscissen an, und setzet $AP = x$, $PM = y$; so ist $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$ auch eine Gleichung für die Hyperbel. Denn es ist $PM^2 = \frac{b^2}{a_2}(CP^2 - a^2) = \frac{b^2}{a^2}[(x+a)^2 - a^2] = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$.

Fig. 183.

§. 659.

Eine dritte Proportional-Linie zur ersten und zweyten Achse heißt der Parameter der ersten Achse. Eine dritte Proportional-Linie zur zweyten und ersten Achse aber heißt der Parameter der zweyten Achse; nähmlich es ist der Parameter der ersten Achse $p = \frac{2b^2}{a}$, und der Parameter der zweyten Achse $P = \frac{2a^2}{b}$.

Der Parameter der ersten Achse ist gleich einer Geraden, die durch den Brennpunct auf die verlängerte erste Achse senkrecht gezogen ist, und sich an beyden Enden in der Hyperbel endet. Denn man setze nur (in der im §. 654. gefundenen Gleichung) $x = c$; so ist $y = \frac{c^2 - a^2}{a} = \frac{b^2}{a}$.

Nähmlich die Ordinate durch den Brennpunct gezogen ist $= \frac{b^2}{a}$, und folglich ist das Doppelte dieser Ordinate $= \frac{2b^2}{a} = p$.

§. 660.

Wenn man aus dieser Gleichung $\frac{2b^2}{a} = p$ den Werth $b^2 = \frac{1}{2}ap$ in die Gleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 + 2ax)$ substituiret; so ist $y^2 = px + \frac{px^2}{2a}$ wieder eine Gleichung für die Hyperbel.

Die vier bisher entwickelten Hauptgleichungen für die senkrechten Ordinaten der Hyperbel in Hinsicht auf ihre Achsen, sind wohl zu merken, weil sie öfters vorkommen. Nähmlich

I. $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ wenn man die Abscissen auf der ersten Achse $2a$ von dem Mittelpuncte zählet.

II. $y^2 = \frac{a^2}{b^2}(x^2 + b^2)$, wenn man die Abscissen auf der zweyten Achse $2b$ aus dem Mittelpuncte zählet. Fig. 183.

III. $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 + 2ax)$, wenn man die Abscissen auf der ersten Achse $2a$ von einem Scheitel zählet. Oder $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - 2ax)$ für negative Abscissen.

IV. $y^2 = px + \frac{px^2}{2a}$, wenn man die Abscissen auf der ersten Achse $2a$ von dem einen Scheitel zählet, worin $p = \frac{2b^2}{a}$ den Parameter der ersten Achse vorstellet.

§. 661.

Die zweyte Achse der Hyperbel kann kleiner oder auch größer seyn als die erste. Aus dieser Ursache nennet man AB die erste und nicht die große Achse, und DE die zweyte und nicht die kleine Achse. Auch können die zwey Achsen der Hyperpel unter einander, und folglich auch dem Parameter gleich seyn. Eine solche Hyperbel, bey der $a = b = \frac{1}{2}p$ ist, wird gleichseitig (aequilatera) genannt. Die Gleichungen für die gleichseitige Hyperbel sind demnach folgende; 1) $y^2 = x^2 - a^2$; 2) $y^2 = x^2 + a^2$; 3) $y^2 = x^2 + 2ax$ für positive Abscissen, und $y^2 = x^2 - 2ax$ für negative Abscissen.

§. 662.

Wenn man an einen Punct M der Hyperbel aus den beyden Brennpuncten die Geraden fM und FM (die Leitstrahlen) zieht, und den Winkel FMf durch eine Gerade TM halbiret; so wird diese Gerade die Hyperbel in dem Puncte M berühren.

Denn ein jeder anderer Punct N′ der Geraden TM liegt außer der Hyperbel, welches man auf folgende Art darthun kann. Man schneide MQ = MF ab, ziehe N′F, N′f

Fig. 183. und $N'Q$, so ist $N'Q + Qf > N'f$, oder $N'F + Qf > N'f$; folglich $Qf > N'f - N'F$, oder $N'f - N'F < AB$, weil $Qf = AB$ ist. Der Punct N' liegt demnach außer der Hyperbel, weil sonst $N'f - N'F = AB$ seyn müßte.

Zieht man die Gerade FQ, so steht sie senkrecht auf TM und läuft folglich mit der Normale MN parallel. Daher verhält sich $fQ : fM = fF : fN$; nähmlich $2a : a + \frac{cx}{a} = 2c : fN$;

also ist $fN = c + \frac{c^2 x}{a^2}$, und $PN = fN - fC - CP = c + \frac{c^2 x}{a^2} - c - x = \frac{c^2 - a^2}{a^2} \cdot x = \frac{b^2 x}{a^2}$, nähmlich bey der Hyperbel ist für die Abscisse x auf der ersten Achse von dem Mittelpuncte gezählet die Subnormale $= \frac{b^2 x}{a^2}$. Folglich ist bey der gleichseitigen Hyperbel die Subnormale der Abscisse von dem Mittelpuncte gezählet gleich.

Da ferner $PN : PM = PM : PT$ statt findet, so ist die Subtangente $PT = \frac{x^2 - a^2}{x} = x - \frac{a^2}{x}$. Der Unterschied zwischen CP und PT ist demnach $CT = \frac{a^2}{x}$; dieser Unterschied wird immer kleiner, je größer CP angenommen wird. Da nun $CT = \frac{a^2}{x}$ ist; so muß $AT = a - \frac{a^2}{x}$ seyn. Setzet man $x = \infty$, so wird $AT = a$. Auch AR läßt sich bestimmen. Denn es ist $PT\left(\frac{x^2 - a^2}{x}\right) : PM\left(\frac{b}{a}\sqrt{(x^2 - a^2)}\right) = AT\left(\frac{a}{x}(x - a)\right) : AR$;

folglich ist $AR = \frac{b\sqrt{(x^2 - a^2)}}{x + a} = b\sqrt{\left(\frac{x - a}{x + a}\right)}$. Setzet man nun $x = \infty$; so wird $AR = b$. Dieses gibt uns zu erkennen, daß zwey gerade Linien aus dem Mittelpuncte der ersten Achse durch die Endpuncte der zweyten Achse an den

Schei-

Scheitel der Hyperbel gezogen nie den Schenkeln der Hy- Fig.
perbel begegnen.

§. 663.

Diese geraden Linien CG und CH (Fig. 184) durch 184.
den Mittelpunct der ersten Achse und dnrch die Endpuncte der zweyten Achse an den Scheitel der Hyperbel gezogen heißen ihre Asymptoten, weil sich die Hyperbel diesen geraden Linien ohne Ende nähert, ohne dieselben jemahls zu durchschneiden. Um sich davon zu überzeugen, ziehe man die Ordinate PM $=y$, und setze CP $=x$; so ist CB^2 (a^2 : D'B^2 (b^2 $=$ CP^2 (x^2 : PN^2, nähmlich es ist PN$^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$, und

PM$^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) = \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2$; folglich ist auch PN^2 — PM$^2 = b^2$, das ist, die Differenz der Quadrate von PN und PM ist in einem jeden Puncte der Hyperbel bey allen vier Schenkeln dem Quadrate der zweyten Halbachse gleich uud folglich durchschneidet die Hyperbel niemahls die Geraden CG und CH. Da nun PN^2 — PM$^2 = b^2$, oder (PN + PM) (PN — PM) $= b^2 =$ (PN + PM) . MN ist; so ist MN $= \frac{b^2}{\text{PN} + \text{PM}}$. Dieses MN wird demnach immer kleiner je größer PN + PM angenommen wird, weil der Zähler b^2 unveränderlich ist, PN + PM aber ohne Ende fort wächst; folglich nimmt MN ohne Ende ab, nähmlich die Hyperbel nähert sich den Geraden CG und CH ohne Ende.

Setzet man CP unendlich groß, so ist auch PN + PM $= \infty$, und folglich MN $= \frac{b^2}{\infty}$, nähmlich in einer unendlichen Entfernung wird der Unterschied der Ordinaten PN und PM unendlich klein, das ist kleiner als jede angebliche endliche Größe. In diesem Verstande könnte man sagen, daß die Schenkel der Hyperbel in einer unendlichen Entfernung, ihren Asymptoten begegnen. Aber daß die Hyperbel ihre Asymptoten in einer unendlichen Entfernung durchschneide,

läßt

Fig. läßt sich nicht behaupten, weil auch in einer unendlichen Ent-
184. fernung $PN^2 - PM^2 = b^2$ ist.

Da wir $MN = \frac{b^2}{PM + PN}$ gefunden haben, und weil PN $= PN'$ ist; so ist auch $MN = \frac{b^2}{PM + PN'} = \frac{b^2}{MN'}$; und folglich $MN . MN' = b^2$.

§. 664.

Wenn man aus dem Scheitel B die Gerade BR zu der Asymptote CG parallel zieht; so sind BRD', E'CD' ähnliche und gleichschenkelige Dreyecke. Folglich ist $D'R = RB = RC = \frac{1}{2}CD'$. Aus den beyden Halbachsen läßt sich demnach BR bestimmen. Denn es ist $D'C^2 = CB^2 + D'B^2$, oder $(2CR)^2 = a^2 + b^2 = 4CR^2 = 4BR^2$; folglich ist $BR^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$. Dieses $BR^2 = CR^2$ wird die Potenz der Hyperbel genannt.

§. 665.

Es sey $BR = q$, die Abscisse $CQ = x$, die zur Asymptote CG parallele Ordinate $QM = y$, und MK parallel zu CH;
so ist MN : QM (y = D'B (b : BR (q,
und MN' : MK (x = D'B (b : BR (q,
folglich ist $MN . MN' : xy = b^2 : q^2$,

Es ist aber vermöge des Vorhergehenden $MN . MN' = b^2$;

folglich ist auch $xy = q^2$, und $y = \frac{q^2}{x}$ eine Gleichung für die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten.

Setzen wir in dieser Gleichung $x = \infty$, so ist $y = \frac{q^2}{\infty}$

unendlich klein. Setzen wir hingegen $x = 0$, so ist $y = \frac{q^2}{0}$

das heißt die Ordinate verwandelt sich in die Asymptote, wenn man die Abscisse $= 0$ setzet.

Setzet man x negativ, so wird y negativ, und zwar Fig. in gleichen Abständen von C sind die negativen Ordinaten für die negativen Abscissen eben so groß, als die positiven Ordinaten für die positiven Abscissen.

Da $xy = q^2$, und für eine andere Abscisse ebenfalls $XY = q^2$, so ist auch $xy = XY$, und folglich $y : Y = X : x$. Nähmlich die Ordinaten der Hyperbel an der Asymptote verhalten sich gegen einander umgekehrt wie ihre Abscissen.

§. 666.

Wenn man durch was immer für einen Punct E der Hyperbel (Fig. 185.) nach was immer für einer 185. Richtung eine Gerade AB zieht; so sind die Abschnitte dieser Geraden zwischen der Hyperbel und zwischen ihren Asymptoten jederzeit einander gleich, nähmlich es ist AE = DB.

Um diese Wahrheit einzusehen, ziehe man durch E und D auf die Achse die Senkrechten GH und QR;
so ist AE : GE = AD : QD, und EB : EH = BD : DR,
also auch AE.EB : GE.EH = AD.BD : QD.DR.
Es ist aber GE.EH = b^2 = QD.DR; folglich ist auch AE.EB = AD.BD, oder AE.(ED + BD) = (AE + ED).BD, nähmlich es ist AE = BD, wenn man diese Gleichung gehörig reduciret.

§. 667.

Aus diesem ist leicht zu ersehen, daß eine Tangente Tt der Hyperbel zwischen den Asymptoten in dem Berührungspuncte M in zwey gleiche Theile TM = Mt getheilet ist.

Zieht man nun die Ordinate MP zu der Asymptote CH parallel, so ist auch PT = PC, weil das Dreyeck TMP ∽ TtC ist. Nähmlich bey der Hyperbel an der Asymptote ist die Subtangente der Abscisse gleich. Es ist demnach sehr leicht an einen gegebenen Punct der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten eine Tangente zu ziehen.

An-

Fig. 185. Anmerkung. Da allenthalben AE = BD, DR = pQ ist u. s. w.; so ist es auch sehr leicht zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels ACH eine Hyperbel zu beschreiben, die durch einen gegebenen Punct D geht. Denn man ziehe nur durch den gegebenen Punct D mehrere Geraden AB, QR zwischen den Asymptoten, manche AE = BD, Qp = DR, u. s. w. Sodann ziehe man abermahl durch die schon gefundenen Puncte E, p, mehrere Geraden GH nach verschiedenen Richtungen, und schneide hH = GE ab; so ist h wieder ein Punct dieser Hyperbel. Auf diese Art kann man so viele Puncte dieser krummen Linie bestimmen, als es nur beliebig ist.

§. 668.

Eine Gerade MM', die durch den Mittelpunct der ersten Achse, oder durch die Spitze des Asymptoten-Winkels geht, und sich beyderseits an der Hyperbel endet, heißt ein Durchmesser der Hyperbel. Die Puncte M, M' aber werden die Scheitel des Durchmessers genannt. Die Tangente Tt zwischen den Asymptoten an dem Scheitel M heißt der vereinigte Durchmesser von MM'.

Wenn wir CM = m, Mt = n, die Abscisse CF = x, und die zum vereinigten Durchmesser parallele Ordinate FD = y setzen, und über dieses ac, RQ senkrecht auf die verlängerte erste Achse ziehen; so ist CM (m : MT (n = CF (x : FA, nähmlich

$$FA = \frac{nx}{m} = FB.$$

Ferner ist BD : RD = Mt : Ma, und DA : DQ = MT : Mc; also ist auch BD.DA : RD. DQ = Mt.MT : Ma.Mc.
Es ist aber RD.DQ = b^2 = Mc.Ma; folglich ist auch BD.DA = Mt.MT = n^2, oder (FB — FD) . (FD + FA) = n^2

nähmlich $(\frac{nx}{m} - y)(y + \frac{nx}{m}) = n^2$. Daraus findet man

endlich $y^2 = \frac{n^2}{m^2}(x^2 - m^2)$ eine Gleichung für die Ordinaten eines Durchmessers der Hyperbel.

Es ist aus dieser gefundenen Gleichung zu ersehen, daß die Hyperbel in Hinsicht auf ihre vereinigten Durchmesser eben dieselben Eigenschaften hat, wie in Hinsicht auf ihre Achsen. Fig.

Anmerkung. Wie man bey einer verzeichneten Hyperbel-Linie die Lage und Größe der ersten Achse, die Brennpuncte, die Lage der Asymptoten u. s. w. durch Verzeichnung finden könne; ist nun aus diesen abgeleiteten Sätzen sehr leicht einzusehen, und wird dem eigenen Fleiße der Anfänger überlassen.

§. 669.

Wenn man CA = AB = a, AP = x, PM = y, und den Asymptoten-Winkel = HCG = m fetzet (Fig. 186.); so ist CP = $a + x$, und die Senkrechte Mn = y.sin$m$ für den Halbmesser 1. Nun ist CP . MP = CA², nähmlich $(a+x).y = a^2$; folglich ist auch $y = \frac{a^2}{a+x}$ eine Gleichung für die Hyperbel an der Asymptote, wenn man A für den Anfangspunct der Abscissen annimmt. Man findet aus dieser Gleichung $y = a - x + \frac{x^2}{a} - \frac{x^3}{a^2} + \frac{x^4}{a^3} - \ldots$ und eine Senkrechte $Mn = \sin m\,(a - x + \frac{x^2}{a} - \frac{x^3}{a^2} + \frac{x^4}{a^3} - \ldots\ldots)$ 186.

Stellet man sich nun vor, daß die Abscisse AP in eine unendliche Anzahl gleicher Theile getheilet sey, und daß aus allen Theilungspuncten zu CH parallele Ordinaten gezogen werden; so wird dadurch der Flächenraum ABMP in seine Elemente aufgelöset. Die Summe aller Elemente von A bis P läßt sich bestimmen; denn es ist das Parallelogramm pm MP das allgemeine Glied in dieser unendlichen Reihe der Elemente, wenn pm unendlich nahe bey PM liegt. Es ist aber pmMP = pP, Mn = $\sin m\,.\,(a.\frac{x}{\infty} - x.\frac{x}{\infty} + \frac{x^2}{a}.\frac{x}{\infty} - \frac{x^3}{a^2}.\frac{x}{\infty} + \ldots\ldots)$; folglich ist die Summe aller dieser Elemente, nähmlich

Fig. 186 $ABMP = \sin m.(ax - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3a} - \frac{x^4}{4a^2} + ..) = a^2.\sin m(.\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + ...) = a^2 . \sin m . \text{lognat}(1 + \frac{x}{a}) = a^2 . \sin m . \text{lognat}(\frac{a+x}{a}) = AB^2 . \sin m . \text{lognat}\frac{CP}{AB}$.

Setzet man nun den Asymptoten-Winkel $HCG = 90°$; so ist die Hyperbel gleichseitig, und $\sin m = 1$. Es ist demnach bey der gleichseitigen Hyperbel der Flächenraum $ABMP = AB^2 . \text{log nat}\frac{CP}{AB}$; folglich $\frac{ABMP}{AB^2} = \text{log nat}\frac{CP}{AB}$, oder $ABMP = \text{lognat } CP$, wenn man $AB = 1$ setzet. Bey der gleichseitigen Hyperbel an der Asymptote sind demnach die Flächenräume von AB gerechnet, natürliche Logarithmen der Abscissen von dem Mittelpuncte gezählet, wenn man die unveränderliche Linie $AB = 1$ setzet. Aus dieser Ursache werden die natürlichen Logarithmen zuweilen hyperbolische genannt. Jedoch ist diese Benennung nicht allerdings schicklich, weil jede andere Gattung der Logarithmen ebenfalls durch hyperbolische Räume an der Asymptote vorgestellet werden können, wenn man den Sinus des Asymptoten-Winkels dem Modul der Logarithmen gleich setzet. Z. B. die gemeinen oder Briggischen Logarithmen können durch die Flächenräume einer Hyperbel an der Asymptote vorgestellet werden, deren Asymptoten-Winkel $= 25°\ 44'\ 25\frac{1}{2}''$ und die unveränderliche Gerade $AB = 1$ ist, weil der Modul der gemeinen Logarithmen $= 0{,}43429448$ ist, und zu diesem Sinus ein Winkel von $25°\ 44'\ 25\frac{1}{2}''$ gehöret. Wenn nähmlich $AB = 1$, $m = HCG = 25°\ 44'\ 25\frac{1}{2}''$ angenommen wird, so ist $ABMP = 0{,}43429448$ lognat CP $=$ logvulg CP.

Da $ABMP = AB^2 . \sin m . \text{lognat}\frac{CP}{AB}$, und auch $ABNG = AB^2 . \sin m . \text{lognat}\frac{CG}{AB}$ ist; so ist $PMNG =$

AB^2

$AB^2 . \sin m . \log nat \frac{CG}{AB} - AB^2 . \sin m . \log . nat \frac{CP}{AB}$, nähmlich Fig. 186.

lich $PMNG = AB^2 . \sin m . \log nat \frac{CG}{CP}$. Es sey z. B. $AB = 2$ Schuhen, $m = 30°$, $CG = 60$, und $CP = 12$ Schuhen, so ist $PMNG = 4 . \frac{1}{2} . \log nat\, 5 = \log nat\, 25 = 3{,}2188758$ Quadratschuhen.

Allgemeine Gleichung für die Kegelschnitts-Linien.

§. 670.

Aufgabe. Es sey MBM′ (Fig. 187.) ein senkrechter Kegel, dieser werde durch eine ebene Fläche ANN′ geschnitten; man soll eine Gleichung für die krumme Linie finden, welche auf der Oberfläche des Kegels durch diesen Schnitt entstehet. 187.

Auflösung. Es sey die Ebene CBD durch die Spitze des Kegels auf die Ebene ANN′ senkrecht gelegt. Durch einen beliebigen Punct P der gemeinschaftlichen Durchschnitts-Linie AQ sey auch eine Ebene CMD senkrecht auf die Achse des Kegels und folglich auch senkrecht auf die Ebene CBD geführet; so ist diese Ebene CMD ein Kreis, weil BCND ein gerader oder senkrechter Kegel ist; und die gemeinschaftliche Durchschnitts-Linie PM steht senkrecht auf AQ und auf CD (§. 471.). Ueber dieses sey auch in der Ebene CBD die Gerade AF parallel zu DC, und PG parallel zu CB geführet. Nun setze man $AP = x$, $PM = y$, $AB = c$, den Winkel $CBD = n$, und $QAD = m$; so ist $\sin BFA : AB = \sin B : AF$. Es ist aber $RFA = FAB$, nähmlich $BFA = \frac{1}{2}(180° - B) = 90° - \frac{1}{2}n$, und $\sin BFA = \sin(90° - \frac{1}{2}n) = \cos\frac{1}{2}n$; folglich ist auch $\cos\frac{1}{2}n : c = \sin n : AF$,

und $AF = \frac{c . \sin n .}{\cos\frac{1}{2}n .}$.

Ferner ist $\sin AGP : AP = \sin APG : AG$, Es ist aber $\sin AGP = \sin PGF = \sin BFA = \cos\frac{1}{2}n$, $AP = x$, und

sin

Fig. 187. $\sin APG = \sin (QAD - PgA) = \sin (m - n)$; folglich ist $\cos\frac{1}{2}n : x = \sin(m-n) : AG$, nähmlich $AG = \frac{x.\sin(m-n)}{\cos\frac{1}{2}n}$.

Nun ist $AF - AG = FG = CP$. Folglich ist auch $CP = \frac{c.\sin n - x.\sin(m-n)}{\cos\frac{1}{2}n}$.

In dem Dreyecke APD ist $\sin ADP : AP = \sin PAD : DP$. Es ist aber $\sin ADP = \cos\frac{1}{2}n$, $AP = x$, und $\sin PAD = \sin m$; folglich ist $\cos\frac{1}{2}n : x = \sin m : DP$. Nähmlich es ist $DP = \frac{x.\sin m}{\cos\frac{1}{2}n}$.

Endlich ist vermöge der Eigenschaft des Kreises $PM^2 = CP.DP$; folglich ist auch nach gehöriger Substitution und Reduction $y^2 = \frac{\sin m}{\cos^2\frac{1}{2}n}.[cx.\sin n - x^2.\sin(m-n)]$ die gesuchte Gleichung, weil PM zu dem Kreise und zu der krummen Linie N'AN eine gemeinschaftliche Ordinate ist.

Diese gefundene Gleichung läßt sich auch also einrichten $y^2 = \frac{c.\sin m.\sin n}{\cos^2\frac{1}{2}n}.x - \frac{c.\sin m.\sin n}{\cos^2\frac{1}{2}n}.\frac{\sin(m-n)}{c.\sin n}.x^2$, oder wenn wir $\frac{c.\sin m.\sin n}{\cos^2\frac{1}{2}n} = p$, und $\frac{c.\sin n}{\sin(m-n)} = a$ setzen, so ist $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$.

Setzen wir nun in der vorigen Gleichung $m = n$; so ist $\sin(m-n) = 0$, und die letztere Gleichung verwandelt sich in $y^2 = px$. Folglich ist für diesen Fall die krumme Linie N'AN eine Parabel, AQ ihre Achse, A ihr Scheitel, und $p = \frac{c.\sin m.\sin n}{\cos^2\frac{1}{2}n} = \frac{c.\sin^2 n}{\cos^2\frac{1}{2}n} = 4c.\sin^2\frac{1}{2}n$ ihr Haupt-Parameter (parameter principalis). Denn für den Halbmesser $= 1$ ist (nach §. 543. I.) $\sin 2a = 2\sin a.\cos a$; folglich ist auch $\sin n = 2\sin\frac{1}{2}n.\cos\frac{1}{2}n$, und $\sin^2 n = 4\sin^2\frac{1}{2}n.\cos^2\frac{1}{2}n$. Da nun $m = n$ ist; so läuft AP mit

der

der Seite BC des Kegels parallel. Wenn demnach ein senkrechter Kegel durch eine Ebene geschnitten wird, welche mit der Seite des Kegels parallel läuft; so ist die Oberfläche des Schnittes eine Parabel. Fig. 187.

Setzen wir hingegen in der gefundenen Gleichung, $m > n$, so ist sin $(m—n)$ eine positive Größe, und in der Gleichung $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ bleibet das zweyte Glied negativ. Folglich ist in diesem Falle N'AN eine Ellipse, a die große Achse derselben, A ein Scheitel und p der Parameter dieser Achse. Wenn also ein senkrechter Kegel von einer Ebene schief und dabey gänzlich durchschnitten wird; so ist die Oberfläche des Schnittes eine Ellipse.

Setzen wir endlich $m < n$, so ist sin $(m—n)$ eine negative Größe (§. 542. III.), und folglich in der gefundenen Gleichung das zweyte Glied positiv, nähmlich $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$; in diesem Falle ist demnach die krumme Linie N'AN eine Hyperbel, $a = \frac{c \cdot \sin n}{\sin (n — m)}$ ihre erste Achse, A ein Scheitel, und p der Parameter dieser Achse. Ist also der Schnitt auf einen senkrechten Kegel so geführet; daß derselbe auch den verlängerten Kegel schneiden müßte; so ist die Oberfläche des Schnittes eine Hyperbel.

Wenn wir endlich in der gefundenen Gleichung, $m = 90° + \frac{1}{2}n$ setzen; so ist nach gehöriger Reduction $y^2 = 2cx \cdot \sin \frac{1}{2}n — x^2$ eine Gleichung für den Kreis. Ein Kreis entstehet nähmlich auf der Oberfläche eines senkrechten Kegels, wenn er durch eine auf die Achse desselben senkrechte Ebene geschnitten wird.

Setzen wir hingegen $c = 0$, und dabey $m < n$; so ist $y^2 = \frac{x^2 \sin m \cdot \sin (n — m)}{\cos^2 \frac{1}{2}n}$ eine Gleichung für die Ordinaten eines geradlinigen Dreyeckes.

Fig. Anmerkung. I. Auf eben dieselbe Art kann man eine Gleichung für die krumme Oberfläche eines durchschnittenen senkrechten Cylinders ableiten. Da ferner ein schiefer Kegel nichts anders als ein senkrechter elliptischer schief abgeschnittener Kegel, und ein schiefer Cylinder nichts anders als ein senkrechter elliptischer oben und unten schief abgeschnittener Cylinder ist; so kann man auch bey diesen Körpern Gleichungen für diejenigen krummen Linien leicht ableiten, welche durch die nach verschiedenen Richtungen auf diese Körper geführten Schnitte entstehen. Diese Gleichungen sowohl, als auch die Ableitungen derselben werden dem Fleiße der Anfänger überlassen.

II. Ich halte es für überflüßig von der Anwendung der Kegelschnitts-Linien auf die Auflösung der höheren Gleichungen mittelst der geometrischen Verzeichnung ein Wort zu sagen, weil dergleichen Aufgaben, die auf höhere Gleichungen führen, z. B. die berüchtigte Aufgabe von der Verdoppelung des Würfels, die Dreytheilung des Winkels u. s. w. genauer und leichter durch die Rechnung aufgelöset werden, wenn man nähmlich die in der vorgegebenen Aufgabe bekannten Linien auf einem genau ausgetheilten Maßstabe ausmißt, und sodann die gesuchten Linien in Zahlen entwickelt.

Wer eine ausführliche Abhandlung über die Eigenschaften der Kegelschnitts-Linien und über ihre Anwendung auf die Dioptrik, Catoptrik, Acustik, u. s. w. zu lesen verlanget, der findet sie unter anderen in Herrn de la Chapelle Abhandlung von den Kegelschnitten, aus dem Französischen übersetzt von Böckmann, Karlsruhe, 1771.

III. Abschnitt.

Fig.

Von einigen krummen Linien.

§. 671.

Es ist oben (im §. 625.) gesagt worden, daß alle diejenigen krummen Linien zu einer und derselben Familie gehören, deren Gleichungen auf einerley Art ausgedruckt sind, das heißt welche gänzlich einerley Glieder haben, worin nur die Exponenten verschieden seyn dürfen. Daher kann man eine jede Familie ins besondere durch einen allgemeinen Ausdruck vorstellen. So z. B. ist $y^{m+n} = p^m x^n$ eine Gleichung für die Familie der Parabeln. Setzet man darin $m = 1$, und $n = 1$; so ist $y^2 = px$ die Gleichung für die gemeine Parabel. Setzet man aber $m = 1$ und $n = 2$; so erhält man $y^3 = px^2$ oder $y = \sqrt[3]{px^2}$ eine Gleichung für die erste cubische Parabel, bey der sowohl für positive als auch für negative Abscissen bloß positive Ordinaten entsprechen. Setzet man aber $m = 2$ und $n = 1$; so ist $y^3 = p^2 x$, oder $y = \sqrt[3]{p^2 x}$ eine Gleichung für die zweyte cubische Parabel, in welcher den positiven Abscissen positive, und den negativen Abscissen negative Ordinaten entsprechen.

Eben so ist $y = \pm \sqrt[2m]{(a^{2m} - x^{2m})}$ die Gleichung für die Familie der Kreise, in welcher m eine positive Zahl bedeutet. Auf eben dieselbe Art kann man sehr leicht eine Gleichung für die Familie der Ellipsen, der Hyperbeln u. s. w. ansetzen.

Die krummen Linien der Alten wurden meistens nur gebraucht um einige Aufgaben zu verzeichnen. Jetzt sind sie von keinem erheblichen Nutzen mehr. Aus dieser Ursache wollen wir nur drey derselben, nähmlich die Logistik, die Cycloide und die Spiral-Linien ganz kurz abhandeln.

Von

Fig. 188.

Von der Logistik.

§. 672.

Eine krumme Linie M'DM (Fig. 188.) deren Ordinaten in gleichen Abständen in einer geometrischen Reihe auf einander folgen, heißt eine logarithmische Linie oder die Logistik. Wenn nähmlich AC = C2 = 23 = 34 u. s. w. angenommen wird, und man errichtet in diesen Puncten senkrechte Ordinaten, welche die Eigenschaft haben, daß sie in folgenden Proportionen fortlaufen,

AB:CD=CD:22'; CD:22'=22':33'; 22':33'=33':44', u. s. w. so heißt die ununterbrochene krumme Linie, welche durch die Endpuncte dieser Ordinaten geht, die Logistik.

Um für die Logistik eine Gleichung zu finden, nehme man einen willkührlichen Punct A der Geraden P'P für den Anfangspunct der Abscissen, setze die gegebene Ordinate dieses Punctes $AB = c$, die Abscisse $AP = x$ und die Ordinate $PM = y$. Eine andere gegebene Ordinate CD, die größer ist als AB, sey $= b$, der gegebene Abstand dieser Ordinate von A sey $AC = a$. Ferner sey $AP : AC = n : 1$;

so ist $AP = n \cdot AC$, nähmlich $x = na$, und $n = \frac{x}{a}$.

Wenn man nun $C2 = AC = 23$ u. s. w. setzet; so ist $A2 = 2a$, $A3 = 3a$, u. s. w. und die Ordinaten für die Puncte A, C, 2, 3, 4, ... sind $c, b, \frac{cb^2}{c^2}, \frac{cb^3}{c^3}, \frac{cb^4}{c^4}$ ..... nähmlich Stellen der Gl. 0, 1, 2, 3, 4, ... n $\frac{x}{a}$

Ordinaten $c, b, \frac{cb^2}{c^2}, \frac{cb^3}{c^3}, \frac{cb^4}{c^4}, \ldots \frac{cb^n}{c^n} = \frac{cb^{\frac{x}{a}}}{c^{\frac{x}{a}}}$

Abscissen 0, a, $2a$, $3a$, $4a$, ... $na = x$

das ist für die Abscisse $na = x = AP$ gehört die Ordinate

$$\frac{cb^n}{c^n} = \frac{cb^{\frac{x}{a}}}{c^{\frac{x}{a}}} = c\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{x}{a}} = PM = y.$$ Es ist demnach

$y =$

$y = c(\frac{b}{c})^{\frac{x}{a}}$ die gesuchte Gleichung für die Logistik; man findet aus dieser Gleichung $x = \frac{a.\log\frac{y}{c}}{\log\frac{b}{c}}$. Fig. 188.

Wir wollen um die gefundene Gleichung einfacher auszudrucken a von der Beschaffenheit annehmen, daß $\frac{b}{c} = 2{,}718281828\ldots = h =$ der Grundzahl der natürlichen Logarithmen, und folglich log nat $\frac{b}{c}$ = log nat $h = 1$ sey.

Nach dieser Voraussetzung ist nun $y = ch^{\frac{x}{a}}$ und $x = a.$ log nat $\frac{y}{c}$.

Diese gefundene Gleichung $y = ch^{\frac{x}{a}}$ gibt sowohl für positive als auch für negative Abscissen immer positive Ordinaten, die von A gegen P ohne Ende wachsen und von A gegen P′ ohne Ende abnehmen. Die Abscissen-Linie PP′ ist demnach eine Asymptote der Logistik.

Setzen wir in der gefundenen Gleichung $c = 1$; so ist $x = a.$ log nat y. Bey der Logistik sind demnach die Abscissen Logarithmen von den Ordinaten. Da ferner a log nat y jeden Logarithmus von y vorstellen kann, wenn man a für das Maß oder den Modul der Logarithmen annimmt; so folgt, daß man jedes logarithmische System durch die Logistik vorstellen kann.

Wenn man tQ für die Abscissen-Linie annimmt, und AQ $= x$, QM $= y$, AB $= c$ setzet; so ist AQ $=$ PM $= x$ und QM $=$ AP $= y$. Es ist aber AP $= a.$ log nat $\frac{\text{PM}}{\text{AB}}$; folglich auch $y = a.$ log nat $\frac{x}{c}$ wieder eine Gleichung für die Logistik, woraus man $x = ch^{\frac{y}{a}}$ findet.

Fig. 188. Nimmt man hingegen auf der Abscissen-Linie tQ den Durchschnittspunct B für den Anfangspunct der Abscissen, und setzet $BQ = x$, und $QM = y$; so ist $y = a \log nat (1 + \frac{x}{c})$, und $x = c (h^{\frac{y}{a}} - 1)$.

Die Gleichung der Logistik $y = ch^{\frac{x}{a}}$ auf der Abscisse P'P läßt sich auch also vorstellen

$$y = c + \frac{cx}{a} + \frac{cx^2}{1.2.a^2} + \frac{cx^3}{1.2.3.a^3} + \ldots\ldots \text{(verm. §. 294.)}.$$

Mittelst dieser Gleichung kann man den Flächenraum ABMP bey einer jeden Logistik durch die gegebenen Ordinaten $AB = c$, $PM = y$, und durch ihren Abstand $AP = x$ auf folgende Art bestimmen. Das allgemeine Glied in der Reihe der Elemente des gesuchten Flächenraumes ABMP ist das unendlich kleine Rechteck

$$pM = y \cdot \frac{x}{\infty} = c \cdot \frac{x}{\infty} + \frac{cx}{a} \cdot \frac{x}{\infty} + \frac{cx^2}{1.2.a^2} \cdot \frac{x}{\infty} + \ldots\ldots;$$

folglich ist die Summe aller Elemente, nähmlich

$$ABMP = cx + \frac{cx^2}{1.2.a} + \frac{cx^3}{1.2.3.a^2} + \frac{cx^4}{1.2.3.4.a^3} + \ldots$$

$$= ac[(1 + \frac{x}{a} + \frac{x}{1.2.a^2} + \frac{x^3}{1.2.3.a^3} + \ldots) - 1]$$

$$= ac (h^{\frac{x}{a}} - 1) = ach^{\frac{x}{a}} - ac = ay - ac = a(y - c)$$

oder $ABMP = \frac{x(y-c)}{\log nat y - \log nat c}$, wenn man aus der Fundamental-Gleichung $y = ch^{\frac{x}{a}}$ den Werth a suchet, und denselben gehörig substituiret. Es ist demnach der Flächenraum was immer für einer Logistik zwischen jeden zwey senkrechten Ordinaten auf der Asymptote gleich der Differenz der Ordinaten multiplicirt mit ihrem

Ab-

Abstande, getheilet durch die Differenz der natürlichen Fig. Logarithmen von diesen zwey Ordinaten.

Von der Cyloide.

§. 673.

Wenn ein Kreis NM (Fig. 189.) auf einer geraden Linie sich rollend oder wälzend fortbeweget; so beschreibet ein jeder Punct M des Umkreises eine krumme Linie MAE, welche eine Cycloide oder Rad-Linie genannt wird. Wenn wir die Cycloide DAE in Erwägung ziehen, welche der anfängliche Berührungspunct D während einer Umdrehung beschreibet; so heißt der Kreis AB der Erzeugungskreis, die Gerade DE die Grund-Linie, der Durchmesser BA des Erzeugungskreises, welcher die Grund-Linie senkrecht halbiret, die Achse, und A der Scheitel der Cycloide. 189.

Aus dieser Entstehungsart der Cycloide folgt 1) daß die Grund-Linie DE dem ganzen, und DB dem halben Umfange des Erzeugungskreises gleich ist. 2) Daß auch jede Gerade QM aus was immer für einem Puncte Q des halben Umkreises AQB auf der Achse AB, zu der Grund-Linie BD parallel an die Cycloide geführet dem Bogen AQ des Erzeugungskreises gleich ist. Denn wenn wir die Sehnen NM und BQ ziehen, so ist wegen der Gleichheit der Dreyecke BPQ und NRM die Sehne BQ gleich und parallel zu NM, und folglich auch $BN = QM$ (386.). Nun ist $DN =$ dem Bogen $MN = QB$, und $DB = AQB$; folglich ist $DB - DN = AQB - QB$, nähmlich $NB = AQ$, und endlich $QM = AQ$.

Setzen wir die Abscisse auf dem Umfange des Erzeugungskreises $AQ = u$, und die Ordinate $QM = z$; so ist $z = u$ eine Gleichung für die Cycloide.

Setzen wir hingegen $AP = x$, $PM = y$, und den Halbmesser des Erzeugungskreises $AC = a$, so ist

Fig.
189. $PQ = V(2ax - x^2)$, und $AQ = a \cdot \text{arc.sin vers} \frac{x}{a} =$

$a \cdot \text{arc sin} V(\frac{2ax - x^2}{a^2}) = a \cdot \text{arc cos}(\frac{a - x}{a})$ für den Halbmesser der Tafeln $= 1$. Nun ist $AQ = QM = PM - PQ$; folglich auch $a \cdot \text{arc cos}(\frac{a - x}{a}) = y - V(2ax - x^2)$,

und endlich $y = V(2ax - x^2) + a \cdot \text{arc cos}(\frac{a - x}{a})$,

$= V(2ax - x^2) + a \cdot \text{arc sin vers.} \frac{x}{a}$

$= V(2ax - x^2) + a \cdot \text{arc.sin} V(\frac{2ax - x^2}{a^2})$

wieder eine Gleichung für die Cycloide.

Es ist leicht einzusehen, daß $AQ = a \cdot \text{arc cos}(\frac{a - x}{a})$ ist, wenn man den Halbmesser oder sintot in den Tafeln $= 1$ setzet. Denn es sey für den Tabular-Halbmesser 1 eines Bogens, der mit AQ einerley Anzahl der Grade enthält, wirkliche Länge $= t$; so ist $AC : \cos \text{arc } AQ = 1 : \cos \text{arc } t$ (vermöge §. 546.) oder $AC : PC = 1 : \cos \text{arc } t$, nähmlich $a : a - x = 1 : \cos \text{arc } t$; folglich ist auch $\cos \text{arc } t = \frac{a - x}{a}$, oder $t = \text{arc cos}(\frac{a - x}{a})$.

Ferner ist $1 : t = AC : AQ$, nähmlich $1 : \text{arc cos}(\frac{a - x}{a}) = a : AQ$; folglich ist $AQ = a \cdot \text{arc cos}(\frac{a - x}{a})$. Eben so kann man die Ausdrücke für den Bogen durch andere trigonometrische Functionen ableiten.

Um diesen Ausdruck mittelst der trigonometrischen Tafeln, bey denen der Halbmesser $= 1$ zum Grunde liegt, in Zah-

Zahlen zu entwickeln, muß man $\frac{a-x}{a}$ in einen Decimal- Fig. 189.
Bruch verwandeln, und zu demselben in der Spalte Cosinus die entsprechenden Grade Minuten und Secunden aufsuchen, und endlich mittelst der Tafel der Kreisbogen für den Halbmesser = 1 die Länge des Bogens von der gefundenen Anzahl der Grade bestimmen.

Es sey z. B. $AC = a = 50$, $AP' = x = 80$; so ist $\frac{a-x}{a} = -\frac{30}{50} = -0{,}6000000$. Nun gehört für den Halbmesser 1 zu dem Cosinus 0,6000000 der Bogen $53^\circ\ 7'\ 48''$, und folglich zu dem Cosinus — 0,6000000 der Bogen $180^\circ - 53^\circ\ 7'\ 48'' = 126^\circ\ 52'\ 12''$. Ferner ist für eben diesen Halbmesser 1 die Länge eines Bogens von $126^\circ\ 52'\ 12''$, nähmlich arc $126^\circ\ 52'\ 12'' = 2{,}214299$ $= \text{arc cos}\left(\frac{a-x}{a}\right)$. Folglich ist a . arc cos $\left(\frac{a-x}{a}\right)$ $= 110{,}71495$;

Denn es ist arc $120^\circ = 2{,}094395$
$6^\circ = 0{,}104720$
$52' = 0{,}015126$
$12'' = 0{,}000058$

arc cos $\left(\frac{a-x}{a}\right) = 2{,}214299$

multipliciret mit $a = 50$

gibt a . arc cos $\left(\frac{a-x}{a}\right) = 110{,}71495 = AQ' = Q'M'$.

Da nun auch $V(2ax - x^2) = V(100 . 80 - 80^2)$ $= 40 = P'Q'$ ist, so ist $V(2ax - x^2) + a\,\text{arc cos}\left(\frac{a-x}{a}\right)$ $= 150{,}71495 = P'M'$. Eben so kann für jede andere Abscisse die entsprechende Ordinate gefunden werden.

Fig. 189. Der Bogen, welcher zu dem Cosinus $-\frac{30}{50}$ gehöret, kann auch mittelst der Logarithmen auf folgende Art gefunden werden;

von log 30 = 1,4771213
subtr. log 50 = 1,6989700
add. log sintot = 10 von 180° 0′ 0″

9,7781513 = log cos 53°7′48″ subtr.

folglich ist der gesuchte Bogen = 126°52′12″ wegen des Zeichens $-\frac{30}{50}$.

Anmerkung. Bey den bisher abgehandelten krummen Linien sind die Gleichungen derselben für parallele Ordinaten abgeleitet worden. Dieses ist nicht unumgänglich nothwendig. Es können auch die Ordinaten gegen einander geneigt seyn, nur müssen sie in einem Puncte zusammen stossen. In diesem Falle beschreibet man aus dem gemeinschaftlichen Vereinigungspuncte aller Ordinaten, welcher der Pol oder auch der Mittelpunct der krummen Linie heißt, mit einem beliebigen Halbmesser, welcher gemeiniglich = 1 ist, einen Kreis, und zählet die Abscissen von einem festgesetzten Puncte angefangen auf dem Umfange desselben. Oder, welches einerley ist, man nimmt den Winkel, welchen die Ordinate eines jeden Punctes mit einer festgesetzten und unveränderlichen Ordinate einschließt, für den Abscissen Winkel an, und bestimmet daraus die zugehörige Gleichung. Wie man dabey vorgehen müsse, ist aus den folgenden krummen Linien zu ersehen.

Von den Spiral-Linien.

§. 674.

190. Man gedenke, daß eine gerade Linie CD (Fig. 190.) in einer und derselben Ebene sich um den Punct C gleichförmig

förmig herumdrehe, und daß während dieses beständigen Herumdrehens der Punct C auf der Geraden CD ebenfalls gleichförmig fortrücke; so wird dieser Punct C eine schraubenartige krumme Linie beschreiben, welche die archimedische Spiral-Linie, von dem berühmten Meßkünstler Archimedes von Syrakus genannt wird, der zuerst ihre Eigenschaften untersuchte. Nachdem die Gerade CD sich einmahl herumgedrehet hat; sey der Punct C bis A vorgerücket. Wenn wir nun mit CA aus C einen Umkreis ziehen, so will das gleichförmige Herumdrehen der Geraden CD und das gleichförmige Fortrücken des Punctes C so viel sagen, daß sich die Abstände des fortgerückten Punctes von dem Mittelpuncte, nähmlich daß sich die Ordinaten der Spiral-Linie eben so gegen einander verhalten, wie die Kreisbogen des Halbmessers CA von A bis an die Ordinaten der Spiral-Linie gezählet. Nähmlich daß CM : Cm : CA : CM' : u. s. w.
= AP : APQ : APQA : APQA + AP : u. s. w. sey. Fig. 190.

Man nehme A für den Anfangspunct der Abscissen, setze $AC = c$, $AP = u$, $CM = y$, und den Umkreis $APQA = p$; so ist $CM : CA = AP : APQA$, nähmlich $y : c = u : p$. Folglich ist $y = \frac{cu}{p}$ eine Gleichung für die archimedische Spiral-Linie.

Für $u = 0$ ist auch $y = 0$, für $u = \frac{1}{3}p$ ist $y = \frac{1}{3}c$, für $u = p$ ist $y = c$, für $u = \frac{4}{3}p$ ist $y = \frac{4}{3}c$, für $u = 2p$ ist $y = 2c$, für $u = np$ ist $y = nc$. Die archimedische Spiral-Linie geht demnach aus dem Mittelpuncte C heraus, und entfernt sich von demselben ohne Ende in ununterbrochenen Schraubengängen.

Für negative Abscissen (von A gegen Q gezählet) sind auch die Ordinaten negativ, welche demnach aus dem Mittelpuncte auf die Halbmesser nach entgegen gesetzten Richtungen aufgetragen werden, nähmlich für $u = -\frac{1}{3}p = -AQ$

ist

Fig. 190. ist $y = -\frac{1}{3}c = Cm'$, und wird auf dem verlängerten Halbmesser QC von C bis m' aufgetragen.

Wenn wir in der gefundenen Gleichung $y = \frac{cu}{p}$, statt p seinen Werth $2c\pi$ substituiren; so ist auch $y = \frac{u}{2\pi}$ eine Gleichung für die archimedische Spiral-Linie.

Nehmen wir ferner den Winkel $ACP = \phi$ für den Abscissen-Winkel an; so ist $360 : \phi = 2c\pi : u$, nähmlich $u = \frac{2c\pi \cdot \phi}{360}$. Daher ist $y = \frac{c\phi}{360}$ ebenfalls eine Gleichung für die archimedische Spiral-Linie durch die Anzahl der Grade des Winkels ausgedrucket, welchen die veränderliche Ordinate CM mit der Ordinate AC des festgesetzten Punctes A einschließt.

Aus dieser Gleichung folgt, daß die unter gleichen Winkeln geneigten Ordinaten in einer arithmetischen Reihe des ersten Ranges fortschreiten.

Stellen wir uns hingegen eine Spiral-Linie von der Beschaffenheit vor, daß die unter gleichen Winkeln geneigten Ordinaten in einer geometrischen Reihe fortschreiten; so heißt dieselbe eine logarithmische Spiral-Linie (logistica Spiralis).

191. Man setze (Fig. 191.) die Ordinate $AC = c$, den Abscissen-Winkel $ACM = \phi$, die Ordinate $CM = y$, und die Ordinate $CD = b$, welche dem Abscissen-Winkel $= 360°$ entspricht; so sind

für die Abscissen-Winkel $0, \phi, 2\phi, 3\phi \ldots\ldots n\phi$,

die zugehörigen Ordinaten $c, y, \frac{y^2}{c}, \frac{y^3}{c^2} \ldots\ldots \frac{y^n}{c^{n-1}}$.

Setzen wir nun $n\phi = 360°$; so ist $n = \frac{360}{\phi}$.

In diesem Falle ist aber auch $\frac{y^n}{c^{n-1}} = c(\frac{y}{c})^{\frac{360}{\phi}} = b$. Fig. 191.

Daraus folgt $y = c(\frac{b}{c})^{\frac{\phi}{360}}$.

Nehmen wir aber den mit dem Halbmesser AC $= c$ beschriebenen Kreis für die Abscissen-Linie an, und setzen AP $= u$; so ist $\phi = \frac{360u}{2c\pi}$ nähmlich $y = c(\frac{b}{c})^{\frac{u}{2c\pi}}$

und $u = \frac{2c\pi(\log y - \log c)}{\log b - \log c}$.

Die gefundene Gleichung für die logarithmische Spiral-Linie gibt uns zu erkennen, daß die Ordinaten für die positiven Abscissen ohne Ende wachsen, die Ordinaten für die negativen Abscissen aber ohne Ende abnehmen und dabey positiv sind. Die logarithmische Spiral-Linie nähert sich demnach auf einer Seite ohne Ende in ununterbrochenen Schraubengängen ihrem Mittelpuncte ohne denselben jemahls zu erreichen, auf der entgegengesetzten Seite aber entfernt sie sich ebenfalls in ununterbrochenen Schraubengängen ohne Ende von demselben.

Anmerkung. I. Eben so wie bey den Spiral-Linien lassen sich auch bey anderen krummen Linien Gleichungen für die Ordinaten aus einem Puncte finden, wenn die Gleichungen derselben für parallele Ordinaten bekannt sind. Nehmen wir z. B. (Fig. 176.) in der Parabel den Brennpunct derselben für den Vereinigungspunct, und die Leitstrahlen für die Ordinaten an; setzen wir dabey den Abstand des Brennpunctes von dem Scheitel, nähmlich BF $= c$, den veränderlichen Abscissen-Winkel BFA $= \phi$ und AF $= y$; so ist FG $= -y \cdot \cos\phi$ und AF $= y =$ BG $+$ BF $=$ $2c - y \cdot \cos\phi$. Daraus folgt $y = \frac{2c}{1+\cos\phi}$. 176.

Auf eben dieselbe Art kann man eine Gleichung für die Leitstrahlen in der Ellipse finden, ausgedruckt durch den

Fig. 178. Abscissen-Winkel, welchen der Leitstrahl mit der Achse gegen den anliegenden Scheitel zu einschließt. Denn es sey (Fig. 178.) die kleine Halbachse $CD = b$, die große Halbachse $AC = a$, die Excentricität $CF = \sqrt{(a^2 - b^2)} = c$, der Abscissen-Winkel $MFA = \phi$ und $MF = y$; so ist $PM = y \cdot \sin\phi$, $PF = -y \cdot \cos\phi$, $CP = -(c + y \cdot \cos\phi)$.

Es ist aber auch $MP^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - CP^2)$; folglich ist

$$y^2 \cdot \sin^2\phi = \frac{b^2}{a^2}[a^2 - (c + y\cos\phi)^2], \text{ und}$$

$$a^2y^2\sin^2\phi = b^4 - 2b^2cy\cos\phi - a^2y^2\cos^2\phi + c^2y^2\cos^2\phi$$

oder $a^2y^2 = b^4 - 2b^2cy\cos\phi + c^2y^2\cos^2\phi$

und $ay = b^2 - cy\cos\phi$

nähmlich $y = \frac{b^2}{a + c\cos\phi}$.

II. Es ist überflüßig von den Eigenschaften der angeführten transcendenten Linien am gegenwärtigen Orte ausführlicher zu handeln. Einige andere krumme Linien der Alten, als die Muschel-Linie des Nicomedes (chonchois Nicomedis), die Cyssois des Diocles, die Vierungs-Linie des Dinostrates (quadratrix Dinostratis), verschiedene krummen Linien der neuen Meßkünstler, als die Sinus-Linie, die hyperbolische Spiral-Linie, die Epycycloiden, und auch die Linien von einer doppelten Krümmung (curvae dupplicis curvaturae) können gänzlich mit Stillschweigen übergangen werden, da sie keine wesentliche Anwendung darbiethen.

Fig.

Siebentes Hauptstück.

Von der Differenzial-Rechnung.

I. Abschnitt.

Anfangsgründe der Differenzial-Rechnung.

§. 675.

Jede geometrische Größe, als z. B. jedes beliebige Stück der Abscisse bey was immer für einer krummen Linie, läßt sich in so viele gleiche Theile theilen, daß jeder Theil davon kleiner wird, als jede angebliche noch so kleine Größe von eben derselben Gattung. Es sey z. B. ein Stück einer Abscissen-Linie $= x$, und eine noch so kleine angegebene Linie sey $= e$; so ist offenbar eine Zahl m von der Beschaffenheit möglich, daß $m \times e > x$, und folglich $\frac{x}{m} < e$ wird. Wenn man demnach x in m gleiche Theile theilet, so wird sodann ein jeder solcher Theil kleiner als die angegebene Größe e seyn. Wenn man sich nun in Gedanken vorstellet, daß eine Größe x in so viele gleiche Theile getheilet werde, daß ein jeder Theil davon kleiner sey als jede angebliche Größe von eben derselben Gattung; so wird ein solcher Theil von x eine unendlich kleine Größe in Hinsicht auf x genannt. Die Zahl aber, welche mit ihren Einheiten anzeiget, in wie viele gleiche Theile die Größe x nach der angeführten Voraussetzung eingetheilet ist, heißt eine unendlich große Zahl, welche demnach größer ist als jede noch so große angebliche Zahl. Es ist aus diesem leicht zu ersehen, daß eine unendlich kleine Größe in Hinsicht auf

eine

Fig. eine Endliche verschwindet, oder daß zwey gleichartige Größen, deren Unterschied kleiner ist, als jede noch so kleine angebliche Größe, im erforderlichen Falle einander gleich gesetzet werden können, nähmlich $x \pm \frac{x}{\infty} = x$, $ay \pm \frac{ny^2}{\infty} = ay$, wenn ∞ eine unendlich große, und n eine endliche Zahl bedeutet.

Nachdem vermöge unserer Vorstellung eine Größe bereits in so viele gleiche Theile getheilet worden ist, daß jeder Theil davon unendlich klein sey, so hört deswegen doch nicht auf ein solcher unendlich kleiner Theil noch ferner theilbar zu seyn; denn jede geometrische stätige Größe (quantitas continua), nähmlich jede Linie, jede Fläche, jeder Körper ist ja ohne Ende theilbar. Stellen wir uns nun vor, daß eine unendlich kleine Größe wieder in unendlich viele gleiche Theile getheilet sey; so wird ein jeder von diesen letzteren Theilen eine unendlich kleine Größe von der zweyten Ordnung genannt; die vorigen unendlich kleinen Theile aber heißen unendlich kleine Größen von der ersten Ordnung. Eine unendlich kleine Größe von der zweyten Ordnung ist demnach in einer unendlich kleinen von der ersten Ordnung unendlichmahl enthalten. Gleichwie nun eine unendlich kleine Größe von der ersten Ordnung in Hinsicht auf eine Endliche verschwindet; eben so verschwindet auch eine unendlich kleine Größe von der zweyten Ordnung in Hinsicht auf eine unendlich kleine von der ersten Ordnung. Um so mehr verschwindet eine unendlich kleine Größe von der zweyten Ordnung in Hinsicht auf eine Endliche.

Anmerkung. Es könnte jemand einwenden, die oben angeführte Vorstellung eine Größe sey in so viele gleiche Theile getheilet, daß jeder Theil davon kleiner ist, als jede angebliche noch so kleine Größe, sey ungereimt, weil man diese Theilung in der Wirklichkeit nicht ausführen kann. Allein diese Einwendung ist ohne Bedeutung, denn sonst müßte man auch die Vorstellung einer geometrischen Linie,

nie, einer geometrischen Fläche, eines geometrischen Kör- Fig.
pers u. s. w. ungereimt nennen, weil es dergleichen Grö-
ßen in der Wirklichkeit nicht gibt. Man stellet sich öfters
vor, daß durch drey Puncte, die Meilen weit von einander
entfernt sind, ein Kreis gezogen sey. Obschon man einen
solchen Kreis in der Wirklichkeit nicht verzeichnen kann; so
ist doch deßwegen die Vorstellung davon nicht ungereimt. Da
nun die oben angeführte Vorstellnng von der Eintheilung einer
Größe in unendlich viele gleiche Theile nichts ungereimtes
enthält; so bilde man sich ein, daß ein endlicher Halbkreis
BDA (Fig. 193.) in unendlich viele gleiche Theile gethei- 193.
let sey, und daß ein solcher unendlich kleiner Theil dieses
Halbkreises der Bogen aB sey. Bey dieser Voraussetzung
ist auch der Sinus ab dieses Bogens eine unendlich kleine
Größe, der Quer-Sinus Bb aber ist eine unendlich kleine
Größe von der zweyten Ordnung, und endlich die Differenz ce
zwischen der Tangente Be und zwischen dem Sinus ab des
unendlich kleinen Bogens aB ist eine unendlich kleine Größe
von der dritten Ordnung. Denn es ist Bb: ba = ba: bA
und ce: ca = ba: bC. Nun aber ist ba sowohl in bA als
auch in bC unendlichmahl enthalten; folglich ist auch Bb in ba,
und ce in ca oder in Bb unendlichmahl enthalten. Es ist
aber ba eine unendlich kleine Größe von der ersten Ordnung;
folglich ist Bb in einer unendlich kleinen Größe von der er-
sten Ordnung unendlichmahl enthalten, nähmlich Bb ist eine
unendlich kleine Größe von der zweyten Ordnung. Eben so
ist ce eine unendlich kleine Größe von der dritten Ordnung,
weil ce in ca nähmlich in einer unendlich kleinen Größe
von der zweyten Ordnung unendlichmahl enthalten ist. Es ist
aus diesem Beyspiele zu ersehen, daß sich die unendlich klei-
nen Größen von den höheren Ordnungen gar leicht von sich
sebst ergeben, sobald man einmahl die unendlich kleinen von
der ersten Ordnung zum Grunde leget. Auch die unendlich
Großen von höheren Ordnungen fließen daraus sehr natür-
lich. Denn wenn man einmahl festsetzet, daß der Bogen
aB, und folglich auch sein Sinus ab unendlich klein sey; so
ist diejenige Zahl unendlich groß von der ersten Ordnung,

Fig. 193. welche anzeiget, wie oft ba in Ab oder auch in AB enthalten ist. Hingegen ist diejenige Zahl unendlich groß von der zweyten Ordnung; welche anzeiget, wie oft Bb in AB enthalten ist. Diejenige Zahl aber ist unendlich groß von der dritten Ordnung, welche anzeiget, wie oft cc in AB enthalten ist. Eben so leicht ist es einzusehen, daß eine mathematische unendlich große oder kleine Größe 2, 3, *n*mahl größer oder kleiner seyn kann als eine andere von eben derselben Ordnung; mit einem Worte, daß unendlich große oder auch unendlich kleine Größen von einer und derselben Ordnung eben so gut alle möglichen Verhältnisse unter einander vorstellen können als wie endliche Größen. Diejenige Zahl z. B. ist unendlich groß, welche anzeiget, wie oft ab in BC enthalten wird; und dabey ist diese unendliche große Zahl nur die Hälfte von derjenigen, welche anzeiget, wie oft ab in AB enthalten ist. Hingegen ist der unendlich kleine Quotient $\frac{ab}{BC}$ zweymahl so groß als $\frac{ab}{AB}$. Auch wider den Satz: zwey gleichartige Größen, deren Unterschied kleiner angenommen wird, als was immer für eine noch so kleine angebliche Größe von eben derselben Gattung, können im erforderlichen Falle einander gleich gesetzet werden, ist nichts vernünftiges oder gründliches einzuwenden. Denn nichts als ein angeblicher Unterschied kann bey solchen Größen die Gleichheit hindern; aber dergleichen Größen haben keinen angeblichen Unterschied; folglich kann ihrer Gleichheit im erforderlichen Falle kein Hinderniß im Wege stehen. Wenn man diejenigen Vorurtheile ableget, die man sich durch eine unrecht verstandene Methaphysik zugezogen hat; so wird man an diesem Satze eben dieselbe Evidenz bemerken, die den gewöhnlichen Grundsätzen der Größenlehre eigen ist. Weil man nun mit dem Worte unendlich in der Größenlehre sonst keinen anderen Begriff zu verbinden pfleget; so kann man allerdings einen Theil von einer Größe mit den Worten unendlich klein benennen, der kleiner gedacht wird, als jede angebliche Größe; oder der so klein gedacht wird; daß er in Hinsicht auf die ganze Größe für o angesehen

hen werden kann, wenn er dazu zu addiren, oder davon abzuzie- Fig.
hen ist. Aus eben demselben Grunde kann man diejenige Zahl mit den Worten unendlich groß benennen, welche anzeiget, wie oft ein dergleichen Theil in der ganzen Größe enthalten ist. Wollte aber jemand in der Größenlehre die Worte unendlich klein, unendlich groß gar nicht dulden; so könnte er allenthalben ungemein klein, ungemein groß, oder was er selber will, dafür setzen.

§. 676.

Wenn eine einfache veränderliche Größe x oder y um einen unendlich kleinen Theil vermehret oder vermindert wird, so heißt dieser unendlich kleine Theil das Differenziale von x oder y. Man pflegt einen solchen unendlich kleinen Theil von x durch dx zu bezeichnen, allwo d nicht einen Factor von x bedeutet, sondern nur als ein Zeichen dienet um einen unendlich kleinen Theil von x anzuzeigen. Es ist nähmlich dx nichts anderes als $\frac{x}{\infty}$, wenn x eine einfache veränderliche Größe z. B. ein Stück einer Abscissen-Linie, und ∞ eine unendlich große Zahl bedeutet. Die Engländer pflegen das Differenziale einer veränderlichen Größe x durch einen auf die veränderliche Größe gesetzten Punct anzuzeigen, nähmlich $\dot{x} = x$, und nennen es Fluxion.

§. 677.

Das Differenziale aber was immer für einer Function von einer oder von mehreren veränderlichen Größen ist nichts anderes als der Unterschied, um welchen die Function sich verändert, wenn man jede veränderliche Größe in derselben um einen unendlich kleinen Theil vermehret oder vermindert, nähmlich wenn man jede veränderliche Größe x oder y um ihr Differenziale dx oder dy in der Function vermehret oder vermindert. Die Wissenschaft endlich das Differenziale von was immer für einer vorgegebenen Function zu finden heißt die Differenzial-Rechnung. Daß diese Wissenschaft vollkom-

men

Fig. men ist, nähmlich daß man das Differenziale was immer für einer Function von einer oder von mehreren veränderlichen Grösßen richtig finden kann, wird in der Folge zu ersehen seyn.

Das Differenziale einer Function wird angezeiget, wenn man die Function in Klammern einschließt, und das Zeichen d vorsetzet; z. B. $d\left(\frac{cx^2}{a^2}+b\right)$, $d[\sqrt{(a^2-x^2)}]$, oder $d[(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}]$ zeiget an, daß man $\frac{cx^2}{a^2}+b$, und $(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$ differenziren, nähmlich daß man finden soll, um was sich diese Functionen verändern, wenn man in denselben nur allein die veränderliche Grösße x um ihr Differenziale dx vermehret oder vermindert. Die Bezeichnung $d(x^2)$ ist von $(dx^2)^2$ wohl zu unterscheiden. Die erste zeiget an, daß man x^2 differenziren solle, die zweyte bedeutet das Quadrat von dx, welches gemeiniglich nur durch dx^2 vorgestellet wird, Eben so wird die $m$te Potenz von dx durch dx^m bezeichnet; das Differenziale von x^m aber wird durch $d(x)^m$ angezeiget. Weiter unten werden auch die Bezeichnungen $ddx = d(dx) = d^2x$, $dddx = d(ddx) = d^3x$, d^mx, u. s. w. vorkommen.

§. 678.

Aus der gegebenen Erklärung des Differenzials von was immer für einer Function fließt folgende allgemeine Grundregel, nach der sich jede vorgegebene Function differenziren läßt.

Man vermehre in der gegebenen Function jede veränderliche Grösße $x, y, z....$ um ihr Differenziale $dx, dy, dz....$ und ziehe sodann von dieser veränderten Function die gegebene ab; so ist der Ueberrest nach vorgenommener Reduction das gesuchte Differenziale.

Oder auch: man vermindere in der Function jede veränderliche Grösße um ihr Differenziale, und subtrahire diese veränderte Function von der gegebenen; so ist der Ueberrest das gesuchte Differenziale.

Nach dieser Regel findet man $d(2a^2x - \frac{3}{4}b^2y + 5ac^2)$ Fig.
$= 2a^2dx - \frac{3}{4}b^2dy$, wenn a, b, c, unveränderliche Größen sind, *) auf folgende Art. Es ist $d(2a^2x - \frac{3}{4}b^2y + 5ac^2)$
$= 2a^2(x+dx) - \frac{3}{4}b^2(y+dy) + 5ac^2 - (2a^2x - \frac{3}{4}b^2y + 5ac^2)$,
vermöge der Erklärung; nähmlich $d(2a^2x - \frac{3}{4}b^2y + 5ac^2)$
$= 2a^2x + 2a^2dx - \frac{3}{4}b^2y - \frac{3}{4}b^2dy + 5ac^2 - 2a^2x + \frac{3}{4}b^2y$
$- 5ac^2$, wenn man die veränderte Function wirklich entwickelt, und bey der abzuziehenden die Zeichen verkehret.
Endlich ist $d(2a^2x - \frac{3}{4}b^2y + 5ac^2) = 2a^2dx - \frac{3}{4}b^2dy$, wenn man gehörig reduciret.

Oder auch $d(2a^2x - \frac{3}{4}b^2y + 5ac^2) = 2a^2x - \frac{3}{4}b^2y + 5ac^2 - [2a^2(x - dx) - \frac{3}{4}b^2(y - dy) + 5ac^2] = 2a^2x - \frac{3}{4}b^2y + 5ac^2 - [2a^2x - 2a^2dx - \frac{3}{4}b^2y + \frac{3}{4}b^2dy + 5ac^2] = 2a^2x - \frac{3}{4}b^2y + 5ac^2 - 2a^2x + 2a^2dx + \frac{3}{4}b^2y - \frac{3}{4}b^2dy - 5ac^2 = 2a^2dx - \frac{3}{4}b^2dy$.

Es ist aus diesem zu ersehen.

I. Daß man das Differenziale einer aus mehreren Gliedern bestehenden Function findet, bey der in jedem Gliede nicht mehr als eine einzige veränderliche Größe in der ersten Potenz mit anderen unveränderlichen Größen verbunden vorkommt, wenn man jeder veränderlichen Größe das Zeichen d vorsetzet, und übrigens die gehörigen Zeichen der Glieder beybehält.

II. Daß die Glieder, welche bloße unveränderliche Größen enthalten, gar kein Differenziale haben. Es ist nähmlich $d(5ac^2) = 0$, oder allgemein $d(ax + b) = adx$.

Es ist also vermöge dieser Regel

$$d\left(\frac{ax}{b} - \frac{cy}{c} + b\right) = \frac{adx}{b} - \frac{cdy}{c}.$$

§. 679.

Das Differenziale eines Productes, welches aus mehreren veränderlichen Größen besteht, wird gefunden, wenn man das Differenziale jeder veränderlichen Grö-

*) Zur deutlicheren Uebersicht pflegt man allgemein bey den Functionen, so wie es schon einmahl erinnert worden ist, die unveränderlichen Größen mit den Anfangsbuchstaben, die veränderlichen aber mit den Endbuchstaben des Alphabets zu bezeichnen.

Fig. Größe ins besondere mit dem Producte aller der übrigen veränderlichen und unveränderlichen Größen multipliciret, und alle diese besonderen Producte zusammen addiret. Es ist nähmlich

$d(axyz) = ayzdx + axzdy + axydz.$

Denn es ist $d(axyz) = a(x + dx)\ (y + dy)\ (z + dz) - axyz$ (vermöge §. 678), nähmlich $d(axyz) = axyz + ayzdx + axzdy + axydz + azdxdy + aydxdz + axdydz + adxdydz - axyz$, das ist, $d(axyz) = ayzdx + axzdy + axydz + azdxdy + aydxdz + axdydz + adxdydz$. Es verschwindet aber $adxdydz$ in Hinsicht auf ein jedes der drey nächst vorhergehenden Glieder, und auch diese drey Glieder selbst verschwinden in Hinsicht auf ein jedes der drey ersten. Folglich ist nach vorgenommener Reduction $d(axyz) = ayzdx + axzdy + axydz$.

Es ist leicht einzusehen, daß $adxdydz$ in Hinsicht auf ein jedes der drey vorhergehenden Glieder z. B. in Hinsicht auf $aydxdz$ verschwindet. Denn es ist $aydxdz : adxdydz = y : dy$; folglich auch $aydxdz : aydxdz \pm adxdydz = y : y \pm dy$. Es ist aber $y \pm dy = y$, weil dy eine unendlich kleine Größe ist; folglich ist auch $aydxdz \pm adxdydz = aydxdz$, nähmlich $adxdydz$ verschwindet in Hinsicht auf $aydxdz$. Eben so verschwindet $aydxdz$ in Hinsicht auf $ayzdx$ oder $axydz$. Denn es ist $axydz : aydxdz = x : dx$, und $axydz : axydz \pm aydxdz = x : x \pm dx$. Es ist aber $x \pm dx = x$; folglich ist auch $axydz \pm aydxdz = axydz$.

Daß in diesem Falle die vier letzten Glieder in Hinsicht auf die drey ersten hinweg gelassen werden können erhellet auch daher, weil die ersten drey Glieder unendlich kleine Größen der ersten Ordnung, die übrigen aber unendlich kleine Größen von höheren Ordnungen sind. Es ist nähmlich $axydz$ nichts anders als $axy \cdot \frac{z}{\infty}$; hingegen ist

$aydxdz = ay \cdot \frac{xz}{\infty^2}$, und $adxdydz = a \cdot \frac{xyz}{\infty^3}$.

Nach

Nach dieser Regel ist demnach $d(\frac{axy}{b} - \frac{bxz}{c} + c^2)$ Fig.

$$= \frac{aydx}{b} + \frac{axdy}{b} - \frac{bzdx}{c} - \frac{bxdz}{c}.$$

§. 680.

Das Differenziale eines veränderlichen Bruches wird gefunden, wenn man von dem Producte aus dem Differenziale des Zählers in den Nenner das Product aus dem Differenziale des Nenners in den Zähler subtrahiret und dieses Resultat durch das Quadrat des Nenners dividiret; nähmlich $d(\frac{ax}{y}) = \frac{aydx - axdy}{y^2}$.

Denn (vermöge §. 678.) ist $d(\frac{ax}{y}) = \frac{a(x+dx)}{(y+dy)} - \frac{ax}{y}$

$$= \frac{ax + adx}{y + dy} - \frac{ax}{y} = \frac{axy + aydx - axy - axdy}{y^2 + ydy}$$

$$= \frac{aydx - axdy}{y^2 + ydy} = \frac{aydx - axdy}{y^2}, \text{ weil in dem Nenner}$$

ydy in Hinsicht auf y^2 verschwindet *).

Nun ist nach dieser Regel

I. $$d(\frac{a^2 + bx}{a - x}) = \frac{(a-x).d(a^2+bx) - (a^2+bx).d(a-x)}{(a-x)^2}$$

$$= \frac{abdx - bxdx + a^2dx + bxdx}{(a-x)^2} = \frac{(a^2 + ab)dx}{(a-x)^2}$$

$$= (a^2 + ab)\,dx(a-x)^{-2}.$$

II.

*) Da es voraus bekannt ist, daß das Resultat $d(\frac{ax}{y})$ bloß durch unendlich kleine Größen ausgedruckt erscheinen muß; so würde es sehr voreilig seyn, beym vorhergehenden Ausdrucke $\frac{ax + adx}{y + dy} - \frac{ax}{y}$ in dem Zähler adx in Hinsicht auf ax, und im Nenner dy in Hinsicht auf y, oder gar in dem letzten Ausdrucke auch $aydx$ und $axdy$ hinweg zu lassen. Die es kann nur dann geschehen, wenn nach verrichteter Reduction die endlichen Größen als Glieder übrig bleiben; das heißt, wenn den Bedingungen der Aufgabe zu Folge ein endliches Resultat erscheinen muß, wie z. B. bey dem Nenner $y^2 + ydy$ des gegenwärtigen schon entwickelten Ausdruckes.

Fig. II. $d(\frac{a^2b}{xy}) = \frac{-a^2bydx - a^2bxdy}{x^2y^2} = -a^2bx^{-2}y^{-1}dx$

$-a^2bx^{-1}y^{-2}dy$, weil der Zähler unveränderlich ist, und folglich kein Differenziale hat.

III. $d(\frac{ax}{a-x} - \frac{a^2}{a+x}) = \frac{(a^2+x^2)2a^2dx}{(a^2-x^2)^2} = 2a^4dx(a^2-x^2)^{-2}$
$+2a^2x^2dx(a^2-x^2)^{-2}$.

§. 681.

Das Differenziale der Potenz von einem unveränderlichen Exponenten einer veränderlichen Größe wird gefunden, wenn man die um 1 verminderte Potenz dieser Größe, mit dem Exponenten, mit dem Coefficienten, und mit dem Differenziale der Größe multipliciret, welche auf die gegebene Potenz zu erheben ist. Es ist nähmlich $d(ax^m) = max^{m-1}dx$, es möge m eine ganze oder gebrochene, positive oder negative, rationale oder irrationale, unveränderliche Größe seyn, den einzigen Fall $m = 0$ ausgenommen, weil in diesem Falle $ax^m = ax^0 = a$ nähmlich unveränderlich ist, und folglich kein Differenziale hat.

Denn (vermöge §. 678.) ist $d(ax^m) = a(x+dx)^m - ax^m$
Es ist aber (vermöge 299.) $a(x+dx)^m = ax^m + max^{m-1}dx$
$+\frac{m.(m-1)}{1.2}ax^{m-2}dx^2 + \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}ax^{m-3}dx^3 + ;$

folglich ist auch $d(ax^m) = max^{m-1}dx + \frac{m.(m-1)}{1.2}ax^{m-2}dx^2 +$

$\frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}ax^{m-3}dx^3 +$ ..... und endlich
$d(ax^m) = max^{m-1}dx$, weil alle darauf folgenden Glieder in Hinsicht auf dieses Glied als unendlich kleine Größen von höheren Ordnungen verschwinden.

Es ist demnach nach dieser Regel

I. $d(ax) = d(ax^1) = 1.ax^{1-1}dx = ax^0dx = adx$.

II. $d(ax^2) = 2axdx$; $d(ax^3) = 3ax^2dx$.

III. $d(ax^{-2}y^3) = -2ax^{-3}y^3\,dx + 3ax^{-2}y^2\,dy$. Fig.

IV. $d(ax^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}ax^{-\frac{1}{2}}\,dx$; $d(ax^{-\frac{3}{2}}) = -\frac{3}{2}ax^{-\frac{5}{2}}\,dx$.

Diese Regel erstrecket sich auch auf die Potenzen von mehrnahmigen Größen, weil x jede sowohl einfache als auch zusammen gesetzte Größe bezeichnen kann. Z. B.

V. $d[(ax+x^2)^3] = 3(ax+x^2)^{3-1}.d(ax+x^2) = 3(ax+x^2)^2.(adx+2xdx) = (3a+6x)\,dx(ax+x^2)^2$

Denn man setze nur $ax+x^2 = y$, so ist $(ax+x^2)^2 = y^2$, $(ax+x^2)^3 = y^3$, $dy = adx + 2xdx$, und $d[(ax+x^2)^3] = d(y^3) = 3y^2\,dy = 3(ax+x^2)^2.(adx+2xdx)$.

VI. $d[(ax^2+by^2+\frac{cx^4}{y^2})^n] = d[ax^2+by^2+cx^4y^{-2})^n]$

$= n(ax^2+by^2+cx^4y^{-2})^{n-1} \times (2axdx + 2bydy + 4cx^3y^{-2}dx - 2cx^4y^{-3}dy)$.

Es ist aus diesem Beyspiele zu ersehen, daß sich auch Brüche mit veränderlichen Nennern nach dieser Regel differenziren lassen. Es ist nähmlich

$d(\frac{a^2b}{xy}) = d(a^2bx^{-1}y^{-1}) = -a^2bx^{-2}y^{-1}dx - a^2bx^{-1}y^{-2}dy$.

Ingleichen ist $d(\frac{bx}{a^2-cx}) = d(bx(a^2-cx)^{-1}) =$

$bdx(a^2-cx)^{-1} - bx(a^2-cx)^{-2} \times -cdx = bdx(a^2-cx)^{-1} + bcxdx\,(a^2-cx)^{-2}$.

VII. $d[ax^m(b+cx^n)^p] = max^{m-1}\,dx(b+cx^n)^p + pax^m \times (b+cx^n)^{p-1} \times ncx^{n-1}\,dx = max^{m-1}\,dx\,(b+cx^n)^p + npacx^{m+n-1}\,dx(b+cx^n)^{p-1}$.

Auch Wurzelgrößen lassen sich nach dieser Regel differenziren, weil man jede Wurzelgröße als eine Potenz mit gebrochenen Exponenten vorstellen kann. Es ist nähmlich

$\sqrt[n]{ax^m} = a^{\frac{1}{n}}x^{\frac{m}{n}}$.

VIII. $d(\sqrt[n]{ax^m}) = d(a^{\frac{1}{n}}x^{\frac{m}{n}}) = \frac{m}{n}.a^{\frac{1}{n}}x^{\frac{m}{n}-1}\,dx$.

Fig.

IX. $\mathrm{d}(\sqrt{\frac{a^2x}{a-x}}) = \mathrm{d}(\frac{\sqrt{a^2x}}{\sqrt{(a-x)}}) = \mathrm{d}(\frac{ax^{\frac{1}{2}}}{(a-x)^{\frac{1}{2}}}) =$

$\mathrm{d}[ax^{\frac{1}{2}}(a-x)^{-\frac{1}{2}}] = \frac{1}{2}ax^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x\,(a-x)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}ax^{\frac{1}{2}} \times$

$\mathrm{d}x(a-x)^{-\frac{3}{2}}.$

X. $\mathrm{d}[\sqrt[3]{(2ax^2-x^3)}] = \mathrm{d}[2ax^2-x^3)^{\frac{1}{3}}] = \frac{1}{3}(2ax^2-x^3)^{-\frac{2}{3}} \times$

$(4ax\mathrm{d}x - 3x^2\mathrm{d}x) = \frac{4ax\mathrm{d}x - 3x^2\mathrm{d}x}{3(2ax^2-x^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{(4ax-3x^2)\,\mathrm{d}x}{3\sqrt[3]{(2ax^2-x^3)^2}}$

Die zweyten Potenz-Wurzeln, wenn sie nicht zu sehr zusammengesetzet sind, und vor dem Wurzelzeichen keine veränderliche Größe enthalten, lassen sich sehr geschwinde differenziren, wenn man das Differenziale der Größe unter dem Zeichen durch die doppelte gegebene 2te Potenz-Wurzel dividiret, nähmlich

$$\mathrm{d}(a\sqrt{X}) = \frac{a\,\mathrm{d}X}{2\sqrt{X}},$$

es möge X was immer für eine Function von x bedeuten

Denn es ist $\mathrm{d}(a\sqrt{X}) = \mathrm{d}(aX^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}a\,X^{\frac{1}{2}-1}\,\mathrm{d}X =$

$\frac{1}{2}aX^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}X = \frac{a.\mathrm{d}X}{2X^{\frac{1}{2}}} = \frac{a\,\mathrm{d}X}{2\sqrt{X}}.$

Nach dieser Formel lassen sich nun die Gleichungen für die Kegelschnitts-Linien sehr leicht differenziren, das ist, die Veränderungen der Ordinaten für eine unendlich kleine Vermehrung oder Verminderung der Abscissen bey diesen krummen Linien lassen sich sehr leicht aus ihren Gleichungen bestimmen.

Es ist nähmlich bey dem Kreise $y = \sqrt{(2ax-x^2)}$; folglich ist $\mathrm{d}y = \frac{2a\mathrm{d}x - 2x\mathrm{d}x}{2\sqrt{(2ax-x^2)}} = \frac{(a-x)\mathrm{d}x}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$. Inglei-

chen weil $y = \sqrt{(a^2-x^2)}$ die Gleichung für die positiven Ordinaten ist, wenn die Abscissen vom Mittelpuncte gezählet

let werden; so ist die Differenzial-Gleichung für diesen Fall Fig.

$$dy = -\frac{x\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}.$$

Aus der Gleichung für die Parabel $y = \sqrt{px}$ folgt

$$dy = \frac{p\,dx}{2\sqrt{px}} = \tfrac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dx.$$

Aus den drey Gleichungen für die Ellipse (§. 644.) $y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$, $y = \frac{b}{a}\sqrt{(2ax - x^2)}$, $y = \sqrt{(px - \frac{px^2}{2a})}$, folgen die Differenzial-Gleichungen $dy = -\frac{bx\,dx}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}}$,

$$dy = \frac{(ab - bx)\,dx}{a\sqrt{(2ax - x^2)}}, \quad dy = \frac{(ap - px)\,dx}{2a\sqrt{(px - px^2 : 2a)}}.$$

Eben so kann man die Differenzial-Gleichungen für die Hyperbel aus den Gleichungen dieser krummen Linie finden.

§. 682.

Das Differenziale des natürlichen Logarithmus von was immer für einer veränderlichen Größe ist gleich dem Differenziale der veränderlichen Größe getheilet durch die veränderliche Größe selbst. Nähmlich es ist

$$d(\text{lognat}\,x) = \frac{dx}{x}.$$

Denn (verm. §. 678.) ist $d(\text{lognat}\,x) = \text{lognat}\,(x + dx) - \text{lognat}\,x = \text{lognat}\frac{x + dx}{x} = \text{lognat}\,(1 + \frac{dx}{x})$ (vermöge §. 257.). Es ist aber $\text{lognat}\,(1 + \frac{dx}{x}) = \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + \frac{dx^3}{3x^3} - \frac{dx^4}{dx^4} + \ldots$ (verm. 289.); folglich ist auch $d(\text{lognat}\,x) = \frac{dx}{x} - \frac{4x^2}{2x^2} + \frac{dx^3}{3x^3} - \ldots$ und endlich ist $d(\text{lognat}\,x) = \frac{dx}{x}$,

weil

Fig. weil bey dieser Reihe alle darauf folgenden Glieder in Hinsicht auf das erste Glied als unendlich kleine Größen von höheren Ordnungen verschwinden.

Da nun x jede zusammengesetzte Größe, nähmlich jede Function von einer oder von mehreren veränderlichen Größen vorstellen kann; so ist auch das Differenziale des natürlichen Logarithmus von was immer für einer Function gleich dem Differenziale der Function getheilet durch die Function selbst. Nun lassen sich nach dieser Regel folgende Functionen sehr leicht differenziren.

I. $\mathrm{d}[\mathrm{lognat}\,(a^3 + by^2)] = \frac{2by\mathrm{d}y}{a^3+by^2}$. Um dieses recht deutlich einzusehen, setze man $a^3 + by^2 = x$; so ist $\mathrm{d}x = 2by\mathrm{d}y$. Folglich ist $\mathrm{d}[\mathrm{lognat}\,(a^3+by^2)] = \mathrm{d}(\mathrm{lognat}x) = \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{2by\mathrm{d}y}{a^3+by^2}$, wenn man für x und $\mathrm{d}x$ wieder die gehörigen Werthe setzet.

II. $\mathrm{d}[\mathrm{lognat}\sqrt{\ }(a^2+x^2)]$
$= \frac{\mathrm{d}[\sqrt{(a^2+x^2)}]}{\sqrt{\ }(a^2+x^2)} = \frac{2x\mathrm{d}x}{2\sqrt{(a^2+x^2)}\times\sqrt{(a^2+x^2)}} = \frac{x\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$;
oder $\mathrm{d}[\mathrm{lognat}\sqrt{\ }(a^2+x^2)]$
$= \mathrm{d}[\mathrm{lognat}(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}] = \mathrm{d}[\tfrac{1}{2}.\,\mathrm{lognat}(a^2+x^2)]$
$= \frac{\frac{1}{2}.\,2x\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = x\mathrm{d}x(a^2+x^2)^{-1}$.

III. $\mathrm{d}[\mathrm{lognat}\frac{a-x}{a+x}] = \mathrm{d}\,[L(a-x)-L(a+x)]$
$= \mathrm{d}[\mathrm{lognat}\,(a-x) - \mathrm{d}[\mathrm{lognat}\,(a+x)]$
$= -\frac{\mathrm{d}x}{a-x} - \frac{\mathrm{d}x}{a+x} = -\frac{2a\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = +\frac{2a\mathrm{d}x}{x^2-a^2}$
$= 2a\mathrm{d}x(x^2-a^2)^{-1}$.

IV.

IV. $\mathrm{dlognat}[x+\sqrt{(a^2+x^2)}] = \frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}\sqrt{(a^2+x^2)}}{x+\sqrt{(a^2+x^2)}}$ Fig.

$= \frac{\mathrm{d}x+2x\mathrm{d}x:2\sqrt{(a^2+x^2)}}{x+\sqrt{(a^2+x^2)}}$

$= \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2+x^2)}} = \mathrm{d}x\,(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

V. $\mathrm{d}\,(ax^m.\mathrm{lognat}\,bx^n) = max^{m-1}\,\mathrm{d}x\,.\,\mathrm{lognat}\,bx^n + \frac{nbx^{n-1}\mathrm{d}x}{bx^n}.\,ax^m = max^{m-1}\,\mathrm{d}x.\mathrm{lognat}\,bx^n + nax^{m-1}\mathrm{d}x$.

VI. $\mathrm{d}[ax^m.(\mathrm{lognat}\,bx)^n] = max^{m-1}\,\mathrm{d}x\,.(\mathrm{lognat}\,bx)^n + n.(\mathrm{lognat}bx)^{n-1}.\,\mathrm{d}(\mathrm{lognat}bx).ax^m = max^{m-1}\mathrm{d}x.(\mathrm{lognat}bx)^n + nax^{m-1}\mathrm{d}x\,.\,(\mathrm{lognat}bx)^{n-1}$.

VII. $\mathrm{d}[\frac{1}{2}x\sqrt{(x^2-a^2)} - \frac{1}{2}a^2.\mathrm{lognat}\,(x+\sqrt{(x^2-a^2)})] = \mathrm{d}x\,\sqrt{(x^2-a^2)}$.

Wäre eine logarithmische Function, die sich auf gemeine Logarithmen bezieht, z. B. $a.\log\mathrm{vulg}\,x$ zu differenziren, so muß man dieselbe ohne Veränderung des Werthes auf natürliche Logarithmen reduciren, und sodann das gesuchte Differenziale nach eben dieser Regel bestimmen. Es ist nähmlich $a.\log\mathrm{vulg}\,x = ma.\mathrm{lognat}\,x$, wenn man $0{,}43429448.. = m$ setzet (§. 294.).

Folglich ist $\mathrm{d}\,(a.\mathrm{logvulg}\,x) = \frac{mad x}{x}$.

§. 683.

Aus der Gleichung $\mathrm{d}\,(\mathrm{lognat}\,X) = \frac{d(X)}{X}$, es möge X was immer für eine Function von x bedeuten, folgt auch wenn man beyderseits mit X multipliciret,

$\mathrm{d}(X) = X.\,\mathrm{d}(\mathrm{lognat}\,X)$,

nähmlich das Differenziale von was immer für einer Function ist gleich der Function selbst multipliciret mit dem Differenziale ihres natürlichen Logarithmus.

Fig. 3.B. $d(\frac{x^m}{y^n}) = \frac{x^m}{y^n} . d(\log nat \frac{x^m}{y^n}) = x^m y^{-n} \times$

$d(\log nat x^m - \log nat y^n) = x^m y^{-n} . [d(m \log nat\, x) -$

$d(n \log nat\, y)] = x^m y^{-n} . (\frac{m dx}{x} - \frac{n dy}{y})$

$= m x^{m-1} y^{-n} dx - n x^m y^{-n-1} dy.$

§. 684.

Diese eben entwickelte Regel leistet uns sehr gute Dienste, wenn Exponential-Größen (Größen mit veränderlichen Exponenten) zu differenziren sind. Es ist nähmlich

I. $d(a^{mx}) = a^{mx}\ d(\log nat\, a^{mx}) = a^{mx} . d\ (mx . \log nat\, a)$
$= m a^{mx} dx\ \log nat a.$

Dieses Differenziale läßt sich auch auf folgende Art finden. Es sey $a^{mx} = y$, so ist $mx . \log nat\, a = \log nat\, y$, folglich $m dx . \log nat\, a = \frac{dy}{y}$, und $dy = my dx . \log nat\, a$
$= m a^{mx} dx . \log nat\, a = d(a^{mx}).$

II. $d(a x^n b^{mx}) = a x^n b^{mx} .\ d(\log nat\, a x^n b^{mx}) = a x^n b^{mx} .$

$d(La + n.Lx + mx . Lb) = a x^n b^{mx} . (\frac{n dx}{x} + m dx . Lb)$

$= dx (n a x^{n-1} b^{mx} + m a x^n b^{mx} . \log nat b).$

III. $d(a x^x) = a x^x . d(La x^x) = a x^x . d\ (La + x Lx) =$
$a x^x . (dx\, Lx + dx) = dx\, (a x^x . \log nat\, x + a x^x).$

IV. $d\ (h^{mx}) = m h^{mx} dx$, wenn die Grundzahl der natürlichen Logarithmen $= h$, und folglich $Lh = 1$ gesetzet wird. Wir werden in der Folge meistens $\log nat b$, $\log nat x$ u. s. w. durch Lb, Lx bezeichnen.

V. $d[h^{(2ax - x^2)}] = (2a - 2x)\ dx h^{(2ax - x^2)}.$

VI.

VI. $d(h^{mxh^{nx}}) = h^{mxh^{nx}} \times d(Lh^{mxh^{nx}}) = h^{mxh^{nx}} \times d(mxh^{nx})$ Fig.

$= h^{mxh^{nx}} \times (m\,dx\,h^{nx} + mnx\,dx\,h^{nx})$

$= (1 + nx)\,dx \,.\, mh^{x(n+mh^{nx})}$.

Anmerkung. Daß $d(a^{mx}) = ma^{mx}dx\,La$ ist; läßt sich auch unmittelbar aus der Fundamental-Regel ableiten. Denn es ist $d(a^{mx}) = a^{m(x+dx)} - a^{mx} = a^{mx}\,a^{mdx} - a^{mx} =$

$$a^{mx} \,.\, [1 + m\,dx\,.\,La + \frac{m^2\,dx^2\,(La)^2}{1\,.\,2} + \frac{m^3\,dx^3\,.\,(La)^3}{1.2.3} + \ldots.] - a^{mx} = ma^{mx}dx\,.\,La.$$

§. 685.

Die trigonometrischen Functionen eines Bogens oder eines Winkels in Beziehung auf die Länge φ des mit dem Halbmesser $= 1$ aus der Spitze zwischen den Schenkeln des Winkels beschriebenen Bogens lassen sich auf eben diese Art mittelst der Fundamental-Regel differenziren. Es ist nähmlich

I. $d\,(\sin\varphi) = d\varphi\,.\cos\varphi$.

II. $d\,(\cos\varphi) = -d\varphi\,.\sin\varphi$.

Denn es ist $d(\sin\varphi) = \sin\,(\varphi + d\varphi) - \sin\varphi =$ $\sin\varphi\,.\cos d\varphi + \cos\varphi\,.\sin d\varphi - \sin\varphi$ (vermöge §. 542. I.) Nun ist aber $\cos d\varphi = 1$ und $\sin d\varphi = d\varphi$, weil $d\varphi$ ein unendlich kleiner Bogen oder Winkel ist; folglich ist auch $d(\sin\varphi) = \sin\varphi + d\varphi\,.\cos\varphi - \sin\varphi = d\varphi\,.\cos\varphi$.

Eben so ist $d(\cos\varphi) = \cos\,(\varphi + d\varphi) - \cos\varphi =$ $\cos\varphi\,.\,\cos d\varphi - \sin\varphi\,.\sin d\varphi - \cos\varphi = \cos\varphi - d\varphi\,.\sin\varphi - \cos\varphi = -d\varphi\,.\sin\varphi$.

Daß diese beyden Ausdrücke für $d\,(\sin\varphi)$ und $d\,(\cos\varphi)$ erhalten werden können, wenn man $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ durch die zugehörigen unendlichen Reihen ausdrucket, ist für sich klar.

Nun lassen sich auch die Differenzial-Formeln für die übrigen trigonometrischen Functionen sehr leicht ausdrucken. Es ist nähmlich

Fig. III. $d(\text{tang}\varphi) = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$. IV. $d(\cot\varphi) = -\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}$.

V. $d(\sec\varphi) = \frac{d\varphi \cdot \sin\varphi}{\cos^2\varphi}$. VI. $d(\text{cosec}\,\varphi) = -\frac{d\varphi\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$.

VII. $d(\text{sinvers}\varphi) = d\varphi.\sin\varphi$.

VIII. $d(\text{cosvers}\varphi) = -d\varphi.\cos\varphi$.

Denn es ist $d(\text{tang}\varphi) = d\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right) =$

$\frac{\cos\varphi \cdot d(\sin\varphi) - d(\cos\varphi) \cdot \sin\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{d\varphi.\cos^2\varphi + d\varphi.\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} =$

$\frac{d\varphi(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}{\cos^2\varphi} = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$.

und $d(\cot\varphi) = d\left(\frac{1}{\text{tang}\,\varphi}\right) = \frac{-d(\text{tang}\varphi)}{\text{tang}^2\phi}$

$= -\frac{d\phi}{\cos^2\varphi} \cdot \frac{\cos^2\phi}{\sin^2\phi} = -\frac{d\varphi}{\sin^2\phi}$.

Ferner ist $d(\sec\phi) = d\left(\frac{1}{\cos\varphi}\right) = \frac{-d(\cos\varphi)}{\cos^2\phi} = \frac{d\phi.\sin\phi}{\cos^2\varphi}$

und $d(\text{cosec}\phi) = d\left(\frac{1}{\sin\phi}\right) = \frac{-d(\sin\varphi)}{\sin^2\phi} = \frac{-d\phi.\cos\phi}{\sin^2\phi}$.

Endlich ist $d(\text{sinvers}\varphi) = d(1 - \cos\phi) = d\phi.\sin\phi$

und $d(\text{cosvers}\varphi) = d(1 - \sin\varphi) = -d\varphi.\cos\phi$.

Diese Formeln sind hinreichend alle Functionen, bey denen Sinus, Cosinus, Tangenten u. s. w. vorkommen, zu differenziren. S. z. B. ist $d\left(\frac{y^n.\sin my}{\text{tang}^3 y}\right) = d(y^n.\sin my.\text{tang}^{-3}y)$

$= ny^{n-1}\,dy.\sin my.\text{tang}^{-3}y + my^n\,dy.\cos my.\text{tang}^{-3}y$

$-3\text{tang}^{-4}y.\frac{dy}{\cos^2 y}.y^n.\sin my = ny^{n-1}dy.\sin my.\text{tang}^{-3}y$

$+my^n\,dy.\cos my.\text{tang}^{-3}y - 3y^n\,dy.\sin my.\cos^{-2}y.\text{tang}^{-4}y$

u. s. w.

§. 686. Fig.

Aus diesen im vorhergehenden §. entwickelten acht Formeln fließen nun folgende Gleichungen für das Differenziale $d\varphi$ eines Bogens oder Winkels φ, durch eine jede zugehörige trigonometrische Function ins besondere ausgedruckt, wenn man die im vierten Hauptstücke vorgenommene Verwandlung der trigonometrischen Functionen in Erwägung zieht.

1.) $d\varphi = \frac{d(\sin\varphi)}{\cos\varphi} = \frac{d(\sin\varphi)}{\sqrt{(1-\sin^2\varphi)}}$.

2.) $d\varphi = \frac{-d(\cos\phi)}{\sin\phi} = \frac{-d(\cos\varphi)}{\sqrt{(1-\cos^2\varphi)}}$.

3.) $d\phi = \cos^2\phi.d(\text{tang}\varphi) = \frac{d(\text{tang}\phi)}{\sec^2\varphi} = \frac{d(\text{tang}\,\varphi)}{1+\text{tang}^2\,\phi}$.

4.) $d\phi = -\sin^2\phi.d(\cot\phi) = \frac{-d(\cot\varphi)}{\text{cosec}^2\phi} = \frac{-d(\cot\phi)}{1+\cot^2\phi}$.

5.) $d\phi = \frac{\cos^2\phi.d(\sec\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi.d(\sec\varphi)}{\text{tang}\varphi} = \frac{d(\sec\phi)}{\sec\phi\sqrt{(\sec^2\varphi-1)}}$

6.) $d\phi = -\frac{\sin^2.\phi d(\text{cosec}\phi)}{\cos\phi} = -\frac{d(\text{cosec}\phi)}{\text{cosec}\phi.\sqrt{(\text{cosec}^2\phi-1)}}$

7.) $d\phi = \frac{d(\text{sinv}\phi)}{\sin\phi} = \frac{d(\text{sinv}\phi)}{\sqrt{(2\text{sinv}\phi-\text{sinv}^2\phi)}}$.

8.) $d\phi = \frac{-d(\text{cosv}\phi)}{\cos\phi} = \frac{-d(\text{cosv}\phi)}{\sqrt{(2\text{cosv}\phi-\text{cosv}^2\phi)}}$.

Setzen wir nun bey einer jeden Formel ins besondere die darin vorkommende trigonometrische Function $= x$, nähmlich in der Formel 1.) $\sin\varphi = x$, in der Formel 2.) $\cos\varphi = x$, in der Formel 3.) $\text{tang}\,\varphi = x$ (welche Bezeichnungen nichts anderes bedeuten als $\sin \text{arc}\,\varphi = x$ $\cos \text{arc}\,\varphi = x$, $\text{tang arc}\,\varphi = x$ u. s. w.); so folget $\phi = \text{arc sin}\,x$, $\phi = \text{arc cos}\,x$, $\varphi = \text{arc tang}\,x$ u. s. w. und $d\varphi = d(\text{arc sin}x)$, $d\varphi = d(\text{arc cos}x)$, $d\varphi = d(\text{arc tang}x)$ u. s. w. Substituiren wir diese Werthe nach einander in den

oberen

Fig. oberen Formeln; so erhalten wir das Differenziale eines Bogens für den Halbmesser = 1 oder eines Winkels durch eine jede trigonometrische Function ins besondere ausgedruckt in folgenden Gleichungen, welche in der Integral-Rechnung vorzüglich gebraucht werden. Nähmlich

$$\text{I. } d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\text{II. } d(\arccos x) = \frac{-dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\text{III. } d(\arctan x) = \frac{dx}{1+x^2} = dx(1+x^2)^{-1}.$$

$$\text{IV. } d(\operatorname{arc\,cot} x) = \frac{-dx}{1+x^2} = -dx(1+x^2)^{-1}.$$

$$\text{V. } d(\operatorname{arc\,sec} x) = \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-1)}} = x^{-1}dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\text{VI. } d(\operatorname{arc\,cosec} x) = \frac{-dx}{x\sqrt{(x^2-1)}} = -x^{-1}dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\text{VII. } d(\operatorname{arcsinvers} x) = \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}} = dx(2x-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$= x^{-\frac{1}{2}}dx(2-x)^{-\frac{1}{2}} = x^{-1}dx(2x^{-1}-1)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\text{VIII. } d(\operatorname{arc\,cosv} x) = \frac{-dx}{\sqrt{(2x-x^2)}} = -dx(2x-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -x^{-\frac{1}{2}}dx(2-x)^{-\frac{1}{2}} = -x^{-1}dx(2x^{-1}-1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Durch diese acht Formeln können die trigonometrischen Functionen von folgender Gestalt $y^n \arcsin y$, $\frac{2}{3}\arccos\sqrt{y^3}$, $\arctan(3+x^2)$ u. s. w. sehr leicht differenziret werden. Es ist nähmlich

$$d(y^n . \arcsin y) = ny^{n-1}\,dy . \arcsin y + y^n\,dy(1-y^2)^{-\frac{1}{2}};$$

$$d(\tfrac{2}{3}\arccos\sqrt{y^3}) = d(\tfrac{2}{3}\arccos y^{\frac{3}{2}}) = -y^{\frac{1}{2}}dy(1-y^3)^{-\frac{1}{2}};$$

$$d[\arctan(3+x^2)] = \frac{2x\,dx}{10+6x^2+x^4}$$ u. s. w. Wären aber trigonometrische Functionen für einen anderen bestimmten

ten Halbmesser zu differenziren; so müßten dieselben erst auf den Halbmesser = 1 gebracht werden. Fig.

Anmerkung. Wenn wir alle bisher entwickelten Differenzial-Gleichungen aufmerksam betrachten; so finden wir, daß die Differenzial-Größen derjenigen Functionen negativ sind, welche von einer veränderlichen Größe so abhangen, daß die Functionen abnehmen, wenn die veränderliche Größe in denselben wächst, und umgekehrt. So z. B. sehen wir, daß das Differenziale des Cosinus, der Cotangente, der Cosecante eines Bogens, ferner das Differenziale der Ordinate eines Kreises vom Mittelpuncte gerechnet u. s. w. negativ ist. Alle diese Functionen wachsen, wenn die veränderliche Größe in denselben abnimmt, und umgekehrt. Die Ursache hiervon ist aus der Erklärung des Differenziales einer Function leicht einzusehen. Denn das Differenziale einer Function ist nichts anders als die Aenderung der Function, wenn die in derselben befindliche veränderliche Größe um ihren unendlich kleinen Theil vermehret oder vermindert wird. Nun ist in diesem Falle die Aenderung der Function in Hinsicht auf die Aenderung der darin vorkommenden veränderlichen Größe jederzeit negativ; folglich müssen auch die Differenzialen derjenigen Functionen, welche in Hinsicht auf ihre veränderlichen Größen abnehmen, da diese wachsen, immer negativ seyn. Diese Erinnerung darf man bey der Anwendung der Differenzial-Rechnung nie außer Acht lassen. Wenn z. B. $ax^2 - x^3$ zu differenziren wäre, und man wüßte, daß die Function $ax^2 - x^3$ abnimmt, wenn die veränderliche Größe x wächst; so würde $d(ax^2 - x^3) = dx(3x^2 - 2ax) = xdx(3x - 2a)$ seyn. Die negativen Differenzialen werden übrigens in der Rechnung eben so, wie sonst die negativen Größen behandelt.

Fig.

II. Abschnitt.

Von den höheren Differenzialen, und von der daraus fließenden Anwendung der Differenzial-Rechnung auf Function-Reihen.

§. 687.

Die Differenzialen, von denen wir bisher gehandelt haben, heißen die ersten Differenzialen. Z. B. bey der Gleichung für irgend eine krumme Linie $y = ax^m$ ist $dy = max^{m-1}dx$ das erste Differenziale der Ordinate y; nähmlich die Veränderung dy der Ordinate y ist gleich $max^{m-1}dx$, wenn die Abscisse x um ein unendlich kleines Stück dx wächst oder abnimmt. Nun kann man die Frage aufwerfen, um wie viel dieses erste Differenziale $dy = max^{m-1}dx$ der Ordinate sich verändern müsse, wenn die Abscisse wieder um ein eben solches unendlich kleines Stück dx wächst oder abnimmt. Wenn wir diese Veränderung von dy mit ddy bezeichnen, so haben wir sodann

$$ddy = madx(x+dx)^{m-1} - max^{m-1}dx =$$

$$madx.\left[x^{m-1} + (m-1)x^{m-2}dx + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} \times x^{m-3}dx^2 + ..\right] - max^{m-1}dx = m.(m-1).ax^{m-2}dx^2$$

$$+ \frac{m.(m-1)(m-2)}{1.2}.ax^{m-3}dx^3 + \frac{m....(m-3)}{1.2.3} \times ax^{m-4}dx^4 + ...$$

das ist, $ddy = m.(m-1)\,ax^{m-2}\,dx^2$, weil alle darauf folgende Glieder in Hinsicht auf das erste verschwinden.

Wir sehen aus diesem, daß ddy eine unendlich kleine Größe von der zweyten Ordnung ist, weil $m.(m-1).ax^{m-2}dx^2$ von eben dieser Ordnung ist. Diese Veränderung oder dieser Unterschied, um welchen das erste Differenziale einer Function von x sich verändert, wenn man die veränderliche Größe x in der Differenzial-Gleichung wieder um ihr Differenziale dx wachsen oder abnehmen läßt, heißt das

zweyte

zweyte Differenziale eben derselben Function. So ist in unserem Beyspiele $m.(m-1) \times ax^{m-2}dx^2$ das zweyte Differenziale der Function ax^m, nähmlich $m.(m-1).ax^{m-2}dx^2 = ddd(ax^m) = ddy = d(dy)$. Fig.

Auch ist es aus diesem leicht zu ersehen, daß man das zweyte Differenziale einer gegebenen Function sehr leicht findet, wenn man das erste Differenziale nach den vorigen Regeln noch einmahl dergestalt differenziret, daß dx (vermöge der gegebenen Erklärung des zweyten Differenziales) als eine unveränderliche Größe angesehen wird. Es ist nähmlich

$$ddd(ax^m) = d[(dax^m)] = d(max^{m-1}dx) = m(m-1)ax^{m-2}dx^2.$$

Eben so findet man bey dem Kreise aus der Differenzial-Gleichung $dy = -xdx(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ das zweyte Differenziale

$$ddy = -dx^2(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{3}{2}} \times -2xdx \times -xdx$$

$$= -dx^2(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2dx^2(a^2-x^2)^{-\frac{3}{2}}, \text{ nähmlich}$$

$$ddy = -a^2dx^2(a^2-x^2)^{-\frac{3}{2}} = ddd[\sqrt{(a^2-x^2)}].$$

Aus der Differenzial-Gleichung der Parabel $dy = \frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dx$ fließt

$$ddy = -\tfrac{1}{4}p^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{3}{2}}dx^2 = ddd[\sqrt{(px)}].$$

Aus der Gleichung für die Logistik $y = ch^{\frac{x}{a}}$ folgt

$$dy = \frac{ch^{\frac{x}{a}}dx}{a} = d(ch^{\frac{x}{a}}), \text{ und ferner } ddy = \frac{ch^{\frac{x}{a}}dx^2}{a^2}, \text{ u. s. w.}$$

Eben so läßt sich das dritte Differenziale einer gegebenen Function von x bestimmen, wenn man das zweyte Differenziale nach den gewöhnlichen Regeln noch einmahl dergestalt differenziret, daß wieder dx für unveränderlich angesehen wird. Denn es ist das dritte Differenziale einer Function von x nichts anders, als der Unterschied, um welchen das zweyte Differenziale sich verändert, wenn man in demselben die veränderliche Größe x noch einmahl um

Fig. ihr Differenziale dx wachsen oder abnehmen läßt. Auf diese Art kann man weiter zu den 4ten, 5ten Differenzialen fortgehen. Man pflegt gemeiniglich das zweyte Differenziale von y mit ddy oder d^2y, das dritte mit d^3y, das vierte mit d^4y u. s. w. zu bezeichnen.

Z. B. aus der Gleichung $y = ax^m$ fließt

$dy = max^{m-1}\,dx = d(ax^m)$,
$d^2y = m(m-1)ax^{m-2}\,dx^2 = dd(ax^m)$;
$d^3y = m.(m-1).(m-2)ax^{m-3}\,dx^3 = d^3(ax^m)$;
$d^{n+1}y = d(d^ny)$; u. s. w.

Nun sehen wir deutlich, nach welchem Gesetze die höheren Differenzialen fortschreiten. Es ist nähmlich allgemein das $n$te Differenziale einer Function ax^m nähmlich

$d^ny = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)ax^{m-n}dx^n$.

Aus der Gleichung $y = a$. logvat x folgt

$dy = +ax^{-1}\,dx = d(a.Lx)$.
$d^2y = -ax^{-2}\,dx^2 = d^2(a.Lx)$;
$d^3y = +2ax^{-3}dx^3 = d^3(a.Lx)$;
$d^4y = -6ax^{-4}dx^4 = d^4(a.Lx)$.

Aus der Gleichung $y = ax^2$ fließt $dy = 2axdx$, $d^2y = 2adx^2$, $d^3y = 0$, $d^4y = 0$, u. s. w. welches sehr leicht einzusehen ist, weil ax^2 das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe des zweyten Ranges vorstellet, bey der die zweyten Differenzen beständig, und folglich die dritten $= 0$ sind. Z. B. unsere Function ax^2 ist in dem gegenwärtigen Zustande $= ax^2$

im 2ten $= a(x+dx)^2 = ax^2 + 2axdx + adx^2$
im 3ten $= a(x+2dx)^2 = ax^2 + 4axdx + 4adx^2$
im 4ten $= a(x+3dx)^2 = ax^2 + 6axdx + 9adx^2$
im 5ten $= a(x+4dx)^2 = ax^2 + 8axdx + 16adx^2$

folglich sind die ersten Differenzen von jeden zweyen nächst auf einander folgenden Zuständen $= (2axdx + adx^2)$, $(2axdx + 3adx^2)$, $(2axdx + 5adx^2)$; die zweyten Differenzen aber $= 2adx^2$, $2adx^2$, $2adx^2$ sind beständig, und folglich die dritten $= 0$.

§. 688.

Fig.

Bisher haben wir nur Functionen von einer einzigen veränderlichen Größe zum 2ten, 3ten 4tenmahle differenziret, und dabey das erste Differenziale dx der veränderlichen Größe für unveränderlich angesehen. Wenn eine gegebene Function von keiner anderen abhängt, so muß bey den höheren Differenzialen derselben jederzeit eine veränderliche Größe darin zum Grunde liegen, deren erstes Differenziale unveränderlich ist; die ersten Differenzialen aller übrigen veränderlichen Größen hingegen sind darin veränderlich. Hängt aber eine gegebene Function von einer anderen ab, und ist in der letzteren eine veränderliche Größe zum Grunde gelegt worden; so sind in der ersten Function die ersten Differenzialen aller darin sich befindlichen veränderlichen Größen veränderlich. Wenn z. B. x die Abciſſe einer krummen Linie bedeutet, so wird gemeiniglich bey der Anwendung dx für unveränderlich angesehen; weil man sich dabey vorstellet, daß die Abciſſe x in unendlich viele gleiche Theile getheilet sey, deren jeder $= dx$ ist. In diesem Falle aber ist das erste Differenziale einer jeden Function, welche von den Abciſſen abhängt, z. B. das erste Differenziale dy der Ordinate y, das erste Differenziale dz des Bogens z u. s. w. veränderlich. Sollte aber die gegebene Function einer krummen Linie von einer anderen Function abhängen, und es würde in der letzteren eine veränderliche Größe zum Grunde gelegt; so würde auch das erste Differenziale der Abciſſe veränderlich seyn. Ob bey einer gegebenen Function der eine oder der andere Fall statt finde, und bey welcher veränderlichen Größe das erste Differenziale unveränderlich sey, müssen jederzeit bloß die Umstände der Aufgabe entscheiden.

Wenn nun eine Function von mehreren veränderlichen Größen zum zweytenmahle differenziret werden soll, so wird das gesuchte Differenziale nach den gewöhnlichen Regeln gefunden, wenn man dabey das zweyte Differenziale der

Fig. darin vorkommenden veränderlichen Größen y, z durch ddy, ddz (welches unendlich kleine Größen von der zweyten Ordnung sind) bezeichnet. Wir wollen einige Beyspiele ansetzen, damit dem Anfänger der noch ungewohnte Vorgang bey der Differenzial-Rechnung geläufiger werde. Nähmlich

$$dd(ayz) = d(d(ayz)) = d(azdy + aydz) = adzdy + azddy + adydz + ayddz = 2adydz + azddy + ayddz.$$

Wäre dy unveränderlich, so wäre $ddy = 0$, und folglich $dd(ayz) = 2adydz + ayddz$; wäre hingegen dz unveränderlich, so wäre $dd(ayz) = 2adydz + azddy$.

Ingleichen $d\left(\frac{ydx}{dy}\right) = \frac{dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}$.

Setzt man nun dx unveränderlich, so ist $d\left(\frac{ydx}{dy}\right) = dx - \frac{ydxddy}{dy^2}$.

$$d\left(\frac{y^2dy^3}{adx^2}\right) = \frac{2aydx^2dy^4 + 3ay^2dx^2dy^2ddy - 2ay^2dxddxdy^3}{a^2dx^4}$$

Eben so findet man aus der Differenzial-Gleichung $dz = \frac{ydy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = ydy(dx^2 + dy^2)^{-\frac{1}{2}}$, wenn man sie noch einmahl differenziret, folgende Differenzial-Gleichung

$$\begin{aligned}
ddz &= d[ydy(dx^2 + dy^2)^{-\frac{1}{2}}] \\
&= dy^2(dx^2 + dy^2)^{-\frac{1}{2}} + yddy(dx^2 + dy^2)^{-\frac{1}{2}} \\
&\quad - \tfrac{1}{2}ydy(dx^2 + dy^2)^{-\frac{3}{2}}.d(dx^2 + dy^2) \\
&= (dy^2 + yddy).(dx^2 + dy^2)^{-\frac{1}{2}} \\
&\quad - \tfrac{1}{2}ydy(dx^2 + dy^2)^{-\frac{3}{2}}.(2dxddx + 2dyddy) \\
&= (dy^2 + yddy).(dx^2 + dy^2)^{-\frac{1}{2}} \\
&\quad - (ydxdyddx + ydy^2ddy).(dx^2 + dy^2)^{-\frac{3}{2}} \\
&= \frac{dy^2 + yddy}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(ydxdyddx + ydy^2ddy)}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{(dy^2 + yddy).(dx^2 + dy^2) - ydxdyddx - ydy^2ddy}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&=
\end{aligned}$$

$$= \frac{dx^3 dy^3 + y dx^2 ddy + dy^4 - y dx dy ddx}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}};$$

Fig.

nimmt man aber dx für unveränderlich an, so ist

$$ddz = (dx^2 dy^2 + y dx^2 ddy + dy^4).(dx^2 + dy^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

§. 689.

Eine jede Function X von einer veränderlichen Größe x; sie mag wie immer beschaffen seyn, läßt sich unter folgender Gestalt

$$X = Ax^b + Bx^b + Cx^c + Dx^d + \ldots\ldots \text{vorstellen.}$$

Daraus kann man (mittelst des im §. 299 entwickelten binomischen Lehrsatzes) bestimmen, um was sich die Function X ändert, wenn die darin befindliche veränderliche Größe um eine endliche Größe α vermehret oder vermindert wird.

Denn aus der Gleichung

$$X = Ax^a + Bx^b + Cx^c + Dx^d + \ldots\ldots \text{folgt}$$

$$\frac{dX}{dx} = aAx^{a-1} + bBx^{b-1} + cCx^{c-1} + dDx^{d-1} + \ldots$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} = a(a-1)Ax^{a-2} + b(b-1)Bx^{b-2} + c(c-1)Cx^{c-2} +$$

$$\frac{d^3X}{dx^3} = a(a-1)(a-2)Ax^{a-3} + b(b-1)(b-2)Bx^{b-3} +$$

$$\frac{d^4X}{dx^4} = a(a-1)(a-2)(a-3)Ax^{a-4} + \ldots\ldots$$

Nun setze man die Function X gehe in X' über, wenn die veränderliche Größe x um α vermehret wird; so ist

$$X' = A(x+\alpha)^a + B(x+\alpha)^b + C(x+\alpha)^c + \ldots\ldots\ldots$$

$$= Ax^a + \alpha a Ax^{a-1} + \frac{\alpha^2 a(a-1)}{2} Ax^{a-2} + \ldots$$

$$\frac{\alpha^3 a(a-1)(a-2)}{2.3} Ax^{a-3} + \ldots\ldots$$

$$+ Bx^b + \alpha b Bx^{b-1} + \frac{\alpha^2 b(b-1)}{2} Bx^{b-2} +$$

$$\frac{\alpha^3 b(b-1)(b-2)}{2.3} Bx^{b-3} + \ldots\ldots +$$

Fig.

$$+Cx^c+\alpha cCx^{c-1}+\frac{\alpha^2 c(c-1)}{2}Cx^{c-2}+$$

$$\frac{\alpha^3 c(c-1)(c-2)}{2\cdot 3}Cx^{c-3}+\cdots\cdots$$

Oder es ist

$$X'=Ax^a+Bx^b+Cx^c+Dx^d+\cdots\cdot$$
$$+\alpha(aAx^{a-1}+bBx^{b-1}+cCx^{c-1}+\cdots\cdot)$$
$$+\frac{\alpha^2}{2}[a(a-1)Ax^{a-2}+b(b-1)Bx^{b-2}+$$
$$c(c-1)Cx^{c-2}+\cdots\cdot]$$
$$+\frac{\alpha^3}{2\cdot 3}[a(a-1)(a-2)Ax^{a-3}+b(b-1)(b-2)Bx^{b-3}+]$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Wenn man nun für eine jede horizontale Reihe die oben angesetzten Werthe X, $\frac{dX}{dx}$, $\frac{d^2X}{dx^2}\cdots\cdots$ substituiret, so ist

$$X'=X+\alpha\frac{dX}{dx}+\frac{\alpha^2}{2}\cdot\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{\alpha^3}{2\cdot 3}\cdot\frac{d^3X}{dx^3}+\frac{\alpha^4}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{d^4X}{dx^4}+$$

Wenn aber α negativ ist, so ist

$$X'=X-\alpha\cdot\frac{dX}{dx}+\frac{\alpha^2}{2}\cdot\frac{d^2X}{dx^2}-\frac{\alpha^3}{2\cdot 3}\cdot\frac{d^3X}{dx^3}+\frac{\alpha^4}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{d^4X}{dx^4}-+\cdots$$

Dieser Satz ist in der Anwendung ungemein brauchbar, da sich alle Functionen-Reihen von einem gegebenen Gesetze sehr kurz daraus ableiten lassen, wie es aus folgenden Beyspielen zu ersehen ist.

Es sey $X=x^2-2x+1$. Man verlangt den Werth X' dieser Function zu wissen, wenn x in $x+1$ übergehet.

Für diesen Fall ist $\alpha=1$, $\frac{dX}{dx}=2x-2$, $\frac{d^2X}{dx^2}=2$, $\frac{d^3X}{dx^3}=0$ u. s. w.

folglich ist $X'=x^2-2x+1+2x-2+1=x^2$.

Es sey $X=\cos u$ für den Halbmesser $=1$; man soll für eben diesen Halbmesser $\cos(u+z)$ bestimmen.

Hier

Fig.

Hier ist $x = u$, $\alpha = z$, $\frac{dX}{dx} = \frac{dX}{du} = -\sin u$,

$\frac{d^2X}{du^2} = -\cos u$, $\frac{d^3X}{du^3} = \sin u$, $\frac{d^4X}{du^4} = \cos u$,

$\frac{d^5X}{du^5} = -\sin u$, $\frac{d^6X}{du^6} = -\cos u$ u. s. w.; folglich ist

$$\cos(u+z) = \cos u - z.\sin u - \frac{z^2}{2}.\cos u + \frac{z^3}{2.3}.\sin u +$$

$$\frac{z^4}{2.3.4}.\cos u - \frac{z^5}{2.3.4.5}.\sin u - \frac{z^6}{2..6}.\cos u + ..$$

Man setze $u = 0$; so ist $\cos u = 1$, $\sin u = 0$, und $\cos(u+z) = \cos z$.

Folglich ist $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{2.3.4} - \frac{z^6}{2..6} + \frac{z^8}{2..8} +$

(wie im §. 545.).

Es sey $X = \log \text{vulg} \sin x$ für den Halbmesser $= 1$, und der Modul der gemeinen Logarithmen sey $= m$; man soll $\log \text{vulg} \sin(x+a)$ bestimmen.

In diesem Falle ist $X = m.\log \text{nat} \sin x$, $\alpha = a$,

$\frac{dX}{dx} = \frac{m}{dx}.\frac{d(\sin x)}{\sin x} = \frac{m\cos x}{\sin x} = m.\cot x$, $\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{m}{\sin^2 x}$,

$\frac{d^3X}{dx^3} = \frac{2m\cot x}{\sin^2 x}$ u. s. w.

Folglich ist $\log \text{vulg} \sin(x+a) = \log \text{vulg} \sin x +$

$$am\cot x - \frac{a^2 m}{2\sin^2 x} + \frac{2a^3 m\cot x}{3.\sin^2 x} \cdots\cdots$$

§. 690.

Vermöge §. 686. ist $d(\text{arc} \sin x) = dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$,

oder wenn wir $\text{arc} \sin x = z$ setzen; so ist $dz = dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ oder

$$dz = dx\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1.3x^4}{2.4} + \frac{1.3.5x^6}{2.4.6} + \cdots\right)\mathfrak{A}).$$

Nun läßt sich z durch x ausgedrucket finden, wenn man für z eine unendliche Reihe mit unbestimmten Coeffi-

cien-

Fig. cienten von der Beschaffenheit annimmt, daß ihr Differenziale mit A) in Hinsicht auf die Exponenten der veränderlichen Größe einerley Gestalt hat. Man setze nähmlich

$z = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + Ex^9 + \ldots\ldots\ldots$; B)

so ist $dz = dx(A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + 9Ex^8 + \ldots\ldots)$

folglich ist auch $dx(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1.3x^4}{2.4} + \frac{1.3.5x^6}{2.4.6} + \ldots\ldots)$

$= dx(A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + \ldots\ldots)$

und $0 = A\left\{\begin{matrix}+3B\\-\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}x^2 + \left\{\begin{matrix}+5C\\-\frac{1.3}{2.4}\end{matrix}\right\}x^4 + \left\{\begin{matrix}+7D\\-\frac{1.3.5}{2.4.6}\end{matrix}\right\}x^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Folglich ist $A - 1 = 0$, nähmlich $A = 1$

$$3B - \tfrac{1}{2} = 0 \qquad B = \frac{1}{2.3}$$

$$5C - \frac{1.3}{2.4} = 0 \qquad C = \frac{1.3}{2.4.5}$$

$$7D - \frac{1.3.5}{2.4.6} = 0 \qquad D = \frac{1.3.5}{2.4.6.7}$$

und $z = x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{1.3x^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5x^7}{2.4.6.7} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Diese Reihe hat eben dieselbe Gestalt wie im §. 451. 4), sie stellet nähmlich den Bogen vor durch seinen Sinus ausgedrucket. Wenn man diese Reihe umkehret, so findet man den Sinus durch den dazu gehörigen Bogen ausgedrucket, wie im §. 545. Auf eben dieselbe Art findet man den Bogen durch die dazu gehörige Tangente u. s. w. ausgedrucket. Doch da das Nothwendige dieser Materie schon im §. 451. 545 und 553. vorgetragen worden ist; so können wir uns nicht dabey aufhalten. Wir beschließen daher diesen Abschnitt, und überlassen den Anfängern zur Uebung alle diese Reihen nach der hier gezeigten Methode zu entwickeln.

Einen vollständigen Gebrauch der Differenzial-Rechnung bey der Lehre der Reihen findet man bey dem großen Analysten Euler in seiner Anleitung zur Differenzial-Rechnung.

III. Abschnitt.

Fig.

Anwendung der Differenzial-Rechnung auf die Bestimmung der Subtangenten, Tangenten, Normalen, Subnormalen, und Asymptoten der krummen Linien.

§. 691.

Aufgabe. Eine allgemeine Formel für die Subtangente einer jeden krummen Linie von parallelen Ordinaten zu finden. 194.

Auflösung. Es sey die krumme Linie BMC, SP sey die Abscissen-Linie, A der Anfangspunct der Abscissen. Man gedenke an einen beliebigen Punct M die Tangente TM; die Ordinate dieses Punctes sey $PM = y$, und die zugehörige Abscisse $AP = x$. Man vermehre nun die Abscisse um ein beliebiges endliches Stück Pp, und ziehe die Ordinate pm; so wird diese Ordinate von der vorigen um das Stück Rm verschieden seyn, wenn man MR parallel zu Pp zieht. Durch M und m ziehe man die Secante Sm, so ist das Dreyeck MRm $\sim$ SPM, und folglich $Rm : RM$ (oder $Pp = PM$) $(y : PS$; es ist demnach die Subsecante $PS = \frac{y.Pp}{Rm}$. Nun stelle man sich vor, daß Pp ohne Ende abnehme, so wird der Punct m sich dem Puncte M, uud S dem Puncte T ohne Ende nähern; das ist, der Punct m wird unendlich nahe bey M, und S bey T liegen, wenn man Pp unendlich klein setzet. In diesem Falle wird demnach der Unterschied zwischen der endlichen Subtangente PT und zwischen der Subsecante PS unendlich klein $= 0$ in Hinsicht auf eine endliche Größe, und folglich wird in eben diesem Falle $PS = PT$. In eben dieser Voraussetzung wird aber auch $Pp = d(AP) = dx$, und $Rm = d(PM) = dy$. Folglich ist, wenn wir PT statt PS, dx statt Pp, und dy statt Rm in der Gleichung $PS = \frac{y.Pp}{Rm}$ subsstituiren, die

ge-

Fig. 194. gesuchte allgemeine Formel für die Subtangente $PT = \frac{y\,dx}{dy}$,

oder $PT = \frac{y}{dy \,.\, dx^{-1}}$, oder auch $PT = y\,dx\,dy^{-1}$.

§. 692.

Nach dieser Formel läßt sich nun die Subtangente bey einer jeden krummen Linie bestimmen, deren Gleichung für parallele Ordinaten bekannt ist, wenn man aus der gegebenen Gleichung den Werth von dy oder von dx suchet, und denselben in der gefundenen allgemeinen Formel substituiret.

Z. B. in der Parabel ist $y = \sqrt{px} = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, $dy = \frac{1}{2} p^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}\,dx$,

und $dy \,.\, dx^{-1} = \frac{1}{2} p^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}$; folglich ist $PT = \frac{y}{\frac{1}{2} p^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}}$

$= \frac{2x\; y^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}}$, oder wenn wir für y seinen Werth setzen, $PT = 2x$,

welches mit §. 631. I. vollkommen übereinstimmet. Aus eben dieser Gleichung $y = \sqrt{px}$, folgt auch $x = \frac{y^2}{p}$, $dx = \frac{2y\,dy}{p}$

und $dx \,.\, dy^{-1} = \frac{2y}{p}$; folglich $PT = \frac{y \,.\, 2y}{p} = \frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x$

wie im vorhergehenden Hauptstücke.

Aus der Gleichung $y = \frac{a^2}{x}$ für die Hyperbel an der Asymptote (Fig. 185.) folgt $dy = -a^2 x^{-2} dx$; folglich ist

$PT = \frac{y}{-a^2 x^{-2}} = -\frac{yx^2}{a^2} = -\frac{a^2}{x} \,.\, \frac{x^2}{a^2} \,. = -x$. Das Zeichen (—) zeiget an, daß der Durchschnittspunct T von der Ordinate an gerechnet, nicht in die Gegend des Anfangspunctes, sondern auf die entgegen gesetzte Seite fällt, welches wieder mit §. 667. vollkommen übereinstimmet.

Aus

Aus der Gleichung $y = ch^{\frac{x}{a}}$ für die Logistik (Fig. 188.) Fig.

folgt $dy.dx^{-1} = \frac{ch^{\frac{x}{a}}}{a}$; folglich ist $PT = y : \frac{ch^{\frac{x}{a}}}{a} = ch^{\frac{x}{a}} \times \frac{a}{ch^{\frac{x}{a}}}$

$= a$. In der Logistik ist demnach die Subtangente unveränderlich.

§. 693.

Die Gleichung für die Cycloide (Fig. 197.) ist $y = \sqrt{(2ax - x^2)} + z$, wenn wir den Bogen AQ $= z$ setzen; 197.

also ist $dy = (adx - xdx)(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}} + dz$. Es ist aber $z =$ Arc sinv x für den Halbmesser a, und (vermöge 686. VII.)

$dz = d(\text{Arc sinv } x) = adx(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}$; folglich ist $dy =$

$(adx - xdx) \cdot (2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}} + adx\,(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= (2a - x)\,dx(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{(2a - x)dx(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}}{(2ax - x^2)}$;

nähmlich $dy = dx(2ax^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}}$ ist die Differenzial-Gleichung für die Cycloide. Daraus läßt sich nun die Subtangente

$PT = \frac{y}{(2ax^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{xy}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$ bestimmen. Aus

dieser Gleichung folgt $\sqrt{(2ax - x^2)} : x = y : PT$, nähmlich $PQ : PA = PM : PT$. Bey der Cycloide läuft demnach die Tangente MT parallel mit der dazu gehörigen Sehne des Erzeugungskreises auf der Achse.

694.

Aus der allgemeinen Formel für die Subtangente einer jeden krummen Linie von senkrechten Ordinaten lassen sich nun auch sehr leicht allgemeine Formeln für die Tangente, Normale, und Subnormale ableiten. Es ist nähmlich

I. Die Subnormale $PN = \frac{ydy}{dx}$, oder $PN = \frac{y}{dx \cdot dy^{-1}}$,

oder auch $PN = ydy.dx^{-1}$. Denn TPM ∽ PMN, folglich

Fig. 194. lich $TP = \frac{y\,dx}{dy} : PM$ ($y = PM$ ($y : PN$, nähmlich $PN = \frac{y\,dy}{dx}$.

II. Die Normale $MN = \sqrt{(y^2 + \frac{y^2\,dy^2}{dx^2})}$, oder $MN = y(1 + dy^2 . dx^{-2})^{\frac{1}{2}}$ folgt aus dem rechtwinkeligen Dreyecke PMN.

III. Die Tangente $TM = \sqrt{(y^2 + \frac{y^2\,dx^2}{dy^2})}$, oder $TM = (y^2 + \frac{y^2}{dy^2\,dx^{-2}})^{\frac{1}{2}}$ folgt aus dem rechtwinkeligen Dreyecke TPM.

Z. B. Aus der allgemeinen Gleichung für die ganze Familie der Parabeln $y^{m+n} = p^m x^n$, folgt $y = p^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}}$ und $dy = \frac{n}{m+n} . p^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}-1}\,dx$. Substituiren wir nun diesen Werth in der Formel I, so ist die Subnormale $PN = y . \frac{n}{m+n} p^{\frac{m}{m+n}} . x^{\frac{n}{m+n}-1} = \frac{n}{m+n} . p^{\frac{2m}{m+n}} x^{\frac{2n}{m+n}-1}$. Setzen wir $m = 1$, und auch $n = 1$, so ist $PN = \frac{1}{2}p$ die Subnormale der gemeinen Parabel, welche demnach unveränderlich ist.

Die Differenzial-Gleichung des Kreises für die Ordinaten vom Mittelpuncte gerechnet ist $dy = -x\,dx(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$, und $dy^2 = x^2\,dx^2(a^2 - x^2)^{-1}$. Substituiren wir nun diesen Werth in der Formel II, so ist in dem Kreise die Normale $= [y^2 + y^2 x^2 (a^2 - x^2)^{-1}]^{\frac{1}{2}} = (a^2 - x^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} = a =$ dem Halbmesser und folglich unveränderlich.

Anmerkung. Eben so leicht lassen sich auch allgemeine Gleichungen für die Subnormale, Normale, Tangente u. s. w. für parallele Ordinaten ableiten, welche mit der Abscissen-Linie einen gegebenen Winkel einschließen.

Um z. B. eine Gleichung für die Subnormale P'N abzuleiten, setze man die Abscisse $AP' = x'$, die Ordinate

MP'

$MP' = y'$, den Winkel $MP'N = m$; so ist $NP' = NP$ Fig.
$+ PP'$. Es ist aber $PP' = y' . \cos m$, $PM = y = y' \sin m$, 194.
$dy = dy' . \sin m$, $AP = x = AP' + PP' = x' + y' \cos m$,
$dx = dx' + dy' . \cos m$, und $NP = \frac{y dy}{dx} = \frac{y' dy' . \sin^2 m}{dx' + dy' . \cos m}$;

folglich ist die Subnormale $NP' = \frac{y' dy' \sin^2 m}{dx' + dy' \cos m} + y' \cos m$

$= \frac{y' dy' (\sin^2 m + \cos^2 m) + y' dx' \cos m}{dx' + dy' \cos m}$

$= \frac{y' dy' + y' dx' \cos m}{dx' + dy' \cos m} = \frac{y' . \cos m + y' dy' (dx)^{-1}}{1 + \cos m dy' . (dx)^{-1}}$.

Auf eben diese Art lassen sich auch die übrigen Formeln entwickeln.

§. 695.

Auch für AT und AG lassen sich allgemeine Formeln angeben. Es ist nähmlich $AT = \frac{y dx}{dy} - x$, und $AG = y - \frac{x dy}{dx}$. Denn es ist $AT = PT - AP$
$= \frac{y dx}{dy} - x$, und $PT : PM = AT : AG$, nähmlich
$\frac{y dx}{dy} : y = \frac{y dx}{dy} - x : AG$, und folglich $AG = y - \frac{x dy}{dx}$.

Nach diesen zwey Formeln läßt sich die Lage der Asymptote einer krummen Linie von parallelen Ordinaten bestimmen, wenn die Asymptote mit der Abscissen-Linie entweder einen gewissen Winkel einschließt, oder mit derselben parallel läuft. Man muß um die Lage der Asymptoten zu bestimmen, aus der gegebenen Gleichung der krummen Linie statt y und dy in den beyden Formeln ihre Werthe substituiren, und sodann in den zwey gefundenen Gleichungen von AT und AG die Abscisse $x = \infty$, oder $x = -\infty$ setzen, wenn die krumme Linie negative Abscissen zuläßt, weil man sich vorstellen kann, daß die Asymptote in einer unendlichen Entfernung mit dem Schen-

kel

Fig. 194. kel der krummen Linie zusammenfalle, und denselben gleichsam an diesem Orte berühre. Erhält man nun in dieser Voraussetzung für AT und AG bestimmte Werthe durch gegebene Größen ausgedruckt, so ist dadurch die Lage der Asymptote bekannt, wenn man bey den gefundenen Ausdrücken von AT und AG die Zeichen + und — gehörig in Erwägung zieht. Z. B. bey der Hyperbel an der ersten Achse für die Abscissen vom Scheitel gerechnet ist $y = \frac{b}{a} \vee (x^2 + 2ax)$,

und $dy = \frac{(bx + ab)dx}{a \vee (x^2 + 2ax)}$, folglich ist $AT = \frac{ax}{x + a}$ und

$AG = \frac{bx}{\vee (x^2 + 2ax)}$. Setzen wir nun $x = \infty$, so ist $AT = a$ und $AG = b$. Wenn man demnach an dem Scheitel der Hyperbel eine Senkrechte $= b$ auf die erste Achse errichtet, und durch den Mittelpunct der ersten Achse und durch den Endpunct dieser Senkrechten b eine gerade Linie führet; so wird diese Gerade eine Asymptote der Hyperbel seyn, welches mit §. 663. vollkommen übereinstimmet.

Wenn bey der Voraussetzung $x = \infty$, oder $x = -\infty$ auch $AT = \infty$ wird, hingegen AG einen endlichen bekannten Werth erhält, oder auch sich in o verwandelt; so ist dieß ein Zeichen, daß im ersten Falle die Asymptote in der gefundenen Entfernung AG mit der Abscissen-Linie parallel läuft, im letzten Falle aber die Abscissen-Linie selbst eine Asymptote

ist. Z. B. bey der Logistik ist $y = ch^{\frac{x}{a}}$, und $dy = a^{-1} ch^{\frac{x}{a}} dx$;

folglich ist auch $AT = a - x$, und $AG = ch^{\frac{x}{a}} - a^{-1} ch^{\frac{x}{a}} x$. Setzen wir nun $x = +\infty$, so ist $AT = -\infty$, und auch AG unendlich groß und negativ, woraus sich nichts bestimmen läßt. Setzen wir hingegen $x = -\infty$, so ist $AT = \infty$

und $AG = ch^{\frac{-\infty}{a}} + a^{-1} ch^{\frac{-\infty}{a}} . \infty = \frac{c(a + \infty)}{\frac{\infty}{ah^a}} = \frac{\infty c}{\frac{\infty}{ah^a}}$

nähmlich es ist AG unendlich klein oder $= o$, weil $h^{\frac{\infty}{a}}$ ein unend-

lich

lich Großes von einem viel höheren Range seyn muß als $\frac{\infty}{\infty}$; welches man einigermassen einsehen kann, wenn man h^a in eine Reihe auflöset. Es ist demnach bey der Logistik $(y = ch^{\frac{x}{a}})$ die Abscissen-Linie selbst die Asymptote. Fig. 194.

Wenn die Gleichung der krummen Linie zwar unendliche Abscissen zuläßt, aber in dieser Voraussetzung für AT und für AG unendliche oder gar auch unmögliche Werthe gibt; so ist dieß ein Zeichen, daß sie keine Asymptoten von der erwähnten Beschaffenheit hat. Z. B. in der Parabel ist $AT = x$, und $AG = \frac{1}{2} \sqrt{px}$; also für $x = \infty$ ist auch AT und AG unendlich groß; für $x = -\infty$ ist AG gar unmöglich. Die Parabel hat demnach keine Asymptoten.

Wenn die krumme Linie keine unendlichen Abscissen zuläßt, so drucke man AT und AG durch y und andere bekannte Größen aus, setze sodann $y = +\infty$ oder $y = -\infty$, und bestimme daraus die Lage der Asymptoten. Dieses geschieht, wenn bey einer krummen Linie die Asymptote in einer endlichen Entfernung von dem Anfangspuncte der Abscissen gerechnet mit den Ordinaten parallel läuft; oder auch wenn die Ordinate des Anfangspunctes selbst schon unendlich groß und folglich eine Asymptote ist. Man findet bey dergleichen krummen Linien, die keine unendlichen Abscissen zulassen, auch sehr leicht den Abstand der Asymptote von dem Anfangspuncte, wenn man aus der gegebenen Gleichung untersuchet, was für eine Abscisse zu einer unendlichen Ordinate gehöre. Wenn die Abscissen Linie oder eine Parallele derselben eine Aspmptote seyn sollte, so gibt solches auch die Gleichung schon sehr leicht zu erkennen, wenn sie für eine unendliche (positive oder negative) Abscisse eine unendlich kleine oder auch eine endliche Ordinate zuläßt. Die krumme Linie Fig. 173. und die verschiedenen Gleichungen für dieselbe (§. 623.) können diese Fälle erläutern.

Fig. 195.

§. 696.

Bey den krummen Linien, deren Ordinaten alle aus einem Puncte gehen, wird die Subtangente BT (Fig. 195.) auf der Geraden BT gezählet, welche auf BM senkrecht steht. Die allgemeine Formel der Subtangente für die Ordinaten aus einem Puncte läßt sich auf folgende Art ableiten.

Es sey des Abscissen-Kreises Halbmesser $=$ AB $=$ BP $= c$, AP $= c\varphi$, wenn man den mit dem Halbmesser $= 1$ zwischen den Winkel ABM beschriebenen Bogen $= \varphi$ setzet, BM $= y$, Pp $= c\,d\varphi$ unendlich klein, MR ein Kreisbogen aus B beschrieben, oder welches einerley ist, MR eine auf BM und auch auf Bm senkrechte Gerade; so ist Rm $= dy$, und das Dreyeck MRm $\sim$ TBM; folglich Rm (dy : MR $=$ BM (y : BT $= \frac{y \,.\, MR}{dy}$. Es ist aber auch BP (c : BM (y $=$ Pp (cdφ : MR $= y\,d\varphi$; folglich ist die Formel für die Subtangente

$$BT = \frac{y^2\,d\varphi}{dy}, \text{ oder } BT = \frac{y^2}{dy \,.\, d\varphi^{-1}}.$$

Z. B. Bey der logistischen Spiral-Linie ist

$$y = c\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{\varphi}{2\pi}}, \quad dy = \frac{c\,d\varphi}{2\pi}\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{\varphi}{2\pi}} . L\frac{b}{c}, \text{ und}$$

$$dy \,.\, d\varphi^{-1} = \frac{c}{2\pi}\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{\varphi}{2\pi}} . L\frac{b}{c} = \frac{y}{2\pi} . L\frac{b}{c}; \text{ folglich ist die}$$

Subtangente $BT = y^2 : \frac{y}{2\pi} . L\frac{b}{c} = \frac{2\pi y}{Lb - Lc}$. Nun läßt sich auch der Winkel BMT bestimmen, welchen die logistische Spiral-Linie an jedem Orte mit der dazu gehörigen Ordinate einschließt. Denn es ist MB : BT $=$ sintot : tang BMT,

nähm-

nähmlich $y : \frac{2\pi y}{Lb - Lc} = 1 : \text{tang BMT}$, also Fig. 195.

$\text{tang BMT} = \frac{2\pi}{\text{lognat } b - \text{lognat } c}$; bey der logistischen Spiral-Linie ist demnach der erwähnte Winkel unveränderlich. Einige Meßkünstler nehmen diese Eigenschaft der logistischen Spiral-Linie zu der Erklärung derselben an.

Ferner ist für die Ordinaten aus einem Puncte die Subnormale $BN = dy \cdot d\varphi^{-1}$.

Denn $BT = \left(\frac{y^2 d\varphi}{dy} : BM\right) (y = BM (y : BN = dy \cdot d\varphi^{-1}$.

Die Normale MN ist $= (y^2 + dy^2 \cdot d\varphi^{-2})^{\frac{1}{2}}$, und die Tangente $TM = y(1 + \frac{y^2}{dy^2 \cdot d\varphi^{-2}})^{\frac{1}{2}}$ wegen der rechtwinkeligen Dreyecke TBM und MBN.

IV. Abschnitt.

Anwendung der Differenzial-Rechnung auf die Bestimmung des Krümmungs-Halbmessers der krummen Linien.

§. 697.

Unter allen krummen Linien ist die Kreis-Linie die einzige, welche an einem jeden Orte gleich stark gekrümmet ist; die Größe der Krümmung aber ist bey verschiedenen Kreisen verschieden. Daher kann man bey einer jeden anderen krummen Linie die Kreis-Linie für den Maßstab der Krümmung annehmen. Da ferner die Kreis-Linie, folglich auch die Krümmung derselben, durch die Größe des Halbmessers bestimmet ist; so ist auch die Krümmung an einem jeden Orte der krummen Linie bestimmet, wenn der Halbmesser angegeben ist, dessen Kreis-Linie eine eben so große Krümmung hat, als der Bogen der krummen Linie an dem festgesetzten Orte. Aus dieser Ursache werden diese Halbmesser die Krümmungs-Halbmesser der krummen

Fig. Linien, an dem gegebenen Orte genannt. Um sich einen Begriff zu verschaffen, wie diese Krümmungs-Halbmesser auf einander fortschreiten, und in welcher Lage die Endpuncte derselben, das heißt, die Mittelpuncte der dazu gehörigen Kreise sich befinden, kann man auf folgende Art vorgehen.

196. Es sey BC (Fig. 196.) eine krumme Linie, die Gerade AB berühre dieselbe in B; über CB sey ein biegsamer Faden gelegt, und von B bis A nach der Richtung der Tangente ausgezogen (es kann auch AB = o seyn). Nun stelle man sich vor, daß der Faden ABC von der krummen Linie BC dergestalt abgewickelt werde, daß der abgewickelte Theil immer gerade ausgezogen sey; so wird bey dieser Bewegung der Punct A eine krumme Linie AMm beschreiben, welche folgende Eigenschaften hat.

I. Nachdem die krumme Linie BC bis C abgewickelt ist, so kann ein unendlich kleiner Bogen Mm der krummen Linie AM an dem Orte M angesehen werden, als wäre er mit dem Halbmesser MC = AB + BC aus dem Mittelpuncte C beschrieben; das ist, der unendlich kleine Bogen Mm kann als ein Kreisbogen von dem Halbmesser MC angesehen werden.

II. Der abgewickelte Theil des Fadens steht an jedem Orte auf der krummen Linie AM senkrecht; nähmlich CM steht in dem Puncte M senkrecht auf der Tangente dieses Punctes, weil beym Kreise der Halbmesser im Berührungspuncte auf der Tangente senkrecht steht.

III. MC liegt demnach in der Richtung der Normale des Punctes M.

IV. Wenn man auch durch den Punct m, der unendlich nahe bey M liegt, die Normale mC zieht; so ist MC = mC, und C der Vereinigungspunct der zwey Normalen MC und mC, weil in einem Kreisbogen alle Normalen dem Halbmesser gleich sind, und sich in dem Mittelpuncte vereinigen.

V. Die krumme Linie AM hat an dem Orte M eben dieselbe Krümmung als ein Kreis von dem Halbmesser MC.

Aus

Aus dieser Ursache ist MC der Krümmungs-Halbmesser (radius curvaturae, oder radius osculi) der krummen Linie AM an dem Orte M. Fig. 196.

Die krumme Linie BC pflegt man die Evolute (die abgewickelte), und die krumme AM die Evolvente (die durch Abwickelung entstandene Linie) zu nennen.

§. 698.

Aufgabe. Eine allgemeine Formel für den Krümmungs-Halbmesser einer jeden krummen Linie von senkrechten Ordinaten zu finden.

Auflösung. Es sey AD die Abscissen-Linie der krummen Linie AM, deren Krümmungs-Halbmesser zu suchen ist, $AP = x$, $PM = y$, $AM = z$, pm unendlich nahe bey MP, MR parallel zu AD, MC und mC die Richtungen der Normalen von M und m, C ihr Vereinigungspunct, und folglich $MC = mC$ der Krümmungs-Halbmesser des unendlich kleinen Bogens Mm. Ferner sey CG parallel zu AD, $MG = u$, und der gesuchte Krümmungs-Halbmesser $MC = k$; so ist $Pp = dx = MR$, $Rm = dy$, und $Mm = dz$.

Nun kann der unendlich kleine Bogen Mm als eine gerade Linie angesehen werden, weil man ihn (er möge zum Kreise oder zu einer anderen krummen Linie gehören) von einer geraden Linie nicht unterscheiden kann. Daher ist MRm ein rechtwinkeliges Dreyeck und ähnlich dem Dreyecke MGC. In diesen beyden Dreyecken läßt sich folgende Proportion ansetzen; MR (dx; Mm (dz = MG (u : MC (k, nähmlich es ist $k = \frac{u\,dz}{dx}$. Damit diese Formel für den Krümmungs-Halbmesser bloß durch die Differenzialen von x und von y ausgedrucket werde; so müssen sowohl u als auch dz durch diese Größen bestimmet werden. Dieses kann auf folgende Art geschehen. Es ist

1) $dz^2 = dx^2 + dy^2$ nähmlich $dz = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$,

folglich $k = \frac{u(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{dx}$;

Fig. 2) ist $dk = d(MC) = mC - MC = o$, weil in dem unendlich kleinen Bogen Mm der Krümmungs-Halbmesser $MC = mC$ ist; daher ist

$$o = d\left[\frac{u(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{dx}\right] = \frac{du(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}} - u(dx^2+dy^2)^{-\frac{1}{2}}dy.ddy.}{dx}$$

Daraus folgt $u = \frac{du(dx^2+dy^2)}{-dy.ddy}$ und $k = \frac{du(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dx.dy.ddy}$;

endlich ist 3) $du = d(MG) = mg - MG = Rm = dy$. Daher ist die gesuchte Formel für den Krümmungs-Halbm.

$$k = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dx.ddy} \text{ oder } k = \frac{(1+dy^2.dx^{-2})^{\frac{3}{2}}}{-ddy.dx^{-2}}.$$

In diese gefundene Formel können wir auch die Normale $MN = n$ hineinbringen. Es ist nähmlich (§. 694. II.) die Normale $n = y(1+dy^2.dx^{-2})^{\frac{1}{2}}$; daraus folgt $(1+dy^2.dx^{-2})^{\frac{1}{2}} = \frac{n}{y}$, und $(1+dy^2.dx^{-2})^{\frac{3}{2}} = \frac{n^3}{y^3}$. Sustituiren wir diesen Werth in der gefundenen allgemeinen Formel, so ist endlich $k = \frac{n^3}{-y^3 ddy.dx^{-2}}$, allwo dx für unveränderlich angenommen ist.

§. 699.

Z. B. $y = \sqrt{(px \mp \frac{px^2}{2a})}$ ist die Gleichung für senkrechte Ordinaten der Ellipse und Hyperbel von dem Scheitel der ersten Achse gezählet, allwo das obere Zeichen (—) zur Ellipse und das untere (+) zur Hyperbel gehöret. Eben diese Gleichung stellet uns die Parabel vor, wenn wir $2a = \infty$ setzen. Auch der Kreis wird durch diese Gleichung ausgedrucket, wenn man $p = 2a$ setzet, und das obere Zeichen beybehält. Nun folgt aus dieser Gleichung

$dy =$

Fig. 196.

$dy = (\frac{1}{2}p \mp \frac{px}{2a})\, dx\, (px \mp \frac{px^2}{2a})^{-\frac{1}{2}}$

$ddy = -\frac{1}{4}p^2\, dx^2 \times (px \mp \frac{px^2}{2a})^{-\frac{3}{2}}$, und

$-y^3\, ddy \,.\, dx^{-2} = -(px \mp \frac{px^2}{2a})^{\frac{3}{2}} \times$

$-\frac{1}{4}p^2\, dx^2 (px \mp \frac{px^2}{2a})^{-\frac{3}{2}} \,.\, dx^{-2} = \frac{1}{4}p^2$. Folglich iſt (wenn wir in der allgemeinen Formel $k = \frac{n^3}{-y^3\, ddy \,.\, dx^{-2}}$ dieſen Werth ſubſtituiren) der Krümmungs-Halbmeſſer $k = \frac{n^3}{\frac{1}{4}p^2}$.

Nähmlich in allen vier Kegelſchnitts-Linien (weil a in der gefundenen Gleichung ſich nicht mehr befindet) iſt der Krümmungs-Halbmeſſer an jedem Orte gleich dem Würfel der Normale dieſes Ortes getheilet durch das Quadrat des halben Parameters. Bey dem Kreiſe iſt allenthalben die Normale $n = a$, und $p = 2a$, folglich $k = \frac{a^3}{a^2} = a =$ dem Halbmeſſer, welches für ſich klar iſt.

Bey der Parabel, Ellipſe, und Hyperbel iſt an dem Scheitel der Achſe die Normale $n = \frac{1}{2}p$, welches ſich aus der allgemeinen Formel für die Normale $n = (y^2 + y^2 . dy^2\, dx^{-2})^{\frac{1}{2}}$ gar leicht beſtimmen läßt, wenn man darin für y^2 und dy^2 ihre Werthe ſubſtituiret, und ſodann $x = 0$ ſetzet. Es iſt demnach an den Scheiteln dieſer drey Kegelſchnitts-Linien der Krümmungs-Halbmeſſer $k = \frac{\frac{1}{8}p^3}{\frac{1}{4}p^2} = \frac{1}{2}p$. Da die Gleichung für ſenkrechte Ordinaten der Ellipſe von dem Scheitel der kleinen Achſe gezählet, auch durch $y = \sqrt{(px - \frac{px^2}{2a})}$ vorgeſtellet wird, wenn $2a$ die kleine Achſe und p ihren Parameter

rameter bedeutet; so ist bey der Ellipse auch an dem Scheitel
Fig. der kleinen Achse der Krümmungs-Halbmesser dem halben Parameter dieser Achse gleich.

Anmerkung. Wenn man voraus setzet, daß unsere Erde ein abgeplattetes Sphäroid, oder besser ein Ellipsoid durch die Umdrehung der halben elliptischen Fläche um die
178. kleine Achse sey; so läßt sich für einen jeden Punct auf der Oberfläche der Erde der dazu gehörige Krümmungs-Halbmesser auf folgende Art bestimmen. Es sey (Fig. 178.) GH die Normale für den Punct G, und CK sey parallel zu GH; so ist der Winkel $GCA = CGL = b$ die wahre Breite des Punctes G, der Winkel $KCA = GHA = B$ aber die wahre Polhöhe oder die scheinbare Breite eben desselben Punctes. Man setze ferner die große Achse AB, nähmlich den Durchmesser des Aequators $= A$, die kleine Achse DE nähmlich die Umdrehungsachse der Erde $= a$, $LG = CI = x$, $GI = LC = y$; so ist $y = \frac{a}{A}\sqrt{(\frac{1}{4}A^2 - x^2)}$. In dem Dreyecke $CGL = CGI$ ist auch $y = x \operatorname{tang} b$; folglich ist $x \operatorname{tang} b = \frac{a}{A}\sqrt{(\frac{1}{4}A^2 - x^2)}$ und

$$x = \frac{\frac{1}{2}aA}{\sqrt{(a^2 + A^2 \operatorname{tang}^2 b)}}.$$

Aus den Eigenschaften der Ellipse ist die Subnormale $HI = \frac{a^2}{A^2}x$. Es ist aber auch in dem rechtwinkeligen Dreyecke HGI, $HI = \frac{y}{\operatorname{tang} B} = \frac{x \operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} B}$; folglich ist $\frac{a^2}{A^2}x = \frac{x \operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} B}$, und $\operatorname{tang} b = \frac{a^2}{A^2} \operatorname{tang} B$ eine Gleichung, wodurch man aus der scheinbaren Breite die wahre, und umgekehrt berechnen kann. Auch kann man mittelst dieser Gleichung den Ablenkungswinkel ($HGC = AHG - ACG$) der Normale von dem Halbmesser, oder den Unterschied GCK zwischen der wahren ACG und zwischen der scheinbaren Breite ACK für jede gegebene wahre oder scheinbare Breite berechnen.

Die

Die Normale GH läßt sich nun auch sehr leicht be- Fig.
stimmen. Es ist nähmlich 178.

$$GH^2 = GI^2 + HI^2 = \frac{\frac{1}{4}a^2A^2\text{tang}^2b + \frac{a^4}{A^4}\cdot\frac{1}{4}a^2A^2}{a^2 + A^2\cdot\text{tang}^2b}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}a^2A^2\cdot\frac{a^4}{A^4}\text{tang}^2B + \frac{a^4}{A^4}\cdot\frac{1}{4}a^2A^2}{a^2 + A^2\cdot\frac{a^4}{A^4}\cdot\text{tang}^2B} = \frac{\frac{1}{4}\frac{a^4}{A^2}\sec^2B\cdot\cos^2B}{\cos^2B + \frac{a^2}{A^2}\sin^2B}$$

$$\text{und } GH = \frac{\frac{1}{2}a}{\sqrt{(\sin^2B + \frac{A^2}{a^2}\cdot\cos^2B)}}.$$

Endlich ist der halbe Parameter $= \frac{a^2}{2A}$ folglich ist für den Punct G in der wahren Polhöhe B der Krümmungs-

$$\text{Halbmesser } k = \frac{A^2}{2a(\sin^2B + \frac{A^2}{a^2}\cos^2B)^{\frac{3}{2}}}.$$

In eben dieser Voraussetzung, daß unsere Erde ein abgeplattetes Ellipsoid sey, läßt sich das Abplattungs-Verhältniß $\frac{A}{a} = \alpha$ aus den gemessenen Längen zweyer Meridian-Grade M, N in sehr verschiedenen scheinbaren Breiten m, n (m in der Mitte von M nahe am Aequator, und n in der Mitte von N so nahe als möglich am Pole) sehr leicht herleiten.

Denn es ist $M = \text{arc } 1^\circ . k$, und $N = \text{arc } 1^\circ . k'$;

$$\text{nähmlich } M = \frac{\alpha^2 . a . \text{arc } 1^\circ}{2(\sin^2m + \alpha^2\cos^2m)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{und } N = \frac{\alpha^2 a . \text{arc } 1^\circ}{2(\sin^2n + \alpha^2\cos^2n)^{\frac{3}{2}}}.$$

Wenn man ferner diese zwey Gleichungen durch einander dividiret, und gehörig reduciret; so ist endlich

$\alpha =$

Fig. 196.
$$\alpha = V\left(\frac{N^{\frac{2}{3}}.\sin^2 n - M^{\frac{2}{3}}.\sin^2 m}{M^{\frac{2}{3}}\cos^2 m - N^{\frac{2}{3}}\cos^2 n}\right).$$

Nach den letzteren neuen französischen Bestimmungen ist das Abplattungs-Verhältniß unserer Erde $\alpha = \frac{334}{333}$, und der Durchmesser des Aequators $A = 12751482$ Métres, die Umdrehungsachse aber $a = 12713304$ Métres festgesetzet worden.

§. 700.

Die gefundene allgemeine Formel für den Krümmungs-Halbmesser $k = \frac{(1 + dy^2 . dx^{-2})^{\frac{3}{2}}}{-ddy . dx^{-2}}$ ist bloß durch die Differenzialen von x und y ausgedrucket, die man jederzeit finden kann, sobald die Gleichung für die krumme Linie gegeben ist. Wenn man für denjenigen Ort der krummen Linie, dessen Krümmungs-Halbmesser gesucht wird, die Normale n (nach §. 694. II.) bestimmet; so läßt sich daraus eine allgemeine Formel für den Krümmungs-Halbmesser k angeben, die keine zweyten Differenzialen enthält. Es ist nähmlich, wenn man des Punctes M Normale $MN = n$ setzet, der Krümmungs-Halbmesser $k = \frac{n^2}{n - ydn . dy^{-1}}$.

Denn es ist MP (y : MN (n = MG (u : MC (k, nähmlich $k = \frac{un}{y}$. A. Nun ist $dk = \frac{uydn + nydu - nudy}{y^2} = 0$;

folglich ist $u = \frac{nydu}{ndy - ydn}$, oder $u = \frac{nydy}{ndy - ydn}$, weil $du = d(MG) = mg - MG = Rm = dy$ seyn muß. Es ist also auch, wenn wir diesen Werth in der Gleichung A statt u substituiren, $k = \frac{n^2 dy}{ndy - ydn} = \frac{n^2}{n - ydn . dy^{-1}}$.

Z. B. in der Parabel entspricht der Abscisse x die Normale $n = (\frac{1}{4}p^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ durch y ausgedrucket; also ist

dn

$dn = \frac{ydy}{(\frac{1}{4}p^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{ydy}{n}$, und $ydn.dy^{-1} = \frac{y^2}{n}$; folglich Fig. 196.

$k = \frac{n^3}{n^2-y^2} = \frac{n^3}{(\frac{1}{4}p^2+y^2)-y^2} = \frac{n^3}{\frac{1}{4}p^2}$ wie zuvor. Um k in x auszudrucken subſtituire man ſtatt n ſeinen Werth durch x ausgedruckt, nähmlich $n^3 = (\frac{1}{4}p^2+px)^{\frac{3}{2}}$. Es iſt ſodann $k = \frac{(\frac{1}{4}p^2+px)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{4}p^2}$. Man ſetze $x = 0$, ſo iſt $k = \frac{1}{2}p$; ſetzet man aber $x = \frac{3}{4}p$, ſo iſt $k = 4p$. Um zu erforſchen, an welchem Orte der Krümmungs-Halbmeſſer $= \frac{27}{2}p$ ſey, ſetze man $\frac{(\frac{1}{4}p^2+px)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{4}p^2} = \frac{27}{2}p$, und man wird aus dieſer Gleichung die zugehörige Abſciſſe $x = 2p$ finden.

Es iſt $n = (y^2+y^2\,dy^2.dx^{-2})^{\frac{1}{2}}$, und

$dn = (ydy+ydy^3\,dx^{-2}+y^2\,dyddy\,dx^{-2} -$

$y^2\,dy^2\,dx^{-3}ddx)(y^2+y^2\,dy^2.dx^{-2})^{-\frac{1}{2}}$, wenn kein Differenziale für unveränderlich angeſehen wird. Folglich iſt auch, wenn man in der Gleichung $k = \frac{n^2}{n-ydn.dy^{-1}}$ gehörig ſubſtituiret, $k = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyddx-dxddy}$.

Setzen wir den veränderlichen Winkel $mMR = q$ und $\text{tang}\,q = p$; ſo iſt $p = \frac{dy}{dx}$, $(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}$

$= dx^3(1+p^2)^{\frac{3}{2}}$, $dp = \frac{dxddy-dyddx}{dx^2}$;

folglich iſt $k = -\frac{dx(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{dp} = -\frac{ds(1+p^2)}{dp}$, wenn der Bogen $AM = s$ geſetzet wird. Nimmt man aber dx für unveränderlich an; ſo iſt

Fig.

$$k = \frac{dx^2\,(1+dy^2dx^{-2})^{\frac{3}{2}}}{-ddy} = \frac{(1+dy^2dx^{-2})^{\frac{3}{2}}}{-ddy.dx^{-2}}$$

eben so wie im §. 698.

Wir wollen nach dieser Formel einige Krümmungs-Halbmesser bestimmen. Nähmlich

1) Aus der Gleichung für die Logistik

$y = ch^{\frac{x}{a}}$, folgt $dy = a^{-1}ch^{\frac{x}{a}}dx$, und $dy^2.dx^{-2} = a^{-2}c^2h^{\frac{2x}{a}}$,

$ddy = a^{-2}ch^{\frac{x}{a}}dx^2$, und $-ddy.dx^{-2} = -a^{-2}ch^{\frac{x}{a}}$;

daher ist für die Abscisse x der Krümmungs-Halbmesser

$$k = -\frac{(1+a^{-2}c^2h^{\frac{2x}{a}})^{\frac{3}{2}}}{a^{-2}ch^{\frac{x}{a}}} = -\frac{(a^2+c^2h^{\frac{2x}{a}})^{\frac{3}{2}}}{ach^{\frac{x}{a}}}$$

, oder auch

$k = -\frac{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{ay}$. Das Zeichen — zeiget an, daß der Krümmungs-Halbmesser sich nicht von der krummen Linie nach der Gegend der Abscisse, sondern nach der entgegen gesetzten Seite erstrecket, und daß folglich in diesem Falle die krumme Linie ihre erhabene (convexe), und nicht ihre hohle (concave) Seite der Abscissen-Linie zeiget.

2) Aus der Gleichung für die gleichseitige Hyperbel an der Asymptote $y = a^2x^{-1}$ folgt $dy = -a^2x^{-2}dx$, $dy^2.dx^{-2} = +a^4x^{-4}$ und $ddy = +2a^2x^{-3}dx^2$, $-ddy.dx^{-2} = -2a^2x^{-3}$. Es ist demnach für die Abscisse x der Krümmungs-Halbmesser

$$k = \frac{(1+a^4x^{-4})^{\frac{3}{2}}}{-2a^2x^{-3}} = -\frac{(a^4+x^4)^{\frac{3}{2}}}{2a^2x^3}.$$ Setzen wir nun $x = 1000a$, und $a = 1$ Duodecimal-Zolle, so ist bey einer solchen Hyperbel in der Entfernung von $13\frac{8}{9}$ Klaftern auf der Asymptote von dem Anfangspuncte gezählet der Krümmungs-Halbmesser schon größer als der ganze Durchmesser unserer Erdkugel. Es ist nähmlich in diesem Falle der Krümmungs-Halbmesser

=

$= \frac{(1+1000^4)^{\frac{3}{4}}}{2.1000^3} = \frac{(1000^4)^{\frac{3}{4}}}{2.1000^3} = \frac{1}{2}.\ 1000^3 = 500$ Fig.

Millionen Zollen mehr einem Bruche des Zolles, welchen man findet, wenn man bey $(1+1000^4)^{\frac{3}{4}}$ die Einheit nicht hinweg läßt. Dieser Bruch aber ist schon so klein, daß man ihn auf einem gewöhnlichen Maßstabe nicht mehr angeben kann; es beträgt nähmlich dieser Bruch nur $\frac{75}{100000}$ eines Zolles. Da im gegenwärtigen Falle bey 500 Millionen Zollen sich ein Fehler einschleicht, der nur $\frac{75}{100000}$ eines Zolles beträgt, da man doch einen ganzen Zoll in Hinsicht auf 1000^4 hinweggelassen hat; wie groß würde wohl der Fehler seyn, wenn man nicht einen ganzen Zoll, sondern nur einen unendlich kleinen Theil eines Zolles in Hinsicht auf 1000^4 für 0 angesehen hätte? Könnte man wohl in einem solchen Falle an der schärfesten Richtigkeit des Resultates noch zweifeln? Es ist kaum möglich zu glauben, daß es wirklich so abstracte Meßkünstler geben sollte, die im Ernste zu behaupten scheinen, die geometrische Schärfe (rigor geometricus) wird vernachlässiget, für die Anwendung sind Fehler zu befürchten, wenn man einen unendlich kleinen Theil eines Bogens (dessen Krümmungs-Halbmesser den ganzen Durchmesser unserer Erdkugel übertrifft) für eine gerade Linie, oder im erforderlichen Falle für einen Kreisbogen ansieht; oder welches auf eines hinausläuft, wenn man eine unendlich kleine Größe hinwegläßt, die zu einer endlichen zu addiren oder davon abzuziehen ist.

3) Aus der Differenzial-Gleichung der Cycloide

$dy = dx(2ax^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}}$ (vermöge §. 693.) folgt

$dy^2.dx^{-2} = 2ax^{-1} - 1$, $ddy = -ax^{-2}dx^2(2ax^{-1}-1)^{-\frac{1}{2}}$,

und $-ddy.dx^{-2} = +ax^{-2}(2ax^{-1}-1)^{-\frac{1}{2}}$. Folglich ist

$k =$

Fig. 197. $k = \frac{(2ax^{-1})^{\frac{3}{2}}}{ax^{-2}(2ax^{-1}-1)^{-\frac{1}{2}}} = 2\sqrt{[2a(2a-x)]}$, nähmlich bey der Cycloide Fig. 197. ist in dem Puncte M der Krümmungs-Halbmesser $MM' = 2\sqrt{(AB.BP)} = 2\sqrt{(BQ^2)} = 2BQ$, und läuft zugleich parallel mit QB, weil $AB:BQ = BQ:BP$ statt findet, und (vermöge §. 693.) MT mit AQ parallel läuft. Setzen wir nun $x = 0$, so ist des Punctes A Krümmungs-Halbmesser $k = 4a = 2AB = AD'$; also D' ein Punct in der Evolute A' M' D' der Cycloide AMA'. Setzen wir $x = 2a$, so ist $k = 0$; also A' ein gemeinschaftlicher Punct der Cycloide AMA' und ihrer Evolute A'M'D'. Es sey $A'B' = BD' = AB$ senkrecht auf A'D in dem Puncte A', und darauf der Halbkreis $A'Q'B' = AQB$ beschrieben; man ziehe die Sehne A'Q' parallel zu MM' oder BQ, und durch M', Q' die Gerade P'M'; so ist der Winkel Q' A'C = CBQ, und auch arc A'Q' = arc BQ (§. 371.), also auch die Sehne A'Q' = BQ. Es ist aber (vermöge §. 386.) BQ = MC = CM', also A'Q' = CM', und A'C gleich und parallel zu M'Q' (§. 386.); folglich ist P'M' senkrecht auf A'B'. Nun ist A'C = arcBQ = arcA'Q', weil MQ oder BC = arc AQ, und A'B = arc AQB ist (§. 673.); folglich ist auch A'C = arc A'Q', oder Q'M' = arc A'Q'. Die Evolute A'M'D' der Cycloide AMA' ist demnach selbst eine Cycloide von eben demselben Erzeugungskreise. Wenn man also zwischen zwey cycloidischen Bogen ein Pendel D'T (einen Senkel) so schwingen läßt, wie es beynahe Fig. 197. ausweiset; so wird derjenige Punct A des Pendels, welcher von dem Aufhängungspuncte D' um den doppelten Durchmesser des Erzeugungskreises A'B' oder ED entfernt ist, während der Schwingung eine Cycloide beschreiben. Da AD' = dem Bogen A'M'D' = 2 A'B' ist, so ist die Länge der halben Cycloide dem doppelten Durchmesser des Erzeugungskreises gleich; und jeder Bogen A'M' ist = MM' = 2A'Q'; die Cycloide läßt sich demnach genau rectificiren.

An-

Anmerkung. Aus der gegebenen Gleichung der Evolvente AM (Fig. 196.) läßt sich die Gleichung für die Evolute BC auf folgende Art bestimmen. Es sey AD die Abscissen=Linie der Evolvente, $AP = x$, $PM = y$, und das bekannte Stück AB der Abscissen=Linie AD, nähmlich der Krümmungs=Halbmesser des Punctes A sey $AB = b$; BQ durch B auf AD senkrecht gezogen sey die Abscissen=Linie der Evolute, B der Anfangspunct der Abscissen, die Abscisse $BQ = t$, und die senkrechte Ordinate $CQ = u$. Nun findet in den ähnlichen Dreyecken MRm und MGC folgende Proportion statt; $Mm : MR = MC : MG$, nähmlich Fig. 196.

$$(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} : dx = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dx\,ddy} : MG = \frac{(dx^2+dy^2)}{-ddy};$$

folglich ist $BQ = MG - PM = \frac{(dx^2+dy^2)}{-ddy} - y = t.$

Ferner ist $MR : Rm = MG : CG$, nähmlich $dx : dy = \frac{(dx^2+dy^2)}{-ddy} : CG = \frac{dy(dx^2+dy^2)}{-dx\,ddy}$. Folglich ist

$$CQ = AP + CG - AB = x + \frac{dy(dx^2+dy^2)}{-dx\,ddy} - b = u;$$

$$\text{oder } t = \left(\frac{1 + dy^2 \cdot dx^{-2}}{-ddy \cdot dx^{-2}}\right) - y,$$

$$\text{und } u = x + \left(\frac{dy \cdot dx^{-1} + dy^3 \cdot dx^{-3}}{-ddy \cdot dx^{-2}}\right) - b.$$

Wenn man nun in diesen zwey Formeln für b, für y, für dy, dy^2, dy^3, und für ddy aus der gegebenen Gleichung der Evolvente die gehörige Werthe substituiret, und sodann aus diesen zwey Gleichungen x hinwegschaffet; so wird man endlich die gesuchte Gleichung für die Evolute durch t, durch u, und durch andere unveränderliche Größen ausgedruckt erhalten.

Es sey z. B. AM eine gemeine Parabel auf der Achse AD, so ist $y = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, $dy = \frac{1}{2} p^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx$, $dy^2 = \frac{1}{4} p x^{-1} dx^2$, $dy^3 = \frac{1}{8} p^{\frac{3}{2}} x^{-\frac{3}{2}} dx^3$, $ddy = -\frac{1}{4} p^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} dx^2$, und vermöge des

Vor-

Fig. 196. Vorhergehende $AB = b = \frac{1}{2}p$; folglich $t = \frac{1 + \frac{1}{4}px^{-1}}{\frac{1}{4}p^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}}^{\frac{1}{2}} - px^{\frac{1}{2}}$

$= 4p^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$, und $u = x + \frac{\frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}p^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{3}{2}}}{\frac{1}{4}p^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2}p = 3x.$

Schafft man nun aus diesen zwey Gleichungen ($t = 4p^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$ und $u = 3x$) die Größe x hinweg, so ist endlich $u^3 = \frac{27}{16}pt^2$, die gesuchte Gleichung für die Evolute der gemeinen Parabel. Diese Gleichung zeigt uns an, daß die Evolute der gemeinen Parabel eine cubische Parabel sey, deren Parameter $= \frac{27}{16}p$ ist. Da diese Lehre von der Evolution auf die ausübende Mathematik keinen beträchtlichen Einfluß hat, so können wir uns auch nicht länger dabey aufhalten.

§. 701.

195. Auch bey den krummen Linien, deren Ordinaten aus einem Puncte gehen, läßt sich eine allgemeine Formel für den Krümmungs-Halbmesser MC angeben (Fig. 195). Es ist nähmlich, wenn man den Halbmesser des Abscissen-Kreises $AB = c$, den mit dem Halbmesser $= 1$ zwischen dem Winkel ABM beschriebenen Bogen φ, $AP = \varphi$, $BM = y$ $MC = k$ setzet, der Krümmung-Halbmesser $k =$

$$\frac{(y^2 + dy^2 . d\varphi^{-2})^{\frac{3}{2}}}{y^2 + 2dy^2 . d\varphi^{-2} - yddy . d\varphi^{-2}}.$$

Denn es sey Bm unendlich nahe bey BM; aus B sey mit dem Halbmesser BM der unendlich kleine Kreisbogen MR gezogen, den man für eine gerade Linie ansehen kann, die sowohl auf BM als auf Bm senkrecht steht; C sey der Vereinigungspunct der zwey unendlich nahe bey einander liegenden Normalen, und folglich MC der Krümmungs-Halbmesser an dem Orte M. Aus C sey eine Senkrechte CG auf BM geführet, so wird CG auch auf Bm senkrecht stehen, weil der Winkel GBg unendlich klein ist. Ueber dieses sey der Bogen $AM = z$, und die Gerade $MG = u$.

Ver-

Vermöge dieser Benennung ist $Pp = cd\varphi$ und $MR = yd\varphi$. Da nun das Dreyeck MRm ∽ CGM ist; so folgt daraus $MR (yd\varphi : Mm (dz = MG (u : MC (k$ nähml. $k = uy^{-1} dzd\varphi^{-1}$. Die Größen u und dz können auf folgende Art daraus hinweg geschaffet werden. Fig. 195.

1) In eben diesen beyden Dreyecken MRm und CGM ist $MR (yd\varphi : Rm (dy = MG (u$: CG, nähmlich $CG = uy^{-1} dyd\varphi^{-1}$ und $d(CG) = -(y^{-1} dudyd\varphi^{-1} - uy^{-2} dy^2 d\varphi^{-1} + uy^{-1} ddyd\varphi^{-1}) = Gg$, (das Differenziale von CG muß negativ genommen werden, weil CG eine abnehmende Größe ist, wegen §. 686. Anmerk.). Es ist also $Gg = uy^{-2} dy^2 d\varphi^{-1} - y^{-1} dudyd\varphi^{-1} - uy^{-1} ddyd\varphi^{-1}$.

2) Weil Pp ein unendlich kleiner Bogen ist, so kann man ihn als eine gerade Linie ansehen, und BGg, BPp als ähnliche Dreyecke betrachten; daher ist $BP (c : BG (y - u) = Pp (cd\varphi : Gg$ nähmlich $Gg = (y - u) d\varphi$.

3) Aus 1) und 2) folgt $(y - u) d\varphi = uy^{-2} dy^2 d\varphi^{-1} - y^{-1} dudyd\varphi^{-1} - uy^{-1} ddyd\varphi^{-1}$. Aus dieser Gleichung kann man du bestimmen. Es ist nähmlich

$$du = \frac{udy^2 - uyddy - y^3 d\varphi^2 + uy^2 d\varphi^2}{ydy}.$$

4) Da $k = MC$ ungeändert bleibt, wenn AP nur um das Differenziale Pp wächst; so ist $dk = d (uy^{-1} dzd\varphi^{-1}) = y^{-1} dudzd\varphi^{-1} - uy^{-2} dydzd\varphi^{-1} + uy^{-1} ddzd\varphi^{-1} = 0$.

Daraus folgt wieder $du = \frac{udydz - uyddz}{ydz}$.

5) Wenn wir die in 3) und 4) enthaltenen Ausdrücke für du mit einander vergleichen, so ist

$$\frac{udydz - uyddz}{ydz} = \frac{udy^2 - uyddy - y^3 d\varphi^2 + uy^2 d\varphi^2}{ydy}.$$

Daraus folgt $u = \frac{y^3 d\varphi^2 dz}{yd\varphi^2 dz + dyddz - dzddy}$.

6) Diesen Werth substituire man in der oberen Formel für den Krümmungs-Halbmesser $k = uy^{-1} dzd\varphi^{-1}$; so ist

$$k = \frac{yd\varphi dz^2}{yd\varphi^2 dz + dyddz - dzddy}.$$

7)

Fig. 195. 7) Endlich muß noch in dieser letzten Formel dz, dz^2 und ddz hinweggeschaffet werden. Es ist nähmlich $dz^2 = MR^2 + Rm^2 = y^2 d\varphi^2 + dy^2$; $dz = (y^2 d\varphi^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$ und

$$ddz = \frac{y dy d\varphi^2 + dy ddy}{(y^2 d\varphi^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Wenn man diese Werthe gehörig substituiret, so erhält man die gesuchte allgemeine Formel für den Krümmungs-Halbmesser

$$k = \frac{(y^2 d\varphi^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{y^2 d\varphi^3 + 2 d\varphi dy^2 - y d\varphi ddy},$$ oder auch

$$k = \frac{(y^2 + dy^2 d\varphi^{-2})^{\frac{3}{2}}}{y^2 + 2 dy^2 d\varphi^{-2} - y ddy d\varphi^{-2}}.$$

Anmerkung. In Fig. 195. liegt G zwischen B und M; fällt aber G auf die Verlängerung von MB über B herüber, so ist in der Gleichung 1) das Differenziale von CG positiv nähmlich $Gg = +(y^{-1} du dy d\varphi^{-1} - u y^{-2} dy^2 d\varphi^{-1} + u y^{-1} ddy d\varphi^{-1})$; hingegen ist in einem solchen Falle auch in 2) $Gg = (u - y) d\varphi$. Daraus folgt ebenfalls

$$du = \frac{u dy^2 - u y ddy - y^3 d\varphi^2 + u y^2 d\varphi^2}{y dy}.$$

Aus der Gleichung für die archimedische Spiral-Linie $y = \frac{c\varphi}{2\pi}$ folgt $dy = \frac{c d\varphi}{2\pi}$, und $ddy = 0$; folglich ist der Krümmungs-Halbmesser $k = (y^2 + \frac{c^2}{4\pi^2})^{\frac{3}{2}} : (y^2 + \frac{2c^2}{4\pi^2})$

$$= \frac{(4\pi^2 y^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi(4\pi^2 y^2 + 2c^2)}.$$ Setzet man $y = 0$, so ist $k = \frac{c}{4\pi}$; setzet man aber $y = c$, so ist $k = \frac{c(4\pi^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{8\pi^3 + 4\pi}$. Es verhält sich demnach bey der archimedischen Spiral-Linie der Krümmungs-Halbmesser beym Anfange der Spirale zum Krümmungs-Halbmesser am Ende des ersten Schraubenganges

$= \frac{c(4\pi^2+1)^{\frac{3}{2}}}{4\pi} : \frac{}{8\pi^3+4\pi} = 2\pi^2+1 : \sqrt{(4\pi^2+1)^3}$. Es verhalten sich aber die Krümmungen bey einer jeden krummen Linie an verschiedenen Orten gegen einander wie umgekehrt die dazu gehörigen Krümmungs-Halbmesser. Folglich verhält sich bey der archimedischen Spiral-Linie die Krümmung im Anfangspuncte, zur Krümmung am Endpuncte des ersten Schraubenganges $= \sqrt{(4\pi^2+1)^3} : (2\pi^2+1)$. Man setze statt Fig.

y seinen Werth, so ist $k = \frac{c(\varphi^2+1)^{\frac{3}{2}}}{2\pi(\varphi+2)}$ durch die Abscisse ausgedrucket.

Anmerkung. Wenn man in Fig. 195. $PM = y$ setzet, so ist $BM = y+c$, und folglich für diesen Fall der Krümmungs- 195.

Halbmesser $k = \frac{[(y+c)^2 + dy^2\, d\varphi^{-2}]^{\frac{3}{2}}}{(y+c)^2 + 2dy^2\, d\varphi^{-2} - (y+c)ddy\, d\varphi^{-2}}$.

Nun setze man $c = \infty$, so wird AP in eine gerade Abscissen-Linie und φ in $c^{-1}x$ übergehen, die senkrechten Ordinaten werden mit einander parallel laufen, und der Krümmungshalbm. wird sich in

$k = \frac{(c^2 + c^2\, dy^2\, dx^{-2})^{\frac{3}{2}}}{c^2 + 2c^2 dy^2 . dx^{-2} - c^3 ddy\, dx^{-2}} = \frac{(1 + dy^2 dx^{-2})^{\frac{3}{2}}}{-ddy . dx^{-2}}$

verwandeln, welches mit (698.) vollkommen übereinstimmet.

Ich muß noch allhier erinnern, daß die allgemeine Formel des Krümmungs-Halbmessers für die Ordinaten aus einem Puncte in mehreren Abhandlungen über die Differenzial-Rechnung fehlerhaft ist. Z. B. L'Abbé Sauri cours complet de Mathem. Paris 1778. pag. 176; C. Scherffer Calcul. Diff. Viennae 1771. pag. 98, und mehr andere lateinische und französische Schriftsteller bestimmen für die Ordinaten aus einem Puncte und für $x = c\varphi$ den Krümmungs-Halbmesser $k = \frac{y(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^3 + dxdy^2 - ydxddy}$, allwo die Ordinate gleich dem Halbmesser des Abscissen-Kreises nähmlich $y = c$, und dabey dx unveränderlich gesetzt ist. Es muß

Fig. aber in einem solchen Falle, wenn man in unserer aus richtigen Gründen abgeleiteten Formel zuerst $c^{-1}\,dx$ statt $d\Phi$,

dann y statt c substituiret, $k = \frac{y(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^3+2dxdy^2-ydxddy}$

seyn. Aus dieser Ursache hat L'Abbé Sauri pag. 188. die Aufgabe 109 gänzlich irrig aufgelöset. Der Fehler hat seinen Ursprung in der falschen Voraussetzung, vermöge welcher in diesen Schriften bey einem jeden Puncte einer solchen krummen Linie die Ordinate dem Halbmesser des Abscissen-Kreises gleich gesetzet wird.

V. Abschnitt.

Anwendung der Differenzial-Rechnung auf die Bestimmung der größten und kleinsten Werthe der Functionen, und des Werthes $\frac{0}{0}$.

I. Von dem größten und kleinsten Werthe der Functionen (de Maximis et Minimis).

§. 702.

Wenn eine Function von x so beschaffen ist, daß sie bis auf einen gewissen endlichen Werth zunimmt und von da wieder abnimmt, indem x beständig zunimmt oder beständig abnimmt; so heißt dieser Werth derselben ein Größtes. Z. B. $10x - x^2 + 2$ ist eine solche Function, die ein Größtes hat. Denn setzet man statt x nach der Ordnung die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; so erhält man die entsprechenden Werthe der Function 2, 11, 18, 23, 26, 27, 26, 23, 18, 11, 2. Daraus sieht man, daß diese Function nur bis auf den Werth 27 zunimmt, und von da wieder abnimmt, indem x beständig wächst. Es ist also 27 der größte Werth dieser Function. Der Werth der veränderlichen Größe x aber ist in diesem Falle $= 5$, der statt x gesetzt das größte Resultat zum Vorschein bringt. Nimmt hingegen eine Function von x

bis

bis auf einen gewissen endlichen Werth ab und von da wieder zu, Fig.
indem x beständig wächst oder beständig abnimmt; so heißt die-
ser ihr Werth ein Kleinstes. Z. B. $x^2 - 8x + 18$ ist eine
Function, die ein Kleinstes hat. Denn setzet man nach der Ord-
nung statt x die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; so erhält man die
entsprechenden Werthe der Function 18, 11, 6, 3, 2, 3, 6, 11.
Aus diesen sieht man, daß die Function bis auf den Werth 2 ab-
nimmt und von da wieder zu wachsen anfängt, indem x be-
ständig zunimmt.

§. 703.

Es ist allerdings daran gelegen sich eine leichte Methode bekannt zu machen, nach der man bey einer gegebenen Function von x denjenigen Werth der veränderlichen Größe x bestimmen kann, der statt x in die Function gesetzt das größte oder das kleinste Resultat zum Vorschein bringt, wenn die gegebene Function eines Größten oder eines Kleinsten fähig ist. Dieses geschieht auf folgende Art.

Man differenzire die gegebene Function, bringe alle Glieder dieses Differenzials, wenn sie Brüche sind, auf einen gemeinschaftlichen Nenner, setze sodann entweder den Zähler oder den Nenner dieses Differenzials $= 0$, und bestimme aus dieser Gleichung den Werth von x; so wird dieser gefundene Werth in der gegebenen Function statt x gesetzt das größte oder das kleinste Resultat zum Vorschein bringen, wenn die gegebene Function eines Größten oder eines Kleinsten fähig ist. Wenn weder aus dem Zähler noch auch aus dem Nenner des Differenzials von der gegebenen Function, nachdem man jeden besonders $= 0$ gesetzet hat, ein wirklicher oder möglicher Werth für x sich bestimmen läßt, nähmlich wenn jede dieser zwey Gleichungen auf etwas ungereimtes führet; so ist dieses ein Zeichen, daß die gegebene Function keines Größten oder Kleinsten fähig ist. Ob der gefundene Werth von x in der gegebenen Function statt x gesetzt ein größtes oder ein kleinstes Resultat zum Vorschein bringe, läßt sich auf folgende

Fig. Art sehr leicht entscheiden (wenn dieses nicht schon im Voraus aus der Eigenschaft der gegebenen Function bekannt seyn sollte). Es sey der gefundene Werth von $x = a$, man setze in der gegebenen Function diesen Werth a statt x; das aus dieser Substitution abgeleitete Resultat sey $= R$. Ferner setze man in eben derselben Function $a + e$ statt x, allwo e eine beliebige sehr kleine positive oder negative Größe bedeutet; dieses zweyte Resultat sey $= R'$. Ist nun $R' < R$ man möge e für positiv oder für negativ ansehen, so ist R ein Größtes; ist aber im Gegentheile $R' > R$ man möge e für positiv oder für negativ ansehen, so ist R ein Kleinstes; nähmlich der gefundene Werth a in der gegebenen Function statt x gesetzet gibt im ersten Falle ein Größtes und im zweyten ein Kleinstes.

Z. B. Aus der oben angeführten Function $10x - x^2 + 2$ folgt $d(10x - x^2 + 2) = 10dx - 2xdx$. Um nun denjenigen Werth von x zu finden, der ein Größtes oder ein Kleinstes gibt, setze man $10dx - 2xdx = 0$; so ist auch $10dx = 2xdx$, $10 = 2x$, und $x = 5$. Dieser Werth 5 statt x in die Function gesetzt gibt $50 - 25 + 2 = 27 = R$. In eben derselben Function setze man $5 + e$ statt x, so ist $10(5 + e) - (5 + e)^2 + 2 = 27 - e^2 = R'$. Nun ist $R' < R$, nähmlich $27 - e^2 < 27$, es möge e eine positive oder eine negative noch so kleine endliche Größe bedeuten; folglich ist 27 das größte Resultat der gegebenen Function; und es muß $x = 5$ gesetzet werden, damit die gegebene Function ihren möglich größten positiven Werth erhalte.

Eben so findet man, daß bey einer krummen Linie, welche durch die Gleichung $y = \frac{1}{2}p + p^{\frac{1}{3}}(x-p)^{\frac{2}{3}}$ ausgedruckt ist, der Abscisse $x = p$ die kleinste Ordinate entspreche, und daß die kleinste Ordinate $y = \frac{1}{2}p$ ist. Denn aus dieser Gleichung folgt $dy = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{3}}dx(x-p)^{-\frac{1}{3}}$, nähmlich $d[\frac{1}{2}p + p^{\frac{1}{3}}.(x-p)^{\frac{2}{3}}]$

=

$= \frac{2p^{\frac{1}{3}}dx}{3(x-p)^{\frac{1}{3}}}$. Um nun den Werth von x zu finden, der ein Fig.

Größtes oder ein Kleinstes gibt, setze man den Nenner des Differenzials, nähmlich $3(x-p)^{\frac{1}{3}} = 0$, weil sich aus dem Zähler nichts finden läßt; so folgt daraus $(x-p)^{\frac{1}{3}} = 0$, und auch $x - p = 0$, und endlich $x = p$. Diesen gefundenen Werth p setze man in der gegebenen Gleichung statt x, so ist $y = \frac{1}{2}p = R$. Ferner setze man $p + e$ statt x in eben dieser Gleichung, so ist $y = \frac{1}{2}p + p^{\frac{1}{3}} . (e)^{\frac{2}{3}} = R'$. Es ist aber $R' > R$, es möge e eine positive oder eine negative Größe bedeuten; folglich ist $\frac{1}{2}p$ die kleinste Ordinate dieser krummen Linie, und es muß $x = p$ gesetzet werden, damit man die kleinste Ordinate erhalte.

§. 704.

Die angeführte Methode, den größten oder den kleinsten Werth einer gegebenen Function zu bestimmen, beruhet auf folgenden Gründen.

Jede Function einer veränderlichen Größe x, z. B. $x^2 - 8x + 18$ kann als eine Gleichung irgend einer krummen Linie angesehen werden, wenn man die gegebene Function der Ordinate y einer solchen krummen Linie gleich setzet, und durch die veränderliche Größe x die Abscisse bezeichnet, und über dieses im erforderlichen Falle die gegebene Function mit der für die Einheit angenommenen Linie z. B. $c = 1$ dergestalt verbindet, daß sie ein linearischer Ausdruck wird.

In unserem Beyspiele ist nähmlich $y = \frac{x^2}{c} - 8x + 18c$

eine Gleichung für eine krumme Linie von senkrechten oder auch schief geneigten und dabey parallelen Ordinaten. Wenn nun die gegebene Function eines größten oder eines kleinsten Werthes fähig ist, so wird auch die dazu gehörige krumme Linie eine größte oder eine kleinste Ordinate haben, und durch eine solche größte oder kleinste Ordinate wird zugleich

der

Fig. der größte oder der kleinste Werth der gegebenen Function vorgestellet. Folgende allgemeine Eigenschaften der krummen Linien führen auf eine Regel um die größten oder die kleinsten Ordinaten zu finden, und beweisen die angeführte Methode (703.), nach der man bey einer gegebenen Function den großten oder den kleinsten Werth bestimmen kann.

198. I. Wenn bey einer krummen Linie von parallelen Ordinaten (Fig. 198.) ein Bogen BC die hohle Seite der Abscissen-Linie zeiget und die Tangente TM irgend eines Punctes M in diesem hohlen Bogen mit der Abscissen-Linie parallel läuft; so ist die Ordinate PM des Punctes M unter allen Ordinaten dieses hohlen Bogens die größte. Wenn aber der Bogen BC′ die erhabene Seite der Abscissen-Linie zeiget, und die Tangente T′M′ irgend eines Punctes M′ in diesem Bogen BC′ wieder mit der Abscissen-Linie parallel läuft; so ist die Ordinate P′M′ des Punctes M′ in diesem Bogen BC′ die kleinste. Denn in dem ersten Falle liegt jede andere Ordinate des Bogens BC unter der parallelen Tangente TM, und im zweyten Falle erstrecket sich jede andere Ordinate des Bogens BC′ über die parallele Tangente T′M′ hinaus.

199. II. Wenn die krumme Linie einen Schnabel bildet (Fig. 199.), dessen beyde Theile BM und AM der Abscissen-Linie ihre erhabene Seite zeigen, und die Tangente TM des Schnabels fällt mit der Ordinate zusammen; so ist unter allen Ordinaten des Schnabels die Ordinate PM des
200. Berührungspunctes die größte. Wenn aber beyde Theile des Schnabels BM und MC Fig. 200 ihre hohle Seite der Abscissen-Linie zeigen, und die Tangente des Schnabels fällt wieder mit der Ordinate zusammen; so ist die Ordinate des Berührungspunctes M ein Kleinstes. Dieses erhellet augenscheinlich aus Fig. 199. und 200. Die in Fig. 199. vorgestellte krumme Linie kann durch $y = p - p^{\frac{1}{3}}(x-p)^{\frac{2}{3}}$, und die durch Fig. 200. abgebildete durch $y = p + p^{\frac{1}{3}}(x-p)^{\frac{2}{3}}$ auf der Abscissen-Linie AP ausgedrucket werden.

Man

Man kann demnach die größte oder die kleinste Ordinate einer gegebenen krummen Linie bestimmen, welche durch $y = X$ ausgedrucket ist, wobey X was immer für eine Function von der Abscisse x vorstellet, wenn man untersuchet, an welchem Orte die Tangente entweder mit der Abscissen-Linie parallel läuft, oder an welchem Orte dieselbe mit der Ordinate zusammen fällt. Nun ist an dem Orte, an welchem die Tangente mit der Abscissen-Linie parallel läuft $d(X) = o$ in Hinsicht auf dx. Denn es ist an diesem Orte die Subtangente $\frac{y\,dx}{dy} = \infty$, folglich $dy : dx = y : \infty$, Fig.

und $dy = o$ in Hinsicht auf dx gleichwie $y = o$ in Hinsicht auf ∞ ist. Weil aber aus der Gleichung für die krumme Linie $y = X$ auch $dy = d(X)$ folgt; so ist an diesem Orte auch $d(X) = o$. Hingegen ist an dem Orte, allwo die Tangente mit der Ordinate zusammenfällt $dx = o$ in Hinsicht auf dy. Denn es ist an diesem Orte die Subtangente $\frac{y\,dx}{dy} = o$, und folglich $dy : dx = y : o$, nähmlich $dx = o$ in Hinsicht auf dy. Man kann demnach den Ort der parallelen Tangente nähmlich die entsprechende Abscisse nnd Ordinate finden, wenn man die Gleichung X differenziret, welche die Ordinate durch die Abscisse x ausgedrucket vorstellet, dieses Differenziale, nähmlich $d(X) = o$ setzet, und sodann aus dieser Gleichung den Werth von x suchet. Hingegen läßt sich der Ort finden, an welchem die Tangente mit der Ordinate zusammenfällt, wenn man den gemeinschaftlichen Nenner des Differenzials der Ordinate durch x ausgedruckt $= o$ setzet, und aus dieser Gleichung x entwickelt. Denn es sey z. B. in einem solchen Falle $dy = d(X) = \frac{P\,dx}{Q}$, allwo P und Q was immer für Functionen von x sind; so ist $dx = \frac{Q\,dy}{P}$. Setzet man nun $dx = o$ in Hinsicht auf dy, so ist auch $\frac{Q\,dy}{P} = o$, und

auch

Fig. auch $Q=0$, nähmlich in dem Differenziale $dy=d(X)=\frac{Pdx}{Q}$ ist der Nenner $Q=0$, wenn die Tangente mit der Ordinate zusammenfällt. Wäre nun $Q=3(x-p)$, so wäre $3(x-p)=0$, und folglich $x=p$.

Daß an demjenigen Orte der krummen Linie, allwo die Tangente mit der Abscissen-Linie parallel läuft, $dy=0$ ist, nähmlich daß an diesem Orte die Ordinate kein Differenziale hat; erhellet auch schon daher, weil an einem
198. solchen Orte (Fig. 198.) die Ordinate y sich gar nicht verändert, wenn man die Abscisse x nur um dx, oder auch den Bogen BM nur um sein Differenziale vermehrt oder vermindert. Denn an einem solchen Orte läuft das Differenziale oder das Element des Bogens selbst mit der Abscisse parallel. Eben so leicht ist es einzusehen, daß an demjenigen Orte einer krummen Linie, allwo die Tangente mit
190. der Ordinate zusammenfällt, $dx=0$ sey (Fig. 199.). Denn die Abscisse x bleibt an einem solchen Orte völlig ungeändert, wenn man die Ordinate y nur um dy oder den Bogen BM nur um sein Differenziale wachsen oder abnehmen läßt, weil an einem solchen Orte das Differenziale oder das Element des Bogens mit der Ordinate zusammenfällt.

Ist einmahl die Abscisse z. B. $x=a$ gefunden, welche den Ort anzeiget, an welchem die Tangente mit der Abscissen Linie parallel läuft, oder mit der Ordinate zusammenfällt; so ist dadurch auch die Ordinate $y=R$ des Berührungspunctes bestimmet, wenn man den gefundenen Werth a in der gegebenen Gleichung statt x setzet. Sodann ist es leicht zu untersuchen, ob die gefundene Abscisse $x=a$ des Berührungspunctes ein Größtes oder ein Kleinstes zum Vorschein bringet. Man muß nähmlich zu dieser Absicht $a+e$ statt x in der gegebenen Gleichung substituiren, um die zu $a+e$ gehörige Ordinate $y=R'$ zu erhalten, und muß darauf beurtheilen, ob R' größer oder kleiner als R sey, indem man die Größe e einmahl für positiv, und sodann für negativ ansiehet.

Anmerkung. Es gibt krumme Linien, die an mehreren Orten mit größten oder mit kleinsten Ordinaten versehen sind. Aus dieser Ursache muß man bey der Untersuchung eines Größten oder eines Kleinsten die Größe e sehr klein annehmen, damit man sich nicht von einer und derselben größten oder kleinsten Ordinate zu weit entferne, und etwa dadurch zu einer anderen größten oder kleinsten Ordinate gelange. Aus dieser Ursache kann man die Größe e so klein gedenken, daß man bey der Substitution alle ihre Potenzen, welche die zweyte übersteigen hinweglassen könne. Da dergleichen mit mehreren größten und kleinsten Ordinaten versehene krumme Linien bey der ausübenden Mathematik fast niemahls vorkommen, so wollen wir von ihnen auch keine weitere Erwähnung machen. Selbst die Prüfung eines Größten oder Kleinsten durch die Größe e ist in den meisten Fällen entbehrlich, weil solche Functionen, die ein einziges Größtes zu assen, gemeiniglich von o angefangen bis auf einen gewissen endlichen Werth wachsen und von da wieder bis o abnehmen, wie z. B. die Ordinaten eines Kreises $y = \sqrt{(2ax - x^2)}$. Hingegen die Functionen, welche ein einziges Kleinstes zulassen, nehmen gemeiniglich von ∞ angefangen bis auf einen gewissen endlichen Werth ab, und wachsen von da wieder bis ∞, als z. B. der Krümmungs-Halbmesser $k = \frac{(a^4 + x^4)^{\frac{3}{2}}}{2a^2x^3}$ für die gleichseitige Hyperbel an der Asymptote. Man findet aus dieser Function, wenn man ihr Differenziale $= o$ setzet, daß zu der Abscisse $x = a$ der kleinste Krümmungs-Halbmesser gehöret, und daß dieser Krümmungs-Halbmesser $k = a\sqrt{2}$ ist; daß folglich die Hyperbel am Scheitel die größte Krümmung hat. Fig.

Es kann sich zuweilen eräugnen, daß bey einer krummen Linie an irgend einem Puncte die Tangente mit der Abscissen-Linie parallel läuft, oder mit der Ordinate zusammenfällt, ohne daß deswegen die Ordinate des Berührungspunctes ein Größtes oder ein Kleinstes ist. Dieses kann geschehen, wenn die krumme Linie an eben diesem Orte auf

Fig. 200. 201. einer Seite des Berührungspunctes die hohle und auf der andern Seite die erhabene Seite der Abseissen-Linie zeiget, nähmlich wenn an eben diesem Orte ein Wendungspunct (punctum flexus contrarii), oder zuweilen auch ein Rückkehrpunct oder ein Schnabel (punctum regressus, seu cuspis) befindlich ist. In Fig. 201. ist eine krumme Linie mit einem solchen Wendungspuncte M abgebildet, welche auf der Abscisse AP durch $y = p + p^{-2}(x-p)^3$, auf der Abscissen-Linie AQ aber durch $y = p + (p^2 x - p^3)^{\frac{1}{3}}$ ausgedruckt ist. In Fig. 200. aber wird die krumme Linie mit dem Schnabel oder Rückkehrpuncte auf der Abscisse BP' durch $y = p \pm \sqrt{[(p^{-1}(p-x)^3]}$ vorgestellet. Aus der vorigen Gleichung $y = p + p^{-2}(x-p)^3$ folgt $dy = \frac{3(x-p)^2\,dx}{p^2}$. Setzet man dieses Differenziale $= 0$, so ist $x = p$, und auch $y = p = R$, und $R' = p + p^{-2}e^3$. Nun ist $R' > R$ wenn man e für positiv ansieht; hingegen ist $R' < R$ wenn man e für negativ ansieht; also ist in M weder eine größte noch auch eine kleinste Ordinate, sondern nur entweder ein Wendungspunct oder aber ein Schnabel, welches man aus der Gestalt der krummen Linie jederzeit sehr leicht beurtheilen kann, wenn man ein Stück derselben verzeichnet.

Die Abscisse und Ordinate des Wendungspunctes und auch des Schnabels einer krummen Linie läßt sich bestimmen, wenn man untersuchet, an welchem Orte daß erste Differenziale der Ordinate ein Größtes oder ein Kleinstes wird; daß ist, wenn man die Gleichung für die krumme Linie zum zweytenmahle differenziret, und bey diesem zweyten Differenziale der Ordinate entweder den Zähler oder den Nenner $= 0$ setzet. Denn es ist aus dem bloßen Anblicke solcher krummen Linien, die entweder mit Schnabeln oder mit Wendungspuncten versehen sind, gar leicht zu ersehen, daß die ersten Differenzialen der Ordinaten bis zu einem solchen Puncte wachsen und von da wieder abnehmen, oder umgekehrt: und daß folglich bey einem solchen Puncte der krummen

Li-

Linie das erste Differenziale der Ordinate entweder ein Größtes oder ein Kleinstes wird. Fig. 173

Z. B. aus der Gleichung $y = a^3 (a^2 + x^2)^{-1}$ (für die krumme Linie Fig. 173. auf der Abscisse Cp) folgt $dy = -2a^3 x dx (a^2 + x^2)^{-2}$, und $ddy = -2a^3 dx^2 (a^2 + x^2)^{-2} + 8a^3 x^2 dx^2 (a^2 + x^2)^{-3} = \frac{2a^3 (3x^2 - a^2) dx^2}{(a^2 + x^2)^3}$. Setzen wir nun $(3x^2 - a^2) dx^2 = 0$, so ist $3x^2 = a^2$, $x = \frac{1}{3} a \sqrt{3}$, und $y = a^3 (a^2 + \frac{1}{3} a^2)^{-1} = \frac{3}{4} a$; nähmlich die zum Wendungspuncte gehörige Abscisse Cp ist bey dieser krummen Linie $= \frac{1}{3} a \sqrt{3} = \frac{1}{3} AC \sqrt{3}$, und die Ordinate pm $= \frac{3}{4} a = \frac{3}{4} AC$. Dergleichen krumme Linien mit Wendungspuncten, und auch jene mit Schnabeln haben auf die ausübende Mathematik keinen bedeutenden Einfluß. Aus dieser Ursache wollen wir uns auch nicht länger dabey aufhalten.

§. 705.

Damit sich ein Anfänger die angeführte Methode (703.) die größten und kleinsten Werthe der Functionen zu bestimmen durch die Uebung geläufig mache, wollen wir nachstehende Beyspiele hierhersetzen, und die Auflösung derselben beyfügen.

I. Eine Zahl a (z. B. 10) oder auch eine gerade Linie in zwey Theile dergestalt zu theilen, daß ihr Product ein Größtes wird.

Auflösung. Es sey ein Theil $= x$, so ist der andere $= a - x$, und ihr Product $= ax - x^2$. Man setze nun $d(ax - x^2) = (a - 2x) dx = 0$; so ist $x = \frac{1}{2} a = 5$ der erste Theil, und folglich auch der zweyte Theil $= \frac{1}{2} a = 5$, dem ersten gleich. Das größte Product aber ist $= \frac{1}{4} a^2 = 25$.

II. Eine Zahl x von solcher Eigenschaft zu finden, daß $\overset{x}{\sqrt{x}}$ ein Größtes wird.

Auflösung. Es ist in diesem Falle $d(\overset{x}{\sqrt{x}}) = d(x^{\frac{1}{x}})$ $= x^{\frac{1}{x}} . d(Lx^{\frac{1}{x}}) = x^{\frac{1}{x}} . d(x^{-1} . Lx) = x^{\frac{1}{x}} . (-x^{-2} dx\, Lx +$

Fig. $\overset{1}{x}-2$

$+x^{-2}dx)=x\,.\,dx\,(1-Lx)=0$; also $Lx=1=Lh$ und $x=h=2{,}7182818\ldots$. Nun ist $\overset{h}{\vee}\,h=1{,}4446678$, hingegen ist $\overset{3}{\vee}\,2=1{,}4142136$, und $\overset{3}{\vee}\,3=1{,}4422496$.

202. III. Aus einer gegebenen Kreisfläche ABD (Fig. 202.) soll ein Stück ACB ausgeschnitten, und aus dem Ueberreste ein Kegel EFG gebildet werden; wie viel Grade, Minuten, und Secunden muß der Bogen AB des wegzunehmenden Ausschnittes ACB enthalten, damit der Cubikinhalt des Kegels EGF ein Größtes wird.

Auflösung. Es sey der Halbmesser $AC=a$, so ist der Umkreis $ABD=2a\pi$; die Anzahl der Grade des Bogens $ADB=EPFQ$ sey $=x$, so ist, wenn wir $180=c$ setzen, dieses Bogens Länge $ADB=\frac{ax\pi}{c}=ac^{-1}x\pi$. Es ist also auch der Umkreis $EPFQ=ac^{-1}x\pi$, der Durchmesser $EF=ac^{-1}x$, und die Kreisfläche $PQ=\frac{1}{4}a^2c^{-2}x^2\pi$. Ferner ist $GH=\vee(EG^2-EH^2)=\vee(a^2-\frac{1}{4}a^2c^{-2}x^2)$ $=\frac{1}{2}ac^{-1}(4c^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$; folglich ist der Kegel $EFG=\frac{1}{3}PQ\,.\,GH=\frac{1}{24}a^3c^{-3}\times x^2\pi(4c^2-x^2)^{\frac{1}{2}}=$ $\frac{1}{24}a^3c^{-3}\pi(4c^2x^4-x^6)^{\frac{1}{2}}$; davon ist das Differenziale $=\frac{\frac{1}{24}a^3c^{-3}\pi(16c^2x^3dx-6x^5dx)}{2\vee(4c^2x^4-x^6)}$. Setzet man nun den Zähler dieses Differenziales $=0$, so ist $x=\frac{2}{3}c.\vee 6=120^\circ\times 2{,}44949=293{,}9388^\circ=293^\circ 56'20''$. Der Bogen ADB muß demnach $293^\circ 56'20''$, und folglich der Bogen AB oder der Winkel ACB $66^\circ 3'40''$ enthalten, damit der Kegel EFG ein Größtes wird.

IV. In einen gegebenen Kreis das größte Rechteck
203. DB zu verzeichnen. (Fig. 203.)

Auflösung. Es sey der Durchmesser $AC=a$, und $AE=x$ von der Beschaffenheit, daß man mittelst der

Senk-

Senkrechten EB das gesuchte Rechteck DB verzeichnen kön- Fig.
ne, so ist $EC = a - x$, $EB^2 = ax - x^2$, 203.
$AB = V(AE^2 + EB^2) = V\,ax$, $BC = V(a^2 - ax)$,
und folglich das Rechteck $BD = AB.BC = (a^3x - a^2x^2)^{\frac{1}{2}}$.
Davon ist das Differenziale $= \frac{(a^3 - 2a^2x)dx}{2(a^3x - a^2x^2)^{\frac{1}{2}}}$. Setzet
man nun den Zähler $= o$, so ist $x = \frac{1}{2}a$, $AE = \frac{1}{2}AC$,
und folglich das gesuchte Rechteck ein Quadrat.

Wäre nun dieser Kreis der Durchschnitt eines runden Baumes, so wird unter allen vierkantigen Balken, die man aus diesem Baume aushauen kann, derjenige die größte Menge der Materie enthalten, dessen Durchschnitt ein Quadrat ist. Jedoch wird dieser Balken nicht der stärkste seyn, wenn er in horizontaler Lage an beyden Enden unterstützet eine Last tragen soll. Für einen solchen Fall läßt sich der stärkste Balken bestimmen, wenn man aus der Mechanik für bekannt annimmt, daß die Stärke eines vierkantigen Balkens dem Producte aus dem Quadrate der Höhe BC^2 in die Grundlinie AB des Durchschnittes proportional ist. In dieser Voraussetzung kann die Stärke dieses Balkens, wenn er mit der Seite AB aufliegen soll, durch $BC^2.AB = a^{\frac{5}{2}}x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}$ ausgedrucket werden. Davon ist das Differenziale $= (\frac{1}{2}a^{\frac{5}{2}}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}})dx$. Dieses $= o$ gesetzt gibt $x = \frac{1}{3}a$, nähmlich $AE = \frac{1}{3}AC$. Man muß demnach den Durchmesser in drey gleiche Theile theilen, und durch den ersten Theilungspunct E die Senkrechte EB errichten, um den Durchschnitt desjenigen vierkantigen Balkens zu erhalten, welcher mit der schmalen Seite AB aufgelegt die möglich größte Last zu tragen im Stande ist. Da $AB = V\,ax$, $BC = V(a^2 - ax)$, und $x = \frac{1}{3}a$ ist, so verhält sich $AB : BC = V\,\frac{1}{3}a^2 : V\,\frac{2}{3}a^2 = 1 : V\,2$ oder beynahe $= 2 : 3$. Die Last aber, die ein solcher Balken mit der Seite AB aufgelegt tragen kann, verhält sich zur Last, die er mit der Seite BC aufgelegt zu erhalten im

Stan-

Fig. Stande ist, gleichwie 2 zu $\sqrt{2}$, oder gleichwie $\sqrt{2}$ zu 1,
203. nähmlich gleichwie 3 : 2 beynahe.

V. In den Durchschnitt BD einer Kugel (Fig. 203.) den halben Durchschnitt eines geraden Kegels zu verzeichnen, dessen krumme Oberfläche ein Größtes ist.

Auflösung. Es sey der halbe Durchschnitt des Kegels das Dreyeck CEB, der Durchmesser CA $= a$, und CE $= x$; so ist EB $= \sqrt{(ax - x^2)}$, BC $= \sqrt{ax}$, des Halbmessers EB halber Umkreis $= \pi . \sqrt{(ax - x^2)}$, und folglich die krumme Oberfläche des Kegels $= \pi . \sqrt{(ax - x^2)} \times \sqrt{ax} = \pi \sqrt{(a^2 x^2 - ax^3)}$. Davon ist das Differenziale $= \frac{(2a^2 x - 3ax^2)\pi dx}{2\sqrt{(a^2 x^2 - ax^3)}}$. Dessen Zähler $= 0$ gesetzt gibt $x = \frac{2}{3}a$, nähmlich CE $= \frac{2}{3}$ CA.

VI. Einen Cylinder anzugeben, der in der möglich kleinsten Oberfläche den möglich größten Cubikinhalt enthält, oder welches einerley ist, der mit der möglich kleinsten Oberfläche einen gegebenen Cubikinhalt $= a$ einschließt.

Auflösung. Der Durchmesser der Grundfläche dieses Cylinders sey $= x$, so ist der dazu gehörige Umkreis $= \pi x$, und die Grundfläche $= \frac{1}{4}\pi x^2$. Also ist des Cylinders Höhe $= \frac{a}{\frac{1}{4}\pi x^2}$ (vermöge §. 514. IV.); daher seine ganze Oberfläche $= \frac{2}{4}\pi x^2 + \pi x . \frac{a}{\frac{1}{4}\pi x^2} = \frac{1}{2}\pi x^2 + 4ax^{-1}$. Davon ist das Differenziale $(\pi x - 4ax^{-2})\, dx = 0$; folglich ist der Durchmesser $x = \sqrt[3]{\frac{4a}{\pi}}$, und des Cylinders Höhe $= \frac{4a}{\pi} : \sqrt[3]{(\frac{4a}{\pi})^2} = \sqrt[3]{\frac{4a}{\pi}}$. Der gesuchte Cylinder ist demnach gleichseitig.

§. 706. Fig.

Wenn der größte oder der kleinste Werth einer Function zu bestimmen ist, die mehrere veränderliche Größen enthält; so muß man die vorgegebene Function differenziren, und darauf die Summe aller Glieder, die mit dem Differenziale einer und derselben veränderlichen Größe multipliciret sind, besonders $= o$ setzen. Aus der Verbindung dieser Gleichungen lassen sich sodann die gesuchten Größen bestimmen.

Z. B. Man soll eine Zahl a in drey solche Theile zerfällen, daß das Product aus der dritten Potenz des ersten Theiles, aus der zweyten Potenz des zweyten Theiles, und aus der ersten Potenz des dritten Theiles ein Größtes wird. Dieses kann nun auf folgende Art geschehen. Es sey der erste Theil $= x$, der zweyte $= y$, so ist der dritte Theil $= a - x - y$, und das angeführte Product ist $= ax^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3$; davon ist das Differenziale $= 3ax^2y^2\,dx + 2ax^3\,ydy - 4x^3y^2\,dx - 2x^4\,ydy - 3x^2y^3\,dx - 3x^3y^2\,dy = (3ax^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3)dx + (2ax^3y - 2x^4y - 3x^3y^2)\,dy$. Setzen wir nun

$(3ax^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3)\,dx = o$, und auch

$(2ax^3y - 2x^4y - 3x^3y^2)\,dy = o$; so folgt

daraus $3a - 4x - 3y = o$

und $2a - 2x - 3y = o$

subtr. $a - 2x = o$; nähmlich $x = \frac{1}{2}a$, und $y = \frac{1}{3}a$, folglich der dritte Theil $= \frac{1}{6}a$. Setzen wir nun $a = 12$, so sind die gesuchten Theile $= 6, 4, 2$, deren Product $= 6^3 . 4^2 . 2 = 6912$ ein Größtes ist.

Man kann sich von der Richtigkeit dieses Verfahrens auf folgende Art überzeugen. Es ist bey dem größten Werthe der angeführten Function $P = ax^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3$, wenn man nur x allein für veränderlich ansieht.

$dP = (3ax^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3)\,dx = o$.

In eben dieser Function, wenn man nur y allein für veränderlich ansieht, ist bey dem größten Werthe

$dP =$

Fig. $dP = (2ax^3y - 2x^4y - 3x^3y^2)dy = 0.$

Es ist demnach bey dem größten Werthe dieser Function, wenn x und y beyde zugleich für veränderlich angesehen werden,

sowohl $(3ax^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3)\,dx = 0$,
als auch $(2ax^3y - 2x^4y - 3x^3y^2)\,dy = 0$;

Eben so läßt sich die gegebene Regel erweisen, wenn die Function noch mehrere veränderliche Größen enthielte.

§. 707.

Die Anfänger können das Vergnügen haben folgende Beyspiele durch eigenen Fleiß auszuarbeiten.

I. Die größten oder die kleinsten Ordinaten, und auch die Wendungspuncte der krummen Linie zu bestimmen, welche durch die Gleichnug $y = 864x - \frac{252x^2}{a} + \frac{28x^3}{a^2} - \frac{x^4}{a^3}$ ausgedrucket ist.

II. Eine Zahl x von der Beschaffenheit zu finden, daß $\frac{x}{\log \text{vulg}\, x}$ ein Kleinstes wird.

III. Einen Bruch zu finden, der seine $m$te Potenz (z. B. sein Quadrat) um die möglich größte Differenz übersteiget.

IV. Es ist zwischen den Schenkeln eines rechten Winkels ein Punct gegeben; man soll durch diesen Punct die kürzeste gerade Linie an beyde Schenkel ziehen.

V. Eine gerade Linie in drey Theile dergestalt zu theilen, daß aus diesen Theilen das möglich größte Dreyeck verzeichnet werden könne.

VI. In eine Kugel den größten Kegel, und in den Kegel den größten Cylinder einzuschreiben.

VII. Den inneren Durchmesser und die Höhe eines cylindrischen Gefässes (z B. eines Pulver-Cimentes) anzugeben, welches bey der möglich kleinsten inneren Oberfläche einen gegebenen Cubikinhalt enthält.

VIII. Aus einem gegebenen geraden Kegel die größte parabolische Fläche auszuschneiden.

IX. Den Ort der stärksten Krümmung bey der Logistik zu bestimmen. Fig. 204.

X. Die Pulverkammer AEB eines Mörsers (Fig. 204.) bey dem der Durchmesser der Bombe AG $=$ *a* Schuhe enthält, soll aus einer halben Kugel DEF und aus einem Cylinder ADFB bestehen; diese Kammer soll bis auf die Berührungsebene pmq angefüllet *b* ℔ Pulver enthalten, wovon 1 Cubikschuh *c* ℔ wiegt. Wie groß muß der Durchmesser DF und wie groß die Höhe AD des Cylinders seyn, damit die ganze innere Oberfläche der Kammer mA + AD + DEF + FB + Bm ein Kleinstes sey? Wie groß soll hingegen der Durchmesser, wie groß die Höhe des Cylinders seyn, wenn sich daran keine Halbkugel befindet? Wie soll der Durchmesser des Cylinders zu seiner Höhe sich verhalten, wenn in dem zweyten oder in dem ersten Falle die Kammer nur bis auf eine Ebene, welche um eine gegebene Größe von dem untersten Puncte m der Bombe absteht, angefüllet auch *b* ℔ Pulver enthalten soll? Hat der Abstand der Ebene pq von dem Puncte m einen Einfluß auf das bloße Verhältniß des Durchmessers zur Höhe des Cylinders? Wie groß muß nach eben dieser Bedingung der Durchmesser, wie groß die Höhe des Cylinders seyn, wenn der ganze innere Raum Amp + Bmq + Dq + DEF angefüllet *b* ℔ Pulver enthalten soll?

II. Von dem Werthe des Bruches $\frac{0}{0}$

§. 708.

Es ereignet sich zuweilen, daß bey einem gewissen Werthe der veränderlichen Größe eine gebrochene Function $= \frac{0}{0}$ wird. Z. B. bey der Reihe $a, ax, ax^2, ax^3, \ldots\ldots ax^{n-1}$ ist die Summe von *n* Gliedern $s = \frac{ax^n - a}{x - 1}$, es möge *x* was immer bedeuten. Setzet man $x = 1$, so ist $s = \frac{0}{0}$. Der Werth eines solchen Bruches läßt sich bestimmen, wenn

Fig. man den Zähler und Renner besonders differenziret, dieses Differenziale gehörig abkürzet, und sodann statt der veränderlichen Größe denjenigen Werth setzet, welcher die gebrochene Function auf $\frac{0}{0}$ bringet. In unserem Beyspiele ist

$$s = \frac{d(ax^n - a)}{d(x-1)} = \frac{nax^{n-1}dx}{dx} = nax^{n-1} = na$$ für den Fall $x = 1$. Es ist wirklich auch die Summe von n Gliedern bey der angeführten Reihe $= na$, wenn man $x = 1$ setzet, weil sodann jedes Glied $= a$ wird.

Der Grund von der gegebenen Regel ist leicht einzusehen. Es sey z. B. die gegebene Function $Y = \frac{X}{X'}$ also beschaffen, daß sich dieselbe bey dem Werthe der veränderlichen Größe $x = a$ in $y = \frac{0}{0}$ verwandelt; so ist bey einem jeden endlichen Werthe der veränderlichen Größe auch $Y = \frac{X + d(X)}{X' + d(X')}$, weil $d(X)$ und $d(X')$ unendlich kleine Größen sind. Folglich ist bey dem Werthe der veränderlichen Größe $x = a$ eben diese Function

$$y = \frac{0 + d(X)}{0 + d(X')} = \frac{d(X)}{d(X')}.$$

Die Function $y = \frac{\sqrt{(x^4 + 2ax^3 - 3a^4)}}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}$ wird $= \frac{0}{0}$ für $x = a$. Es wird also auch $y^2 = \frac{x^4 + 2ax^3 - 3a^4}{x^2 - a^2} = \frac{0}{0}$ für $x = a$. Nun ist für diesen Fall

$$y^2 = \frac{4x^3dx + 6ax^2dx}{2xdx} = 2x^2 + 3ax = 2a^2 + 3a^2 = 5a^2,$$

und folglich $y = a\sqrt{5}$.

Die Function $y = \frac{1}{Lx} - \frac{x}{Lx}$ wird $= \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty$ für $x = 1$, oder es wird $y = \frac{1-x}{Lx} = \frac{0}{0}$ für $x = 1$.

Nun

Nun ist für diesen Fall $y = \frac{d(1-x)}{d(Lx)} = -dx : \frac{dx}{x} = -x$; Fig.

also $y = -1$.

$y = \frac{Lx}{\sqrt{(x^2-1)}} = \frac{0}{0}$ für $x = 1$, wird für diesen Fall

$= \frac{dx}{x} : \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-1)}} = \frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x^2} = 0$. Hingegen wird

$y = \frac{\sqrt{(x^2-1)}}{Lx} = \frac{0}{0} = \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-1)}} : \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)}}$

$= \frac{1}{0} = \infty$ für $x = 1$.

Zuweilen wird auch $\frac{d(X)}{d(X')} = \frac{0}{0}$. In einem solchen Falle muß man auch $\frac{d(d(X))}{d(d(X'))}$ nähmlich $\frac{dd(X)}{dd(X')}$ entwickeln, und darin nach vorgenommener Abkürzung für die veränderliche Größe den gehörigen Werth setzen. Z. B. wenn man die Gleichung $ax + ax^2 + ax^3 + ax^4 + \ldots + ax^n$

$= \frac{ax^{n+1} - ax}{x-1}$ ordentlich differenziret, und gehörig abkürzet; so erhält man die Summe der Reihe

$a + 2ax + 3ax^2 + 4ax^3 + \ldots + nax^{n-1}$

$= \frac{nax^{n+1} - (n+1)ax^n + a}{(x-1)^2} = s$. Setzen wir nun in dieser Summen-Formel $x = 1$, so ist $s = \frac{0}{0}$, und auch für eben diesen Fall $\frac{d(X)}{d(X')} = \frac{n(n+1)ax^n - n(n+1)ax^{n-1}}{2(x-1)} = \frac{0}{0}$.

Hingegen ist $\frac{dd(X)}{dd(X')} = \frac{n^2(n+1)ax^{n-1} - (n-1)n(n+1)ax^{n-2}}{2}$

$= \frac{1}{2}a.n.(n+1)$ für $x = 1$. Folglich ist für diesen Fall die Summe $s = \frac{1}{2}a.n.(n+1) =$ der Summe der Reihe $a + 2a + 3a + 4a + \ldots + na$.

Fig. Sollte aber auch $\frac{ddX}{ddX'} = \frac{0}{0}$ werden; so müßte man ferner $\frac{d^3X}{d^3X'}$ entwickeln, u. s. w. Denn es ist

$$\frac{X}{X'} = \frac{X + dX + ddX + d^3X + d^4X + \ldots\ldots}{X' + dX' + ddX' + d^3X' + d^4X' + \ldots\ldots}$$

weil ein jedes nachfolgende Glied eine unendlich kleine Größe von einem höheren Range ist, als das vorhergehende. Sind nun bey irgend einem Werthe der veränderlichen Größe sowohl im Zähler als auch im Nenner einige Glieder $= 0$, so müssen in diesem Falle die ersten bedeutlichen gleichnahmigen Glieder dieser Reihe im Zähler und im Nenner für den Werth der Function genommen werden, da die nachfolgenden als unendlich kleine Größen vom höheren Range hinwegfallen.

Wenn wir z. B. im folgenden Ausdrucke

$[nx^{n+1} - (n+1)x^n - \frac{1}{2}n(n+1)(x^2-1) + n(n+1)(x-1) - \frac{1}{3}n(n+1)(n-1)(x^3-1) + n(n+1)(n-1)(x^2-1) - n(n+1)(n-1)(x-1) + 1] : (x-1)^4$

als in dem summator. Gliede einer Reihe, deren allgemein. Glied $t = n(0 + 0 + x^{n-3} + 2x^{n-4} + 3x^{n-5} + 4x^{n-6} + \ldots\ldots)$ ist, $x = 1$ setzen; so ist $s = \frac{0}{0}$. Für eben diesen Fall ist aber auch $\frac{dX}{dX'} = \frac{0}{0}$, $\frac{ddX}{ddX'} = \frac{0}{0}$, $\frac{d^3X}{d^3X'} = \frac{0}{0}$, endlich ist

$\frac{d^4X}{d^4X'} = \frac{n(n+1)(n-1)(n-2)}{2.4}$ = der Summe der Reihe

$0 + 0 + 3.1 + 4.3 + 5.6 + 6.10 + 7.15. + \ldots\ldots + \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$.

Es wäre überflüßig diesen Gegenstand weiter aus einander zu setzen, da er ohnehin selten vorkommt, und noch wichtigere Dinge abzuhandeln übrig bleiben.

Achtes

Fig.

Achtes Hauptstück.

Von der Integral-Rechnung.

I. Abschnitt.

Anfangsgründe der Integral-Rechnung, und die Entwickelung der Grundregeln derselben.

§. 709.

Eine Function von einer oder von mehreren veränderlichen Größen durch die Differenzialen derselben ausgedruckt oder mit den Differenzialen dieser Größen verbunden, heißt eine Differenzial-Größe; und eine Gleichung zwischen Differenzial-Größen wird eine Differenzial-Gleichung genannt. Das Integrale einer Differenzial-Größe aber nennet man diejenige Function, durch deren Differenzirung die vorgelegte Differenzial-Größe entstanden ist. Den Vorgang endlich, durch welchen man aus der Differenzial-Größe die ihr zugehörige Function findet, heißt man Integriren oder auch Summiren; weil die gegebene Differenzial-Größe das allgemeine Glied einer unendlichen Reihe vorstellet, deren Summe die Function selbst ist. Aus dieser Ursache wird die Forderung, zu einer gegebenen Differenzial-Größe die zugehörige Function zu finden, durch den Buchstaben $\int$ angezeiget, welchen man der gegebenen Differenzial-Größe vorsetzet. Es wird nähmlich das Integrale von $2a^2\,dx - \frac{1}{4}b^2\,dy$, durch $\int(2a^2\,dx - \frac{1}{4}b^2\,dy)$ angezeiget.

§. 710.

Fig.

§. 710.

Aus dieser Erklärung des Integrales einer Differenzial-Größe folgt klar, daß man aus einer gegebenen Differenzial-Größe also gleich das Integrale derselben hinschreiben kann, wenn man aus den Gründen des vorhergehenden Hauptstückes die Function kennet, durch deren Differenzirung die gegebene Differenzial-Größe entstanden ist; oder daß man die Richtigkeit eines gefundenen Integrales dadurch prüfen kann, wenn man dasselbe differenziret und nachsieht, ob der dadurch erhaltene Differenzial-Ausdruck mit der gegebenen Differenzial-Größe übereinstimmet. So z. B. ist $\int(2a^2\,dx - \frac{3}{4}b^2\,dy) = 2a^2x - \frac{3}{4}b^2y$, weil durch die Differenzirung dieses Ausdruckes genau die gegebene Differenzial-Größe erhalten wird. Auch ist leicht einzusehen, daß man ein jedes Glied der gegebenen Differenzial-Größe, in welchem nur eine einzige veränderliche Größe vorkommt, für sich integriren könne; weil diese Glieder mit den übrigen Gliedern in keiner besonderen Verbindung stehen. Es ist nähmlich

I. $\int(dP - dQ + \ldots + dZ) = \int dP - \int dQ + \ldots + \int dZ$.

Eben so leicht ist einzusehen, daß die beständigen Größen, welche in der gegebenen Differenzial-Größe Factoren zu derselben sind, auch in dem Integrale Factoren seyn müssen, und folglich auf die Gestalt des gesuchten Integrales keinen Einfluß haben können. Es ist nähmlich

II. $\int A\,dz = A.\int dz$.

Daher ist in dem gegebenen Beyspiele $\int(2a^2\,dx - \frac{3}{4}b^2\,dy) = 2a^2\int dx - \frac{3}{4}b^2\int dy = 2a^2x - \frac{3}{4}b^2y$.

§. 711.

Nach dem bisher Gesagten ist $\int a\,dx = a.\int dx = ax$. Es kann auch $\int a\,dx = ax \pm b$, oder auch $\int a\,dx = ax \pm a^2$ oder auch $\int a\,dx = ax + 2ab - c^2$ u. s. w. gesetzet werden; denn jedes von diesen Integralen bringet durch die Differenzirung wieder $a\,dx$ zum Vorschein, weil (§. 678. II.) die unveränderlichen Glieder einer Function kein Differenziale

ziale haben, und in der Differenzial-Größe gar nicht erscheinen. Fig.
Ob zu einem gefundenen Integrale, welches schon bereits die Eigenschaft hat, daß es durch die Differenzirung wieder die gegebene Differenzial-Größe herstellet, noch eine unveränderliche Größe hinzuzusetzen sey, läßt sich nicht anders als aus den Umständen und Bedingungen der Aufgabe entscheiden, welche durch die Integral-Rechnung aufgelöset wird, wie es weiter unten zu ersehen seyn wird. Indessen pflegt man zu einem jeden gefundenen Integrale, + Constans, oder + Const, oder auch nur + C hinzuzusetzen, um das vollständige Integrale zu erhalten, allwo C diejenige unveränderliche positive oder negative Größe bedeutet, welche man aus den Umständen der Aufgabe zu bestimmen hat; zuweilen ist auch $C = o$. In dem angeführten Beyspiele ist demnach $\int a dx = ax + C$.

§. 712.

Die unveränderliche oder beständige Größe C läßt sich bey einem gefundenen Integrale auf folgende Art bestimmen. Man erwäge genau, was für eine Größe durch das gesuchte Integrale vorgestellet werde, und untersuche sodann aufmerksam, bey welchem aus den Umständen der Aufgabe schon bekannten Werthe des gesuchten Integrales auch der Werth der dazu gehörigen veränderlichen Größe bekannt sey. Diese zwey bekannten Werthe substituire man nun gehörig in die gefundene Integral-Gleichung; so wird sich daraus die gesuchte unveränderliche Größe C bestimmen lassen. Wenn nähmlich aus der gegebenen Differenzial-Gleichung $dy = dx$, $y = \int dx = x + C$ folget, und dabey bekannt ist, daß für den Werth $x = B$ die Function in $y = A$ übergeht, oder umgekehrt; so ist $A = B + C$ und $C = A - B$. Es sey z. B. bey der Integral-Gleichung $y = \int a dx = ax + C$, welche aus der Differenzial-Gleichung $dy = a dx$ abgeleitet wird, aus den Umständen der Aufgabe bekannt, daß bey dem Werthe a^2 des gesuchten Integrales $\int a dx$, die veränderliche Größe x den Werth $\frac{3}{2}a$ hat, nähmlich daß für

Fig. $y = a^2$ die dazu gehörige veränderliche Größe $x = \frac{3}{2}a$ ist, so ist $a^2 = a \cdot \frac{3}{2}a + C$, nähmlich $C = -\frac{1}{2}a^2$, und folglich das gesuchte vollständige Integrale $y = ax - \frac{1}{2}a^2$. Ist hingegen für $y = 0$ vermöge der Umstände $x = -b$, so ist $0 = a \times -b + C$, nähmlich $C = ab$, und folglich für einen solchen Fall $y = ax + ab$. Wäre also für $y = 0$, auch $x = 0$, so ist $0 = a \cdot 0 + C$, nähmlich $C = 0$, und folglich $y = \int a\,dx = ax$. Gemeiniglich sind die Umstände der Aufgabe also beschaffen, daß bey dem Werthe 0 des gesuchten Integrals auch der Werth der dazu gehörigen veränderlichen Größe bekannt ist. Bey der Anwendung der Integral-Rechnung wird jederzeit aus einer Differenzial-Gleichung zwischen veränderlichen Größen, die Gleichung in endlichen Gliedern zwischen eben diesen veränderlichen Größen gesucht. Es ist leicht einzusehen, daß man in solchen Fällen die anfänglich noch unbekannte aber dabey unveränderliche Größe C nach Belieben auf einer oder auf der anderen Seite des Gleichheitszeichens bey der integrirten Gleichung hinzusetzen könne. Aus der Differenzial-Gleichung $dy = a\,dx$ folgt nähmlich $y = ax + C$, oder auch $y + C = ax$. Wir werden in der Folge um die Weitläufigkeit zu vermeiden gemeiniglich die Differenzial-Größen für sich allein betrachtet integriren ohne dieselben als Differenzial-Gleichungen ausdrücklich anzusetzen.

§. 713.

Wenn man die Entstehungsart der Differenzial-Größen aus den endlichen Functionen (aus den dazu gehörigen Integralen) aufmerksam betrachtet, so lassen sich durch den umgekehrten Weg wie es schon (im §. 710.) gesagt worden ist, zu verschiedenen Differenzial-Größen die dazu gehörigen Integralen ohne Schwierigkeit finden. Es ist z. B. $d(axy) = ay\,dx + ax\,dy$; folglich $\int(ay\,dx + ax\,dy) = axy$, oder vielmehr $\int(ay\,dx + ax\,dy) = axy + C$. Eben so muß $\int\left(\frac{ay\,dx - ax\,dy}{y^2}\right) = \frac{ax}{y} + C$ seyn, weil $d\left(\frac{ax}{y} + C\right) = \frac{ay\,dx - ax\,dy}{y^2}$ ist. Hin-

ge-

gegen ist $\int\left(\frac{abx\,dy - aby\,dx}{y^2}\right) = \int -b\left(\frac{ay\,dx - ax\,dy}{y^2}\right) =$ Fig.

$-b.\int\left(\frac{ay\,dx - ax\,dy}{y^2}\right) = -b.\frac{ax}{y} = C - \frac{abx}{y}$.

§. 714.

Vermöge §. 682. ist $d(Lz) = \frac{dz}{z} = z^{-1}\,dz$; folglich ist auch $\int\frac{dz}{z} = Lz$, oder vielmehr $\int\frac{a\,dz}{z} = \int az^{-1}\,dz$ $= a\,.\,Lz + C$, es möge z eine einfache oder zusammen gesetzte Größe bedeuten. So z. B. ist $\int\frac{my\,dy}{n(b^2+y^2)} = \int\frac{m}{2n}.\frac{2y\,dy}{b^2+y^2}$ $= \frac{m}{2n}.L(b^2+y^2) + C$. Wenn nähmlich bey einer gebrochenen Differenzial-Größe in dem Zähler das Differenziale des Nenners mit was immer für einem unveränderlichen Coefficienten verbunden sich befindet, so ist das Integrale einer solchen gebrochenen Differenzial-Größe jederzeit gleich dem natürlichen Logarithmus des Nenners mit eben demselben unveränderlichen Coefficienten verbunden.

Es ist demnach $\int\frac{mx^{n-1}\,dx}{a^n + x^n} = \int\frac{m}{n}.\frac{nx^{n-1}\,dx}{a^n + x^n} = \frac{m}{n}.L(a^n + x^n)$ $= L(a^n + x^n)^{\frac{m}{n}} + C$. Ingleichen $\int\frac{x\,dx - \frac{1}{2}a\,dx}{ax - x^2 + a^2}$ $= \int -\frac{1}{2}\left(\frac{a\,dx - 2x\,dx}{ax - x^2 + a^2}\right) = -\frac{1}{2}.L(ax - x^2 + a^2) =$ $-L\sqrt{(ax - x^2 + a^2)} + C$.

Bey dergleichen logarithmischen Integralen pflegt man öfters die unveränderliche Größe durch LC, zu bezeichnen. In dem gegebenen Beyspiele kann man nähmlich $\int\frac{x\,dx - \frac{1}{2}a\,dx}{ax - x^2 + a^2}$ $= -L\sqrt{(ax - x^2 + a^2)} + LC$ setzen. Wäre nun bey

dem

Fig. dem Werthe o des gesuchten Integrals auch $x = o$, so müßte $o = -L\sqrt{(a.o - o^2 + a^2)} + LC$ seyn, woraus $LC = La$,

und folglich $\int \frac{x\,dx - \frac{1}{2}a\,dx}{ax - x^2 + a^2} = -L\sqrt{(ax - x^2 + a^2)} + La$

$= L\left(\frac{a^2}{ax - x^2 + a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ fließt. Wenn man nach der vorigen Bezeichnung $\int \frac{x\,dx - \frac{1}{2}a\,dx}{ax - x^2 + a^2} = -L\sqrt{(ax - x^2 + a^2)} + C$ bey dem Werthe o des gesuchten Integrals, auch $x = o$ setzet, so ist $o = -La + C$, nähmlich $C = La$; und folglich wieder $\int \frac{x\,dx - \frac{1}{2}a\,dx}{ax - x^2 + a^2} = -L\sqrt{(ax - x^2 + a^2)} + La$

$= L\left(\frac{a^2}{ax - x^2 + a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ wie oben.

§. 715.

Vermöge §. 684. ist $d(a^{mx}) = a^{mx}dx \,.\, mLa$; daraus folgt IV. $\int a^{mx}dx = \frac{a^{mx}}{mLa}$. Nähmlich das Integrale einer Differenzial-Größe, in welcher eine veränderliche Größe als Exponent erscheint, ist gleich der gegebenen Differenzial-Größe getheilet durch das Product aus dem Differenziale des veränderlichen Exponenten in den Logarithmus der Größe, welche auf den veränderlichen Exponenten zu erheben ist. Diesen Ausdruck findet man auch dnrch die Substitution (ein Kunstgriff, welcher in der Folge häufig angewendet wird) wenn man $a^{mx} = y$ setzet. In diesem Falle ist $a^{mx} \,.\, mdxLa = dy$, und $dx = \frac{dy}{y \,.\, mLa}$; folglich ist $\int a^{mx}dx = \int \frac{y\,dy}{y.mLa} = \frac{\int dy}{mLa} = \frac{y}{mLa} = \frac{a^{mx}}{mLa}$ wenn man für y wieder a^{mx} substituiret. Ist nun $a = h =$ der Grundzahl der natürlichen Logarithmen, so ist $\int h^{mx}dx = C + \frac{h^{mx}}{m}$.

§. 716.

§. 716. Fig.

Endlich ist (vermöge §. 681.) $d(\frac{x^n}{n}) = x^{n-1}dx$; daher $\int x^{n-1}dx = \frac{x^n}{n}$. Man setze $n-1=m$, so ist

V. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} = \frac{x^{m+1}dx}{dx(m+1)}$. Diese Regel kann man auf folgende Art mit Worten ausdrucken. Das Integrale eines einnahmigen Differenzials, worin sich was immer für eine Potenz der veränderlichen Größe befindet, wird gefunden, wenn man in der Differenzial-Function den unveränderlichen Exponenten der veränderlichen Größe um 1 vermehret, und sodann diese Function durch das Product, aus dem Differenziale der veränderlichen Größe in den um 1 vermehrten Exponenten, dividiret. Z. B.

$$\int dx = \int x^0 dx = \frac{x^{0+1}dx}{dx(0+1)} = x + C,$$

$$\int ax^{\frac{2}{3}} dx = \frac{ax^{\frac{2}{3}+1}dx}{dx(\frac{2}{3}+1)} = \tfrac{3}{5}ax^{\frac{5}{3}} + C,$$

$$\int -ax^{-\frac{3}{2}} dx = -\frac{ax^{-\frac{3}{2}+1}dx}{dx(-\frac{3}{2}+1)} = 2ax^{-\frac{1}{2}} + C.$$

$$\int (ax^2 - bx^{-3} + 2cx^{-\frac{1}{3}})dx = \int ax^2 dx - \int bx^{-3}dx + \int 2cx^{-\frac{1}{3}}dx$$
$$= \tfrac{1}{3}ax^3 + \tfrac{1}{2}bx^{-2} + 3cx^{\frac{2}{3}} + C.$$

Anmerkung. Wenn in der Formel $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, $m=-1$ seyn sollte; so wird $\int x^{-1}dx = \frac{x^0}{0}$ zum Vorschein kommen. Es ist aber nach richtigen Gründen $\int x^{-1}dx = Lx$; folglich muß in allen Fällen, wo in der Integral-Rechnung ein Glied $\frac{X^0}{0}$ erhalten wird, dafür LX gesetzet werden. Hier

zeigt

Fig. zeigt der Ausdruck $\frac{X^0}{0}$ so viel an, daß das Differenziale $X^{-1}\mathrm{d}X$ durch keine Potenz integriret werden kann, weil es keine Potenz von X gibt, welche das Differenzials $X^{-1}\mathrm{d}X$ zum Vorschein bringen kann.

§. 717.

Auch ein jedes Differenziale, welches aus zusammen gesetzten Potenzen von zwey oder mehreren Gliedern bestehet, läßt sich nach dieser Formel integriren, wenn es also beschaffen ist, daß außer dem Zeichen das wirkliche Differenziale der Größe unter dem Zeichen, verbunden mit einem unveränderlichen Coefficienten, sich befindet. Z. B.

$$\int ax\mathrm{d}x(b+cx^2)^{-\frac{2}{3}} = \frac{a}{2c}\int 2cx\mathrm{d}x(b+cx^2)^{-\frac{2}{3}} = \frac{a}{2c}(b+cx^2)^{\frac{1}{3}} : \tfrac{1}{3}$$

$$= \frac{3a}{2c}(b+cx^2)^{\frac{1}{3}} + \mathrm{C}.$$

Ingleichen $\int(\frac{1}{2}a^2+bx)\,\mathrm{d}x\,\sqrt{(a^2x+bx^2)} =$

$$\tfrac{1}{2}\int(a^2+2bx)\,\mathrm{d}x(a^2x+bx^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}(a^2x+bx^2)^{\frac{3}{2}} : \tfrac{3}{2}$$

$$= \tfrac{1}{3}(a^2x+bx^2)^{\frac{3}{2}}.$$

§. 718.

Diese in den §. 710 bis 717 vorgetragenen Regeln heißen die Fundamental-Regeln der Integral-Rechnung. Sie sind hinlänglich, um ein jedes algebraisches einnnahmiges, und auch ein jedes aus abgesonderten einnahmigen Gliedern zusammen gesetztes Differenziale von einer einzigen veränderlichen Größe zu integriren. Auch viele zusammen gesetzte Differenzialen lassen sich nach diesen Fundamental-Regeln integriren, wenn sie von der gehörigen Form sind. Dabey kommen öfters Differenzialen vor, welche beym ersten Anblicke zu den angeführten Formeln gar nicht zu gehören scheinen. Allein mittelst einer gehörigen Substitution läßt sich leicht entdecken, ob deren Integralen nach den gegebenen Fundamental-Regeln bestimmet werden können. Z. B. Um das Integrale der ge-

gebenen Differenzial-Gleichung $dy = \frac{(3x - 18x^2)dx}{\sqrt[3]{(x^2 - 4x^3)^2}}$ zu finden, setze man $x^2 - 4x^3 = z$. Nun ist $(2x - 12x^2)dx = dz$; daraus ist leicht zu ersehen, daß der Zähler $(3x - 18x^2)\,dx = \frac{3}{2}dz$ ist. Es ist daher $dy = \frac{\frac{3}{2}dz}{\sqrt[3]{z^2}} = \frac{3}{2}z^{-\frac{2}{3}}\,dz$, nähmlich $y = \frac{3}{2}\int z^{-\frac{2}{3}}dz = \frac{3}{2}z^{\frac{1}{3}} : \frac{1}{3} = \frac{9}{2}z^{\frac{1}{3}}$. Endlich ist wenn man wieder für z den vorigen Werth herstellet $y = \frac{9}{2}\sqrt[3]{(x^2 - 4x^3)}$.

Es sey ferner das Integrale von $dy = \frac{5x^3dx}{7 - 4x^4}$ zu bestimmen. Man setze $7 - 4x^4 = z$ daher $-16x^3dx = dz$. Daraus folgt der Zähler des gegebenen Differenzials, nähmlich $5x^3\,dx = -\frac{5}{16}dz$, und $\frac{5x^3\,dx}{7 - 4x^4} = -\frac{5}{16}\cdot\frac{dz}{z}$. Es ist daher $y = -\frac{5}{16}\cdot\int\frac{dz}{z} = -\frac{5}{16}Lz = -\frac{5}{16}L(7 - 4x^4)$ wenn man für z wieder den vorigen Werth substituiret.

§. 719.

Auch die zusammen gesetzten Differenzialen von folgender Gestalt $(a + bx^g + cx^h + \ldots)^k cx^q\,dx\,(A + Bx^m + Cx^n + \ldots)^p$ lassen sich nach den gegebenen Regeln durch unendliche Reihen (welche in gewissen Fällen abbrechen) integriren, die Exponenten k und p mögen wie immer beschaffen seyn. Denn man darf nur mittelst des binomischen Lehrsatzes die Potenzen k und p wirklich entwickeln, die angezeigten Rechnungsarten verrichten, und dann ein jedes Glied für sich integriren. Diese unendlichen Reihen werden zuweilen abbrechen.

Betrachten wir den einfachsten Fall, nähmlich das Binomium $x^m\,dx(a + bx^n)^p$, so werden wir finden, daß das Integrale desselben durch eine endliche Reihe ausgedrucket werden kann,

wenn

Fig. wenn entweder p, oder aber $\frac{m+1}{n}$ eine ganze positive, oder endlich wenn $\frac{m+1}{n}+p$ eine ganze negative und daher $(\frac{m+1}{n}+p)\times -1$ eine ganze positive Zahl ist. Wir wollen die Entwicklung dieses Binomiums im folgenden §. vornehmen.

§. 720.

Algebraisches Integrale des Binomiums $x^m dx(a+bx^n)^p$ wenn I. p, II. $\frac{m+1}{n}$ oder III. $(\frac{m+1}{n}+p)\times -1$ eine ganze positive Zahl ist.

I. Wenn p eine ganze positive Zahl ist, so ist

$$\int x^m dx(a+bx^n)^p = C + a^p \cdot \frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{pa^{p-1}b}{1} \cdot \frac{x^{n+m+1}}{n+m+1}$$
$$+ \frac{p(p-1)a^{p-2}b^2}{1.2} \cdot \frac{x^{2n+m+1}}{2n+m+1}$$
$$+ \frac{p(p-1)(p-2)a^{p-3}b^3}{1.2.3} \cdot \frac{x^{3n+m+1}}{3n+m+1} + \ldots\ldots$$

II. Wenn $\frac{m+1}{n} = q$ eine ganze positive Zahl ist; so ist

$$\int x^m dx(a+bx^n)^p = C + \frac{1}{nb^q} \cdot \left[\frac{(a+bx^n)^{p+q}}{p+q}\right.$$
$$- \frac{(q-1)a}{1} \cdot \frac{(a+bx^n)^{p+q-1}}{p+q-1} + \frac{(q-1)(q-2)a^2}{1.2} \cdot \frac{(a+bx^n)^{p+q-2}}{p+q-2}$$
$$\left. - \frac{(q-1)(q-2)(q-3)a^3}{1.2.3} \cdot \frac{(a+bx^n)^{p+q-3}}{p+q-3} + \ldots\ldots\ldots\right]$$

III.

III. Wenn $(\frac{m+1}{n}+p)\times -1=q$ eine ganze Fig. positive Zahl ist; so ist

$$\int x^m dx(a+bx^n)^p = C+\frac{1}{na^q}\cdot\left[-\frac{1}{p+q}\cdot\left(\frac{a+bx^n}{x^n}\right)^{p+q}\right.$$
$$+\frac{(q-1)b}{(p+q-1)}\cdot\left(\frac{a+bx^n}{x^n}\right)^{p+q-1}-\frac{(q-1)(q-2)b^2}{1.2\,(p+q-2)}\cdot\left(\frac{a+bx^n}{x^n}\right)^{p+q-2}$$
$$\left.+\frac{(q-1)(q-2)(q-3)b^3}{1\cdot 2\cdot 3\,(p+q-3)}\cdot\left(\frac{a+bx^n}{x^n}\right)^{p+q-3}\mp\cdots\cdots\right]$$

Die erste Formel fließt unmittelbar aus dem binomischen Lehrsatze und aus der I. und V. Fundamental-Regel der Integral-Rechnung. Denn es ist

$$x^m dx(a+bx^n)^p = a^p x^m dx+pa^{p-1}bx^{m+n}dx$$
$$+\frac{p(p-1)}{1.2}a^{p-2}b^2\cdot x^{2n+m}dx+\frac{p(p--)(p--2)}{1.2.3}a^{p-3}b^3x^{3n+m}dx+.$$

Folglich ist

$$\text{I.}\int x^m dx(a+bx^n)^p = a^p\cdot\frac{x^{m+1}}{m+1}+\frac{p}{1}\cdot\frac{a^{p-1}bx^{n+m+1}}{n+m+1}$$
$$+\frac{p(p-1)}{1.2}a^{p-2}b^2\cdot\frac{x^{2n+m+1}}{2n+m+1}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die zweyte Formel wird durch Substitution aus dem binomischen Lehrsatze und aus der V. Fundamental-Regel abgeleitet. Man setze nähmlich

$a+bx^n=z$; so ist $x=\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=b^{-\frac{m}{n}}(z-a)^n$,

$$dx=\frac{1}{n}b^{-\frac{1}{n}}dz(z-a)^{\frac{1}{n}-1}, \text{ und } x^m=b^{\frac{-m}{n}}(z-a)^{\frac{-}{n}}.$$

Daraus folgt $\int x^m dx(a+bx^n)^p=$

$$\frac{1}{nb^{\frac{m+1}{n}}}\cdot\int z^p dz(z--a)^{\frac{m+1}{n}-1}=\frac{1}{nb^q}\cdot\int z^p dz(z-a)^{q-1}, \text{ wenn wir}$$

$\frac{m+1}{n}=q$ setzen. Es ist aber

$$z^p dz(z-a)^{q-1}=z^{p+q-1}dz-(q-1)az^{p+q-2}dz$$
$$+\frac{(q-1)(q-2)}{1.2}a^2z^{p+q-3}dz-\frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{1.2.3}\cdot a^3z^{p+q-4}dz+$$

und

$\int z$

Fig.

$$\int z^p\,dz(z-a)^{q-1} = \frac{z^{p+q}}{p+q} - \frac{(q-1)a}{1}\cdot\frac{z^{p+q-1}}{p+q-1}$$

$$+\frac{(q-1)(q-2)a^2}{1.2}\cdot\frac{z^{p+q-2}}{p+q-2}$$

$$-\frac{(q-1)(q-2)(q-3)a^3}{1.2.3}\cdot\frac{z^{p+q-3}}{p+q-3}+\ldots\ldots;$$

folglich ist

$$\text{II. } \int x^m\,dx(a+bx^n)^p = \frac{1}{nb^q}\cdot\left[\frac{(a+bx^n)^{p+q}}{p+q}\right.$$

$$-\frac{(q-1)a}{1}\cdot\frac{(a+bx^n)^{p+q-1}}{p+q-1}+\frac{(q-1)(q-2)a^2}{1.2}\cdot\frac{(a+bx^n)^{p+q-2}}{p+q-2}$$

$$\left.-\frac{(q-1)(q-2)(q-3)a^3}{1.2.3}\cdot\frac{(a+bx^n)^{p+q-3}}{p+q-3}+\ldots\ldots\right]$$

Damit die dritte Formel hergeleitet werde, muß man ohne Veränderung des Werthes die Größe inner der Klammer durch x^n diviren, und dann eben so wie bey der zweyten Formel verfahren. Es ist nähmlich

$$\int x^m\,dx(a+bx^n)^p = \int x^{m+np}\,dx\left(\frac{a+bx^n}{x^n}\right)^p.$$

Nun setze man $\frac{a+bx^n}{x^n} = z$; so ist $x = a^{\frac{1}{n}}(z-b)^{-\frac{1}{n}}$,

$$dx = -\frac{1}{n}a^{\frac{1}{n}}\,dz(z-b)^{-\frac{1}{n}-1},\quad x^{m+nq} = a^{\frac{m}{n}+p}(z-b)^{-\frac{m}{n}-p};\text{ folglich}$$

$$\text{ist auch } \int x^{m+np}\,dx\left(\frac{a+bx^n}{x^n}\right)^p = -\frac{1}{n}a^{\frac{m+1}{n}+q}\int z^p\,dz(z-b)^{-\frac{m+1}{n}-p-1}$$

$$= \frac{1}{na^q}\int -z^p\,dz(z-b)^{q-1},\text{ wenn man } \frac{-m-1}{n}-p = q\text{, oder}$$

$$\left(\frac{m+1}{n}+p\right)\times -1 = q \text{ setzet. Ferner ist}$$

$$-z^p\,dz(z-b)^{q-1} = -z^{p+q-1}dz+\left(\frac{q-1}{1}\right).bz^{p+q-2}dz$$

$$-\frac{(q-1)(q-2)}{1.2}b^2z^{p+q-3}dz+\frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{1.2.3}.b^3z^{p+q-4}dz-+$$

und

$\int$

$$\int -z^p dz(z-b)^{q-1} = -\frac{z^{p+q}}{p+q} + \frac{(q-1)b}{1}\cdot\frac{z^{p+q-1}}{p+q-1}$$ Fig.

$$-\frac{(q-1)(q-2)}{1.2}b^2\cdot\frac{z^{p+q-2}}{p+q-2} + \frac{(q-1)(q-2)(q-3)b^3}{1.2.3}\cdot$$

$$\frac{z^{p+q-3}}{p+q-3} - + \ldots\ldots$$

Endlich ist, wenn man für z den gehörigen Werth wieder substituiret,

III. $$\int x^m dx\,(a+bx^n)^p = C + \frac{1}{na^q}\left[-\frac{1}{p+q}\cdot\left(\frac{a+bx^n}{x^n}\right)^{p+q}\right.$$

$$+\frac{(q-1)b}{p+q-1}\cdot\left(\frac{a+bx^n}{x^n}\right)^{p+q-1} - \frac{(q-1)(q-2)b^2}{1.2(p+q-2)}\cdot\left(\frac{a+bx^n}{x^n}\right)^{p+q-2}$$

$$\left.+\frac{(q-1)(q-2)(q-3)b^3}{1.2.3\,(p+q-3)}\cdot\left(\frac{a+bx^n}{x^n}\right)^{p+q-3} \mp \ldots\ldots\right]$$

Das Gesetz, nach welchem jede dieser Reihen fortschreitet, ist aus dem ersten Anblicke zu erkennen. Auch ist leicht einzusehen, daß die Reihen abbrechen müssen, d. h. daß das Integrale des vorgelegten Binominms durch eine endliche Anzahl der Glieder ausgedrucket wird, mittelst der ersten Reihe wenn p, mittelst der zweyten wenn $\frac{m+1}{n} = q$, und mittelst der dritten Reihe wenn $(\frac{m+1}{n} + p) \times -1 = q$, eine ganze positive Zahl ist. Noch ist dabey zu erinnern, daß wenn bey der Entwicklung ein Glied unter der Gestalt $\frac{AX^\circ}{0}$ erscheinen würde, man dafür (vermöge §. 716. Anm.) A.Log. nat. X setzen müsse.

Auch die Differenzialen von der Gestalt $ax^s dx(bx^h + cx^k)^p$ lassen sich nach diesen allgemeinen Formeln integriren, indem man ohne Veränderung des Werthes ein Glied der Größe unter dem Zeichen von der veränderlichen Größe befreyet, wenn dieses veränderte Binomium die oben angeführten Ei-

genschaften besitzet. Es ist nähmlich $ax^g\,dx\,(bx^h+cx^k)^p = ax^{g+kp}\,dx\,(bx^{h-k}+c)^p$; oder auch $ax^g\,dx\,(bx^h+cx^k)^p = a\,x^{g+hp}\,dx(b+cx^{k-h})^p$. Wir wollen den Gebrauch dieser Formeln durch einige Beyspiele erläutern.

Es sey $\int x^{-\frac{9}{2}}\,dx\,(a^{\frac{3}{2}}\,x-x^{\frac{5}{2}})^2$ zu entwickeln; so ist $\int x^{-\frac{9}{2}}\,dx\,(a^{\frac{3}{2}}\,x-x^{\frac{5}{2}})^2 = \int x^{-\frac{5}{2}}\,dx\,(a^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}})^2$. Nun ist $m=-\frac{5}{2}$, $n=\frac{3}{2}$, $p=2$, $a=a^{\frac{3}{2}}$, $b=-1$. Substituiret man diese Werthe in der I. Formel und reduciret gehörig, so ist

$$\int x^{-\frac{9}{2}}\,dx\,(a^{\frac{3}{2}}x-x^{\frac{5}{2}})^2 = -\tfrac{2}{3}a^3x^{-\frac{3}{2}} - 2a^{\frac{3}{2}}Lx + \tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}.$$

Ferner wird $\int \frac{x^{15}\,dx}{(1+x^4)^2} = \int x^{15}\,dx\,(1+x^4)^{-2}$ nach der II. Formel gefunden, weil $\frac{m+1}{n} = q = \frac{15+1}{4} = 4$ eine ganze positive Zahl ist. Hier ist $p=-2$, $n=4$, $a=1$, $b=1$. Nach gehöriger Reduction erhält man

$$\int \frac{x^{15}\,dx}{(1+x^4)^2} = C+\tfrac{1}{8}(1+x^4)^2-\tfrac{3}{4}(1+x^4)+\tfrac{3}{4}L(1+x^4) + \frac{1}{4(1+x^4)}.$$

Hat man endlich $\int x^{-8}\,dx\,(3-5x^2)^{\frac{3}{2}}$ zu integriren, so ist $m=-8$, $n=2$, $p=\frac{3}{2}$, $a=3$, $b=-5$, und $(\frac{-8+1}{2}+\frac{3}{2})\times -1 = q = 2$ eine ganze positive Zahl. Folglich ist nach der dritten Formel das gesuchte Integrale, nähmlich

$$\int x^{-8}\,dx\,(3-5x^2)^{\frac{3}{2}} = C-\tfrac{1}{6}\tfrac{1}{3}\left(\frac{3-5x^2}{x}\right)^{\frac{7}{2}} - \tfrac{1}{9}\left(\frac{3-5x^2}{x^2}\right)^{\frac{5}{2}}.$$

Folgende Beyspiele kann der Anfänger zur mehreren Uebung nach den oben angesetzten Formeln aufzulösen versuchen. Nähmlich

(1.

Fig.

1.) $\frac{x^5\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$; 2.) $2x\,dx\,(1+x^{-2})^{-2}$;

3.) $\frac{dx}{x+x^3}$; 4.) $\frac{x^{\frac{9}{2}}\,dx}{(x+x^{\frac{3}{2}})^3}$; 5.) $(x^{-\frac{1}{3}}-2x^{-3})$

$dx(1+ax^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{3}}$; 6.) $x^3\,dx(x^4-a^2x^2)^3$; 7.) $\frac{a^3\,dx}{x^2\sqrt{(ax+x^2)}}$;

8.) $\frac{a^{\frac{2}{3}}x^2\,dx\sqrt[3]{(a^3+2a^2x+ax^2)}}{\sqrt{(a+x)}}$; u. s. w.

II. Abschnitt.

Integrirung der Binomien durch natürliche Logarithmen und durch Kreisbogen.

§. 721.

Integralen der Binomien von der einfachsten Gestalt ausgedruckt durch Logarithmen und durch Kreisbogen.

$$\text{I.} \int \frac{dx}{a+bx^2} =$$

$$\begin{cases} \int \frac{dx}{\pm\alpha\mp\beta x^2} = C \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} . L \frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta x^2}}{\sqrt{(\pm\alpha\mp\beta x^2)}} \\ \int \frac{dx}{\alpha+\beta x^2} = C + \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} . \text{arc tang } \sqrt{\frac{\beta x^2}{\alpha}} \end{cases}$$

$$\text{II.} \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(a+bx)} =$$

$$\begin{cases} \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(\pm\alpha\mp\beta x)} = C \pm \frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}} . L \frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta x}}{\sqrt{(\pm\alpha\mp\beta x)}} \\ \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(\alpha+\beta x)} = C + \frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}} . \text{arc tang. } \sqrt{\frac{\beta x}{\alpha}} \end{cases}$$

Fig.

$$\text{III.} \int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)}} =$$

$$\begin{cases} \int \frac{dx}{\sqrt{(\beta x^2 \pm \alpha)}} = C + \frac{1}{\sqrt{\beta}} . L[\sqrt{\beta x^2} + \sqrt{(\beta x^2 \pm \alpha)}] \\ \int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha - \beta x^2)}} = C + \frac{1}{\sqrt{\beta}} . \text{arc. tang} \sqrt{\frac{\beta x^2}{\alpha - \beta x^2}} \end{cases}$$

$$\text{IV.} \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} \sqrt{(a+bx)}} =$$

$$\begin{cases} \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} \sqrt{(\beta x \pm \alpha)}} = C + \frac{2}{\sqrt{\beta}} . L[\sqrt{\beta x} + \sqrt{(\beta x \pm \alpha)}] \\ \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} \sqrt{(\alpha - \beta x)}} = C + \frac{2}{\sqrt{\beta}} . \text{arc.tang.} \sqrt{\frac{\beta x}{(\alpha - \beta x)}} \end{cases}$$

$$\text{V.} \int \frac{dx}{x \sqrt{(a+bx^2)}} =$$

$$\begin{cases} \int \frac{dx}{x \sqrt{(\alpha \pm \beta x^2)}} = C - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} . L \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{(\alpha \pm \beta x^2)}}{x} \\ \int \frac{dx}{x \sqrt{(\beta x^2 - \alpha)}} = C + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} . \text{arc.tang.} \sqrt{\left(\frac{\beta x^2 - \alpha}{\alpha}\right)} \end{cases}$$

$$\text{VI.} \int \frac{dx}{x \sqrt{(a+bx)}} =$$

$$\begin{cases} \int \frac{dx}{x \sqrt{(\alpha \pm \beta x)}} = C - \frac{2}{\sqrt{\alpha}} . L \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{(\alpha \pm \beta x)}}{\sqrt{x}} \\ \int \frac{dx}{x \sqrt{(\beta x - \alpha)}} = C + \frac{2}{\sqrt{\alpha}} . \text{arc.tang.} \sqrt{\left(\frac{\beta x - \alpha}{\alpha}\right)} \end{cases}$$

$$\text{VII.} \int \frac{dx}{x(a+bx)} =$$

$$\begin{cases} \int \frac{dx}{x(\alpha \pm \beta x)} = C - \frac{1}{\alpha} . L \left(\frac{\alpha \pm \beta x}{x}\right) \\ \int \frac{dx}{x(\beta x \pm \alpha)} = C \mp \frac{1}{\alpha} . L \left(\frac{\beta x \pm \alpha}{x}\right) \end{cases}$$

Damit

Damit wir bey der Herleitung dieser Formeln die gebrochenen Exponenten der beständigen Größen vermeiden; so wollen wir durchgängig $\alpha = a^2$ und $\beta = b^2$ setzen. Fig.

1.) Die logarithmischen Formeln sind aus der III. Fundamental-Regel der Integral-Rechnung mittelst Zertheilung der gebrochenen Function in mehrere Brüche, oder auch mittelst einer schicklichen Substitution abgeleitet worden.

In der I. Formel ist $\frac{dx}{a^2 - b^2 x^2} = \frac{1}{b^2} \cdot \frac{dx}{a^2 b^{-2} - x^2}$.

Es ist aber $\frac{dx}{a^2 b^{-2} - x^2} = \frac{dx}{2ab^{-1}(ab^{-1} + x)} + \frac{dx}{2ab^{-1}(ab^{-1} - x)}$;

folglich ist $\int \frac{dx}{a^2 - b^2 x^2} = \frac{1}{2ab} \cdot \left(\int \frac{dx}{ab^{-1} + x} + \int \frac{dx}{ab^{-1} - x} \right)$

$$= \frac{1}{2ab} \cdot [L(ab^{-1} + x) - L(ab^{-1} - x)]$$

$$= \frac{1}{2ab} \cdot L \frac{ab^{-1} + x}{ab^{-1} - x} = \frac{1}{2ab} \cdot L \frac{(a + bx)^2}{a^2 - b^2 x^2}$$

$$= \frac{1}{ab} \cdot L \frac{a + bx}{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)}}.$$

Endlich ist wenn wir $\alpha^{\frac{1}{2}}$ für a und $\beta^{\frac{1}{2}}$ für b substituiren, $\int \frac{dx}{\alpha - \beta x^2} = C + \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \times L \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} x^2}{\sqrt{(\alpha - \beta x^2)}}$.

Eben so findet man auch $\int \frac{dx}{\beta x^2 - \alpha}$.

Die II. Formel läßt sich aus der I. ableiten, wenn man $x = z^2$ setzet. Es ist sodann $dx = 2z\,dz$. Folglich ist $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(\pm\alpha \mp \beta x)} = \int \frac{2dz}{\pm\alpha \mp \beta z^2}$. Nun ist aber nach der I. Formel $\int \frac{dz}{\pm\alpha \mp \beta z^2} = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \cdot L \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} z^2}{\sqrt{(\pm\alpha \mp \beta z^2)}}$; daher ist auch

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(\pm\alpha \mp \beta x)} = C \pm \frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}} \cdot L \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} x}{\sqrt{(\pm\alpha \mp \beta x)}}.$$

Die

Fig. Die III. Formel wird erhalten, wenn man den Nenner $\sqrt{(b^2x^2 \pm a^2)} = z - bx$ setzet. Es ist sodann
$b^2x^2 \pm a^2 = z^2 - 2bzx + b^2x^2$, $x = \frac{1}{2}b^{-1}z(1 \mp a^2z^{-2})$,
$dx = \frac{1}{2}b^{-1}dz(1 \pm a^2z^{-2})$, $z - bx = \frac{1}{2}z(1 \pm a^2z^{-2})$;
folglich ist $\int \frac{dx}{\sqrt{(b^2x^2 \pm a^2)}} = \int \frac{1}{b} \cdot \frac{dz}{z} = \frac{1}{b} . Lz$ und

$$\frac{dx}{\sqrt{(\beta x^2 \pm \alpha)}} = C + \frac{1}{\sqrt{\beta}} . L[\sqrt{\beta x^2} + \sqrt{(\beta x^2 \pm \alpha)}],$$

wenn man wieder für a, b und z die gehörigen Werthe herstellet.

Die IV. Formel wird aus der III. eben so wie die II. aus der I. erhalten, wenn man $x = z^2$ setzet.

Um die V. Formel zu entwickeln, setze man $x = az^{-1}$. Es ist sodann $dx = -az^{-2}\,dz$, und
$\sqrt{(a^2 \pm b^2x^2)} = \sqrt{(a^2 \pm a^2b^2z^{-2})} = a\sqrt{(1 \pm b^2z^{-2})}$.

Folglich ist $\frac{dx}{x\sqrt{(a^2 \pm b^2x^2)}} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(z^2 \pm b^2)}}$.

Nun ist nach der III. Formel

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(z^2 \pm b^2)}} = L[z + \sqrt{(z^2 \pm b^2)}];$$ daher ist

$$-\frac{1}{a}\int \frac{dz}{\sqrt{(z^2 \pm b^2)}} = -\frac{1}{a} . L[z + \sqrt{(z^2 \pm b^2)}],$$ und

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(\alpha \pm \beta x^2)}} = C - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} . L\left[\frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{(\alpha \pm \beta x^2)}}{x}\right],$$ wenn man für z, a und b gehörig substituiret.

Die VI. Formel wird aus der V. erhalten, wenn man $x = z^2$ setzet.

Die VII. Formel läßt sich entweder durch die Zertheilung der Brüche oder aber durch die III. Formel im §. 720. entwickeln.

2.) Der trigonometrische Theil dieser Formeln wird aus §. 686. durch den umgekehrten Weg abgeleitet. Dabey muß man sich zurück erinnern, wie die Bogenlänge durch eine trigonometrische Function eines Winkels für den Halbmesser $= A$ ausgedruckt, ohne Veränderung des Werthes

auf

auf die Bogenlänge der trigonometrischen Function von eben Fig.
demselben Winkel für den Halbmesser = 1 gebracht werden
kann. Es sey nähmlich die Bogenlänge z = arc funct. x
für den Halbmesser = A, so ist $z = A$. arc funct. $\frac{x}{A}$ für
den Halbmesser = 1.

In der I. Formel ist $\frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{a^2 b^{-2} dx}{a^2 b^{-2} + x^2}$.

Es ist aber (vermöge §. 686. III.) $\frac{a^2 b^{-2} dx}{a^2 b^{-2} + x^2}$
= d (arc tang x) für den Halbmesser $\frac{a}{b}$; folglich ist

$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab}$. arc tang $\frac{bx}{a}$. Nähmlich es ist

$\int \frac{dx}{\alpha + \beta x^2} = C + \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}$. arc. tang $\sqrt{\frac{\beta x^2}{\alpha}}$.

Die II. Formel wird eben so wie bey dem logarithmischen Integrale gefunden.

In der dritten Formel ist
$\frac{dx}{\sqrt{(a^2-b^2x^2)}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{ab^{-1} dx}{\sqrt{(a^2b^{-2}-x^2)}}$. Es ist aber (vermöge §. 686. I.) $\frac{ab^{-1} dx}{\sqrt{(a^2 b^{-2} - x^2)}} = d$ (arc. sin x) für
den Halbmesser $= \frac{a}{b}$; folglich ist

$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-b^2x^2)}} = \frac{1}{b}$. arc . sin $\frac{bx}{a}$, nähmlich

$\int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha-\beta x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$. arc. sin $\sqrt{\frac{\beta x^2}{\alpha}}$. Ferner ist wenn
der Sinus $= \sqrt{\frac{\beta x^2}{\alpha}}$ ist, der Cosinus eben desselben Win-
kels $= \sqrt{(1 - \frac{\beta x^2}{\alpha})} = \sqrt{(\frac{\alpha-\beta x^2}{\alpha})}$, und die Tangente

=

Fig. $= \sqrt{\frac{\beta x^2}{\alpha - \beta x^2}}$; folglich ist auch

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha - \beta x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \cdot \text{arc tang} \sqrt{\frac{\beta x^2}{\alpha - \beta x^2}}.$$

Die IV. Formel fließt aus der III. wenn man $x = z^2$ setzet.

In der V. Formel ist $\frac{dx}{x\sqrt{(b^2x^2 - a^2)}} = \frac{b}{a^2} \cdot \frac{a^2 b^{-2} dx}{x\sqrt{(x^2 - a^2 b^{-2})}}$.

Nun ist (vermöge §. 686. V.) $\frac{a^2 b^{-2} dx}{x\sqrt{(x^2 - a^2 b^{-2})}} =$

d(arc . sec x) für den Halbmesser $= \frac{a}{b}$ folglich ist

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(b^2x^2 - a^2)}} = \frac{1}{a} \cdot \text{arc . sec } \frac{bx}{a}.$$ Nähmlich es ist

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(\beta x^2 - \alpha)}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \text{arc . sec } \sqrt{\frac{\beta x^2}{\alpha}}.$$ Ferner ist, wenn

die Secante eines Bogens $= \sqrt{\frac{\beta x^2}{\alpha}}$ ist, die Tangente eben

desselben Bogens $= \sqrt{(\frac{\beta x^2 - \alpha}{\alpha})}$. Folglich ist auch

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(\beta x^2 - \alpha)}} = C + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \text{arc tang} \sqrt{(\frac{\beta x^2 - \alpha}{\alpha})}.$$

Die VI. Formel wird aus der V. durch die schon angezeigte Substitution abgeleitet.

Mittelst der angeführten sieben Formeln lassen sich sehr viele Differenzial-Größen durch eine bloße Vergleichung und Substitution entwickeln. Im folgenden §. werden zwey Verwandlungs-Formeln aufgestellet, welche Differenzial-Größen von einer bestimmten Gestalt durch Entwickelung von einem oder auch von mehreren algebraischen Gliedern endlich auf eine Form bringen, welche mit einer der angeführten Formeln überein kommt. Alle diese Formeln sind durch Logarithmen oder durch Kreisbogen, nähmlich durch transcendente Größen entwickelt (Größen, deren Werth nicht vollkommen genau, sondern nur vermittelst einer nach

Be-

Belieben getriebenen Annäherung so wie bey der Auszie- Fig.
hung der Wurzeln aus irrationalen Zahlen, in Theilen einer bestimmten Einheit ausgedruckt werden kann) Da man nun bey den Logarithmen und Kreisbogen sich dem wahren Werthe so sehr nähern kann, als es nur immer nothwendig ist; so ist für die Anwendung eines durch Logarithmen oder durch Kreisbogen ausgedruckten Integrales eben so viel, als wenn dasselbe durch bloße algebraische Größen ausgedrucket wäre.

§. 722.

Die im §. 721. entwickelten Formeln lassen sich allgemein durch $\int x^r \, dx \, (a + bx^n)^q$ vorstellen. Man kann zwischen einem jeden Binomium $\int x^m \, dx \, (a + bx^n)^p$ und zwischen dem bekannten $\int x^r \, dx \, (a + bx^n)^q$ eine Gleichung in einer endlichen Anzahl der Glieder ausgedruckt ansetzen, wenn

1.) $p = q$, und $\frac{m - r}{n}$ eine ganze positive Zahl ist; und

wenn 2.) $p = -q$, und zugleich $\frac{m - r}{n}$ ganze positive oder negative Zahlen sind.

A) Gleichung zwischen $\int x^m \, dx \, (a + bx^n)^p$ und zwischen $\int x^r \, dx \, (a + bx^n)^q$ wenn $p = q$ und $\frac{m - r}{n}$ eine ganze positive Zahl ist, wobey wegen der Kürze des Ausdruckes $1 + m - n = c$, und $1 + m + np = f$ gesetzet worden ist.

Für $\frac{m - r}{n} = 1$ ist

$$\int x^m \, dx (a + bx^n)^p = C + \frac{x^c (a + bx^n)^{p+1}}{bf} - \frac{ac}{bf} \int x^r \, dx (a + bx^n)^p.$$

Für

Fig.

Für $\frac{m-r}{n} = 2$ ist

$$\int x^m dx(a+bx^n)^p = C + \frac{x^c(a+bx^n)^{p+1}}{bf} - \frac{acx^{c-n}(a+bx^n)^{p+1}}{b^2f(f-n} + \frac{a^2c(c-n)}{b^2f(f-n)} \cdot \int x^r dx(a+bx^n)^p.$$

Für $\frac{m-r}{n} = g$ ist

$$x^m dx(a+bx^n)^p = C + \frac{x^c(a+bx^n)^{p+1}}{bf} - \frac{acx^{c-n}(a+bx^n)^{p+1}}{b^2f(f-n)} + \frac{a^2c(c-n)x^{c-2n}(a+bx^n)^{p+1}}{b^3f(f-n)(f-2n)} - \cdots\cdots\cdots$$

$$\pm \frac{a^{g-1}c(c-n)(c-2n)\cdots[c-(g-2)n]x^{c-(g-1)n}(a+bx^n)^{p+1}}{b^gf(f-n)(f-2n)\cdots\cdots[f-(g-1)n]} \mp \frac{a^gc(c-n)(c-2n)\cdots[c-(g-1)n]}{b^gf(f-n)(f-2n)\cdots\cdots[f-g-1)n]} \cdot \int x^r dx(a+bx^n)^p$$

B) Bestimmung des Integrals $\int x^m dx(a+bx^n)^p$ durch $\int x^{m+gn} dx(a+bx^n)^q$, welches letztere mittelst der Gleichung A sich durch $\int x^r dx(a+bx^n)^q$ angeben läßt, wenn $p-q$ und $\frac{m-r}{n}$ ganze Zahlen sind, die erste positiv, die zweyte positiv oder negativ.

Für $p-q=1$ ist

$$\int x^m dx(a+bx^n)^p = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1} - \frac{bnp}{m+1} \cdot \int x^{m+n} dx(a+bx^n)^q.$$

Für $p-q=2$ ist

$$\int x^m dx(a+bx^n)^p = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1} - \frac{bnpx^{m+1+n}(a+bx^n)^{p-1}}{(m+1)(m+1+n)} + \frac{b^2n^2p(p-1)}{(m+1)(m+1+n)} \int x^{m+2n} dx(a+bx^n)^{p-2}.$$

Für

Für $p - q = g$ ist Fig.

$$\int x^m dx(a+bx^n)^p = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1} - \frac{bnpx^{m+1+n}(a+bx^n)^{p-1}}{(m+1)(m+1+n)}$$
$$+ \frac{b^2n^2p(p-1)x^{m+1+2n}(a+bx^n)^{p-2}}{(m+1)(m+1+n)(m+1+2n)} - \ldots\ldots\ldots$$
$$\pm \frac{b^{g-1}n^{g-1}p(p-1)\ldots(p+2-g)x^{m+1+(g-1)n}(a+bx^n)^{p+1-g}}{(m+1)(m+1+n)(m+1+2n)\ldots[m+1+(g-1)n]}$$
$$\mp \frac{b^gn^gp(p-1)(p-2)\ldots(p+1-g)}{(m+1)(m+1+n)\ldots[m+1+(g-1)n]} \int x^{m+gn} dx(a+bx^n)^q$$

1) Um die erste Verwandlungs-Formel A) zu erhalten, so ist

$$d[x^{1+m-n}(a+bx^n)^{p+1}] = (1+m-n)x^{m-n}dx(a+bx^n)^{p+1}$$
$$+ b(p+1)nx^m dx(a+bx^n)^p.$$

Es ist aber $(a+bx^n)^{p-1} = (a+bx^n)(a+bx^n)^p = a(a+bx^n)^p + bx^n(a+bx^n)^p$; folglich ist

$$d[x^{1+m-n}(a+bx^n)^{p+1}] = a(1+m-n)x^{m-n}dx(a+bx^n)^p$$
$$+ b(1+m-n)x^m dx(a+bx^n)^p + b(p+1)nx^m dx(a+bx^n)^p$$
$$= a(1+m-n)x^{m-n}dx(a+bx^n)^p$$
$$+ b(1+m+np)x^m dx(a+bx^n)^p.$$

Es ist also auch

$$x^m dx(a+bx^n)^p = d\left[\frac{x^{1+m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{b(1+m+np)}\right]$$
$$- \frac{a(1+m-n)}{b(1+m+np)} x^{m-n}dx(a+bx^n)^p.$$

Daraus folgt, wenn man ein jedes Glied für sich integriret, und $1+m-n = c$, $1+m+np = f$, und $m-n = r$, nähmlich $\frac{m-r}{n} = 1$ setzet,

$$\int x^m dx(a+bx^n)^p = C + \frac{x^c(a+bx^n)^{p+1}}{bf} - \frac{ac}{bf}\int x^r dx(a+bx^n)^p.$$

Setzen wir in dieser Formel $m-n$ statt m; daher auch $c-n$ statt c und $f-n$ statt f; so ist

$$\int x^{m-n} dx(a+bx^n)^p = x^{c-n}\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{b(f-n)}$$
$$- \frac{a(c-n)}{b(f-n)} \int x^{m-2n} dx(a+bx^n)^p.$$

Die-

Fig. Dieser Werth in die obere Reihe substituiret gibt

$$\int x^m dx(a+bx^n)^p = C + \frac{x^c(a+bx^n)^{p+1}}{bf} - \frac{acx^{c-n}(a+bx^n)^{p+1}}{b^2f(f-n)} -$$

$$+ \frac{a^2c(c-n)}{b^2f(f-n)} \int x^r dx(a+bx^n)^p \text{ für } m-2n=r \text{ oder } \frac{m-r}{n} = 2.$$

Auf eben dieselbe Art läßt sich auch die Gleichung für $\frac{m-r}{n} = 3$ u. s. w. finden.

2) Die zweyte Verwandlungs-Formel B) wird eben so wie die erste durch die Zertheilung entwickelt. Nähmlich es ist

$$d\left[\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1}\right] = x^m dx(a+bx^n)^p + \frac{bpnx^{m+n}dx(a+bx^n)^{p-1}}{m+1}.$$

folglich ist $\int x^m dx(a+bx^n)^p = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1} - \frac{bpn}{m+1} \int x^{m+n} dx(a+bx^n)^{p-1}$

Setzen wir ferner in dieser Gleichung $m+n$ statt m und $p-1$ statt p; so ist

$$\int x^{m+n} dx(a+bx^n)^{p-1} = \frac{x^{m+1+n}(a+bx^n)^{p-1}}{m+1+n} -$$

$$- \frac{bn(p-1)}{m+1+n} \cdot \int x^{m+2n} dx(a+bx^n)^{p-2}$$

daher auch

$$\int x^m dx(a+bx^n)^p = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1} - \frac{bnpx^{m+1+n}(a+bx^n)^{p-1}}{(m+1)(m+1+n)}$$

$$+ \frac{b^2n^2p(p-1)}{(m+1)(m+1+n)} \cdot \int x^{m+2n} dx(a+bx^n)^{p-2}.$$

Setzen wir wieder oben $m+2n$ statt m, und $p-2$ statt p, und substituiren den dadurch erhaltenen Werth in der zweyten Gleichung; so wird die Gleichung für $p-q=3$ erhalten u. s. w.

Die

Die zweyte Verwandlungs-Formel B) kann auch sehr kurz durch ein der Division ähnliches Verfahren auf folgende Art abgeleitet werden. Fig.

$$\int x^m dx(a+bx^n)^p = \frac{x^{m+1}}{m+1}(a+bx^n)^p - \frac{bnp\,x^{m+n+1}(a+bx^n)^{p-1}}{(m+1)(m+1+n)}$$

$$\pm x^m dx(a+bx^n)^p \pm \frac{bpn}{m+1} x^{m+n} dx\,(a+bx^n)^{p-1}$$

$$\overline{\mp \frac{bpn}{m+1} \int x^{m+n} dx(a+bx^n)^{p-1}}$$

$$\overline{\mp \frac{bpn}{m+1} x^{m+n} dx(a+bx^n)^{p-1}}$$

$$\overline{+ \frac{b^2n^2p(p-1)}{(m+1)(m+1+n)} x^{m+2n} dx(a+bx^n)^{p-2}}$$

$$+ \frac{b^2n^2p(p-1)}{(m+1)(m+1+n)} \int x^{m+2n} dx(a+bx^n)^{p-2}$$

Man sehe nähmlich den Factor $(a+bx^n)^p$ für unveränderlich an, und integrire in dieser Voraussetzung die Differenzial-Größe $x^m dx(a+bx^n)^p$. Da aber auch der Factor $(a+bx^n)^p$ veränderlich ist, so differenzire man vollständig das gefundene erste Glied des Integrals. Dieses Differenziale ziehe man von der gegebenen Differenzial-Größe ab, so erhält man einen Unterschied, welcher noch integriret werden soll. In demselben betrachte man wieder bey der Integrirung den binomischen Factor $(a+bx^n)^{p-1}$ als unveränderlich; bey der Differenzirung aber des so gefundenen Integrales aber für veränderlich; u. s. w. Auf diese Art verfahre man so lange, bis man das Gesetz einsieht, nach welchem die Reihe fortlaufen muß.

Beyspiele. Durch die Formel A) läßt sich $\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{(x^2+c^2)}}$ bestimmen, weil man dasselbe auf das bekannte Integr. (§. 721.

III.) $\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)}}$ bringen kann, da $\frac{6-0}{2} = 3$ eine ganze positive Zahl ist.

Fig. Es ist nähmlich (wenn man $m=6$, $r=0$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$, $a=c^2$, $b=1$ setzet) $1+m-n=1+6-2=5=c$, und $1+m+np=1+6-1=6=f$.

Substituiret man diese Werthe in der allgemeinen Reihe A) bey $\frac{m-r}{n}=3$; so ist

$$\int x^6 dx(x^2+c^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}x^5(x^2+c^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{6.4}c^2x^3(x^2+c^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\frac{5.3}{6.4.2}.c^4x(x^2+c^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{5.3.1}{6.4.2}c^6\int dx(x^2+c^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Es ist aber (vermöge §. 721. III.), wenn man daselbst $\alpha=c^2$ und $\beta=1$ setzet, $\int dx(x^2+c^2)^{-\frac{1}{2}} = L[x+V(x^2+c^2)]$; folglich ist, wenn man zugleich gehörig reduciret,

$$\int -\frac{x^6 dx}{V(x^2+c^2)} = C - 5x(\frac{x^4}{30} - \frac{2c^2x^2}{48} + \frac{c^4}{16})V(x^2+c^2)$$
$$+\frac{5}{16}c^6 L[x+V(x^2+c^2)].$$

Aus diesem Beyspiele ist nun deutlich zu ersehen, wie die gefundene allgemeine Formel für eine ganze positive Zahl $\frac{m-r}{n}$ zu gebrauchen ist. Sollte aber $\frac{m-r}{n}$ eine ganze negative, folglich $\frac{r-m}{n}$ eine ganze positive Zahl seyn; so muß man das bekannte $\int x^r dx(a+bx^n)^q$ auf das gesuchte Integrale $\int x^m dx(a+bx^n)^p$ bringen, und sodann ergibt sich das letzte sehr leicht durch eine bloße Versetzung. Es sey z.B. $\int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)} = x^{-2}dx(a+bx^2)^{-1}$ zu finden, so ist, wenn man das bekannte Integr. (§. 721. I.) $\int dx(a+bx^2)^{-1}$ aushebt, $\frac{m-r}{n} = \frac{-2-0}{2} = -1$ eine negative Zahl; folglich bestimme man das bekannte Integrale durch das gesuchte. Man setze nähmlich $m=0$, $p=-1$, $n=+2$, $1+m-n=1+0-2=-1=c$, $1+m+np=1+0-2=-1=f$; so ist

$$\int dx(a+bx^2)^{-1} = \frac{-x^{-1}}{b} - \frac{a}{b}\int x^{-2}\,dx(a+bx^2)^{-1}.$$ Folg- Fig.

lich ist $\int x^{-2}dx(a+bx^2)^{-1} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a}\int dx\,(a+bx^2)^{-1}$,

welches letztere dann entweder durch Logarithmen oder durch Kreisbogen noch ferner entwickelt wird, nachdem die beständigen Größen a und b beschaffen sind.

Bey der Verwandlungs-Formel B) ist deutlich zu ersehen, daß sich das letztere Integrale $\int x^{m+gn}dx(a+bx^n)^q$ auf das bekannte Integrale $\int x^r dx(a+bx^n)^q$ bringen läßt, wenn $\frac{m-r}{n}$ eine ganze Zahl ist, weil dann auch $\frac{m+gn-r}{n} =$ $\frac{m-r}{n} + g$ eine ganze Zahl ist.

Wenn aber $p-q$ eine negative, und folglich $q-p$ eine positive ganze Zahl bedeutet, so muß man das bekannte $\int x^r dx\,(a+bx^n)^q$ auf das gesuchte Integrale $\int x^m dx(a+bx^n)^p$ bringen, und sodann ergibt sich das gesuchte Integrale mit gehöriger Beyziehung der Formel A) sehr leicht durch eine bloße Versetzung.

§. 723.

Mittelst dieser beyden Verwandlungs-Formeln, und durch die im §. 721. entwickelten Fundamental-Formeln lassen sich sehr viele Integralen von binomischen Differenzial-Größen entwickeln. Diese Integralen werdan dann aus algebraischen und aus transcendenten Gliedern zusammen gesetzet seyn.

Wir wollen einige derselben als Zusätze zu den im §. 721. entwickelten Formeln hierher setzen, weil sie eben so, wie diese, zur Entwickelung anderer Integralen dienen können, wenn letztere mittelst der im vorigen §. aufgestellten allgemeinen Verwandlungs-Formeln darauf gebracht werden. Nähmlich

Fig.

I.

$$\int \frac{x^2\,dx}{a+bx^2} =$$

$$\begin{cases} \int \frac{x^2\,dx}{\pm\alpha\mp\beta x^2} = C\mp\frac{x}{\beta} \\ \pm\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta\sqrt{\beta}}.L\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta x^2}}{\sqrt{(\pm\alpha\mp\beta x^2)}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int \frac{x^2\,dx}{\alpha+\beta x^2} = C+\frac{x}{\beta} \\ -\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta\sqrt{\beta}}.\text{arc.tang.}\sqrt{\frac{\beta x^2}{\alpha}}. \end{cases}$$

II.

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}\,dx}{a+bx} =$$

$$\begin{cases} \int \frac{x^{\frac{1}{2}}\,dx}{\pm\alpha\mp\beta x} = C\mp\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\beta} \\ \pm\frac{2\sqrt{\alpha}}{\beta\sqrt{\beta}}.L\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta x}}{\sqrt{(\pm\alpha\mp\beta x)}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int \frac{x^{\frac{1}{2}}\,dx}{\alpha+\beta x} = C+\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\beta} \\ -\frac{2\sqrt{\alpha}}{\beta\sqrt{\beta}}.\text{arc.tang.}\sqrt{\frac{\beta x}{\alpha}}. \end{cases}$$

III.

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a+bx^2)}} =$$

$$\begin{cases} \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(\beta x^2\pm\alpha)}} = C+\frac{x\sqrt{(\beta x^2\pm\alpha)}}{2\beta} \\ \mp\frac{\alpha}{2\beta\sqrt{\beta}}.L[\sqrt{\beta x^2}+\sqrt{(\beta x^2\pm\alpha)}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(\alpha-\beta x^2)}} = C\frac{x\sqrt{(\alpha-\beta x^2)}}{2\beta} \\ +\frac{\alpha}{2\beta\sqrt{\beta}}.\text{arc.tang.}\sqrt{\frac{\beta x^2}{\alpha-\beta x^2}} \end{cases}$$

IV.

$$\int dx\sqrt{(a+bx^2)} =$$

$$\begin{cases} \int dx\sqrt{(\beta x^2\pm\alpha)} = C+\frac{1}{2}x\sqrt{(\beta x^2\pm\alpha)} \\ \pm\frac{\alpha}{2\sqrt{\beta}}.L[\sqrt{\beta x^2}+\sqrt{(\beta x^2\pm\alpha)}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int dx\sqrt{(\alpha-\beta x^2)} = C+\frac{1}{2}x\sqrt{(\alpha-\beta x^2)} \\ +\frac{\alpha}{2\sqrt{\beta}}.\text{arc. tang.}\sqrt{\frac{\beta x^2}{\alpha-\beta x^2}}. \end{cases}$$

V.

Fig.

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}\,dx}{\sqrt{(\beta x \pm \alpha)}} = C + \frac{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(\beta x \pm x)}}{\beta} \mp \frac{\alpha}{\beta\sqrt{\beta}} . L[\sqrt{\beta x} + \sqrt{(\beta x \pm x)}]$$

V.

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}\,dx}{\sqrt{(a+bx)}} = \begin{cases} \int \frac{x^{\frac{1}{2}}\,dx}{\sqrt{(\alpha-\beta x)}} = C - \frac{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(\alpha-\beta x)}}{\beta} \\ + \frac{\alpha}{\beta\sqrt{\beta}} . \text{arc.tang.} \sqrt{\frac{\beta x}{\alpha - \beta x}} . \end{cases}$$

VI.

$$\int x^{\frac{1}{2}}\,dx\sqrt{(a+bx)} = \begin{cases} \int x^{\frac{1}{2}}\,dx\sqrt{(\beta x \pm \alpha)} = Const. \\ + \frac{x^{\frac{1}{2}}(2\beta x \pm \alpha)\sqrt{(\beta x \pm \alpha)}}{4\beta} \\ - \frac{\alpha^2}{4\beta\sqrt{\beta}} . L[\sqrt{\beta x} + \sqrt{(\beta x \pm \alpha)}] \end{cases}$$

$$\int x^{\frac{1}{2}}\,dx\sqrt{(\alpha-\beta x)} = \frac{x^{\frac{1}{2}}(2\beta x - \alpha)\sqrt{(\alpha-\beta x)}}{4\beta} + \frac{\alpha^2}{4\beta\sqrt{\beta}} . \text{arc.tang} \sqrt{\frac{\beta x}{\alpha - \beta x}} .$$

VII.

$$\int \frac{dx\sqrt{(a+bx)}}{x^{\frac{1}{2}}} = \begin{cases} \int \frac{dx\sqrt{(\beta x \pm \alpha)}}{x^{\frac{1}{2}}} = C + x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(\beta x \pm \alpha)} \\ \pm \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} . L[\sqrt{\beta x} + \sqrt{(\beta x \pm \alpha)}] \end{cases}$$

$$\int \frac{dx\sqrt{(\alpha-\beta x)}}{x^{\frac{1}{2}}} = C + x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(\alpha-\beta x)} + \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} . \text{arc.tang.} \sqrt{\frac{\beta x}{\alpha - \beta x}} .$$

Fig.

VIII.

$$\int\frac{dx\,V(a+bx)}{x}=\begin{cases}\int\frac{dx\,V(\alpha\pm\beta x)}{x}=C+2\,V(\alpha\pm\beta x)\\ \quad-2\alpha^{\frac{1}{2}}L\frac{V\alpha+V(\alpha\pm\beta x)}{Vx}\\ \int\frac{dx\,V(\beta x-\alpha)}{x}=C+2\,V(\beta x-\alpha)\\ \quad-2\alpha^{\frac{1}{2}}.\text{arc. tang. }V\frac{\beta x-\alpha}{\alpha}.\end{cases}$$

IX.

$$\int\frac{dx\,V(a+bx^2)}{x}=\begin{cases}\int\frac{dx\,V(\alpha\pm\beta x^2)}{x}=C+V(\alpha\pm\beta x^2)\\ \quad-\alpha^{\frac{1}{2}}L\frac{V\alpha+V(a\pm\beta x^2)}{x}\\ \int\frac{dx\,V(\beta x^2-\alpha)}{x}=C+V(\beta x^2-\alpha)\\ \quad-\alpha^{\frac{1}{2}}.\text{arc. tang }V\frac{\beta x^2-\alpha}{\alpha}.\end{cases}$$

§. 724.

Damit der Gebrauch der im §. 722. aufgestellten allgemeinen Formeln A) und B) geläufiger werde, so wollen wir noch einige Beyspiele entwickeln.

$\int x^{-5}dx(x^2-1)^{\frac{3}{2}}$ läßt sich durch Hülfe des bekannten Integrals $\int x^{-1}dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}=\text{arc. tang}\,V(x^2-1)$ entwickeln. Denn es sind (wenn man $m=-5, n=2, r=-1$, $p=\frac{3}{2}$, $q=-\frac{1}{2}$, $a=-1$ und $b=1$ setzet) sowohl $p-q$ als auch $(m-r):n$ ganze Zahlen, nähmlich $p-q=2$, $(m-r):n=-2$. Diese Werthe substituire man in der allgemeinen Formel B). §. 722. bey $p-q=2$, so ist

$$\int x^{-5}dx(x^2-1)^{\frac{3}{2}}=-\tfrac{1}{4}x^{-4}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{4.2}x^{-2}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{3}{4.2}\int x^{-1}dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}};$$

nähm-

nähmlich es ist nach gehöriger Reduction Fig.

$$\int x^{-5}\,dx(x^2-1)^{\frac{3}{2}} = C+\left(\frac{2-5x^2}{8x^4}\right)\sqrt{(x^2-1)}+\tfrac{3}{8}.\text{arc.tang.}\sqrt{(x^2-1)}$$

Eben so läßt sich auch $\int x^2\,dx(x^2-1)^{\frac{3}{2}}$ durch Hülfe des bekannten Integrals $\int x^0\,dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$, oder auch mittelst $\int x^0\,dx(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$ entwickeln, wenn man beyde Verwandlungs-Formeln A) und B) zu Hülfe nimmt.

Auch $\int x^2\,dx(1+x^2)^{-3}$ läßt sich durch Hülfe des bekannten Integrals $\int x^0\,dx(1+x^2)^{-1}=\text{arc.tang}x$ bestimmen, weil $p-q$ und auch $\left(\frac{m-r}{n}\right)$ ganze Zahlen sind, wenn man $m=2$, $r=0$, $p=-3$, $q=-1$ und $n=2$ setzet. Es ist aber $p-q=-2$ eine negative Zahl. Aus dieser Ursache bringe man das bekannte $\int x^0\,dx(1+x^2)^{-1}$ auf das gesuchte Integrale $\int x^2\,dx(1+x^2)^{-3}$; man setze nähmlich $p=-1$, $q=-3$, $m=0$, $r=2$, $n=2$, $a=1$, $b=1$, und substituire diese Werthe bey $p-q=-1+3=2$ im §. 722. B); so ist

$$\int dx(1+x^2)^{-1} = x(1+x^2)^{-1}+\tfrac{2}{3}x^3(1+x^2)^{-2} + \tfrac{8}{3}\int x^4\,dx(1+x^2)^{-3} \quad \text{A)}$$

Sodann bringe man $\int x^4\,dx(1+x^2)^{-3}$ auf $\int x^2\,dx(1+x^2)^{-2}$ mittelst der allgemeinen Verwandlungs-Formel A); so ist

$$\int x^4\,dx(1+x^2)^{-3} = -x^3(1+x^2)^{-2}+3\int x^2\,dx(1+x^2)^{-3}.$$

Folglich ist auch wenn man in der Gleichung A) statt $\int x^4\,dx(1+x^2)^{-3}$ diesen Werth substituiret,

$$\int dx(1+x^2)^{-1} = x(1+x^2)^{-1}+\tfrac{2}{3}x^3(1+x^2)^{-2} - \tfrac{8}{3}x^3(1+x^2)^{-2}+8\int x^2\,dx(1+x^2)^{-3}.$$

Daraus fließt durch die Versetzung

$$\int x^2\,dx(1+x^2)^{-3} = -\tfrac{1}{8}x(1+x^2)^{-1}+\tfrac{1}{4}x^3(1+x^2)^{-2} + \tfrac{1}{8}\int dx(1+x^2)^{-1}.$$

Endlich ist wenn man gehörig reduciret;

$$\int x^2\,dx(1+x^2)^{-3} = C+\frac{x(x^2-1)}{8(1+x^2)^2}+\tfrac{1}{8}\text{ arc.tang }x.$$

Fig.

§. 725.

Bey dem Gebrauche der zwey Verwandlungs-Formeln A) und B) §. 722. ereignet es sich manchmahl, daß der Nenner eines Gliedes = o wird. In diesem Falle läßt sich das zu suchende Integrale nicht unmittelbar auf ein bekanntes bringen, wenn schon $(m-r):n$ und auch $p-q$ ganze Zahlen sind. In einem solchen Falle muß man bey dem gesuchten und auch bey dem bekannten Integrale ohne Veränderung des Werthes die veränderliche Größe unter dem Zeichen aus einem Gliede in das andere schaffen, und sodann erst die Substitution, und endlich die Reduction vornehmen. Ein Beyspiel soll den Vorgang in einem solchen Falle erläutern.

$\int x^{-3} dx (1+x^2)^{\frac{3}{2}}$ läßt sich auf das bekannte Integrale $\int x^{-1} dx (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = C - L\left[\frac{1+\sqrt{(1+x^2)}}{x}\right]$ bringen, wenn man das gesuchte $\int x^{-3} dx (1+x^2)^{\frac{3}{2}}$ in $\int dx (x^{-2}+1)^{\frac{3}{2}}$, und das bekannte Integrale $\int x^{-1} dx (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ in $\int x^{-2} dx (x^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}} = C - L\left[\frac{1+\sqrt{(1+x^2)}}{x}\right]$ verwandelt, und darauf $\int dx (x^{-2}+1)^{\frac{3}{2}}$ auf $\int x^{-2} dx (x^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}}$ bringet. Es ist nähmlich (vermöge der allgemeinen Verwandlungs-Formel B)

$$\int dx (x^{-2}+1)^{\frac{3}{2}} = x(x^{-2}+1)^{\frac{3}{2}} - 3x^{-1}(x^{-2}+1)^{\frac{1}{2}} - 3\int x^{-4} dx (x^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Nun ist nach der Verwandlungs-Formel A), wenn man $\int x^{-4} dx (x^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}}$ auf das bekannte Integrale $\int x^{-2} dx (x^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}}$ bringet,

$$\int x^{-4} dx (x^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{2} x^{-1} (x^{-2}+1)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}\int x^{-2} dx (x^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Folglich ist auch, wenn man diesen Werth in der vorher- gehenden Gleichung substituiret,

$$\int dx(x^{-2}+1)^{\frac{3}{2}} = x(x^{-2}+1)^{\frac{3}{2}} - 3x^{-1}(x^{-2}+1)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\tfrac{3}{2}x^{-1}(x^{-2}+1)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{3}{2}\int x^{-2}dx(x^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Endlich ist, wenn man statt $\int dx\,(x^{-2}+1)^{\frac{3}{2}}$ und statt $\int x^{-2}dx(x^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}}$ die gleichgeltenden Werthe setzet, und gehörig reduciret,

$$\int x^{-3}dx(1+x^2)^{\frac{3}{2}} = C + (\frac{2x^2-1}{2x^2})\sqrt{(1+x^2)}$$
$$-\tfrac{3}{2}\,L[\frac{1+\sqrt{(1+x^2)}}{x}].$$

§. 726.

Aus dem bisher Gesagten ist nun deutlich zu ersehen, aie Binomien behandelt werden müssen, wenn sie integriret werden sollen. Die sowohl im §. 721. aufgestellten, als auch die im §. 723. nachgetragenen Integralen können als Fundamental-Formeln dienen, auf welche andere binomische Differenzial-Größen mittelst der im §. 722. entwickelten allgemeinen Verwandlungs-Formeln A) und B) gebracht werden, damit dann mittelst dieser Formeln die gegebenen Differenzial Größen vollständig integriret werden. Zur Uebersicht des ganzen Abschnittes wollen wir die besonderen Fälle ansetzen, wenn die Binomien $\int x^{\mu}dx\,(a+bx^2)^{\nu}$ und $\int x^{\mu}dx(a+bx)^{\nu}$ mittelst der angeführten Fundamental-Formeln integriret werden können.

a) $\int x^{\mu}dx(a+bx^2)^{\nu}$ kann integriret werden.

1) Wenn μ eine ganze gerade Zahl $= \pm 2n$, und ν eine ganze negative Zahl $= -m$ ist. Denn $\int x^{\pm 2n}dx(a+bx^2)^{-m}$, läßt sich in diesem Falle auf das Integrale $\int dx(a+bx^2)^{-m}$ und das letztere dann ferner auf (I. Fundamental-Formel §. 721.) $\int dx\,(a+bx^2)^{-1}$ bringen.

2)

Fig.

2) Wenn $\mu = p$ und $\nu = \frac{q}{2}$ ist, wobey p und q ganze Zahlen seyn müssen; übrigens können sie positiv oder negativ, gerade oder ungerade seyn. Denn in diesem Falle läßt sich $\int x^{\mu} dx(a+bx^2)^{\frac{q}{2}}$ entweder mittelst der im §. 720. entwickelten Reihen, oder durch die aufgestellten Fundamental-Formeln mit Zuziehung der Verwandlungs-Formeln A) und B) vollkommen bestimmen. Man kann sich hiervon überzeugen, wenn man alle besondere Fälle, welche hier eintreffen können, ins besondere untersuchet.

b) $\int x^{\mu} dx(a+bx)^{\nu}$ kann integriret werden.

1) Wenn $\mu = \mp\frac{n}{2}$, und $\nu = -m$ ist, nähmlich wenn n eine ganze ungerade Zahl, und m eine ganze positive Zahl ist. Denn bey dieser Voraussetzung läßt sich

das Integrale $\int x^{\mp\frac{n}{2}} dx(a+bx)^{-m}$ mittelst der im §. 721. angegebenen Fundamental-Formeln, II. und IV., und mittelst der im §. 723. nachgetragenen II. und V. bestimmen.

2) Wenn $\mu = \frac{p}{2}$, und $\nu = \frac{q}{2}$ ist, für ganze Zahlen, p und q welche übrigens positiv oder negativ, gerade oder ungerade seyn können. Daß sich $\int x^{\frac{p}{2}} dx(a+bx)^{\frac{q}{2}}$ jederzeit angeben läßt, wenn p und q ganze Zahlen sind, kann dadurch erwiesen werden, wenn man jeden besonderen Fall für sich betrachtet.

Ein Binomium von einem rationalen Bruche kann auch integriret werden, wenn man den Bruch in mehrere andere zertheilet, und dann jeden Bruch für sich integriret. Doch dieses können wir erst dann umständlicher vornehmen, wenn wir das nothwendigste von den Trinomien erwähnet haben. Wir werden dann auch im Stande seyn, alle Fälle anzugeben, in welchen ein Binomium $x^m dx(a+bx^n)^p$ integriret werden kann.

III. Abschnitt.

Fig.

Von der Integrirung der Trinomien, und der rationalen Brüche.

I. Integrirung der Trinomien.

§. 727.

Alle Trinomien von der Gestalt $x^m dx(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{p}{2}}$ für alle ganze Zahlen m und p, sie mögen positiv oder negativ, gerade oder ungerade seyn; wie auch die Trinomien von der Gestalt $x^m dx(\alpha+\beta x^n+\gamma x^{2n})^{\frac{p}{2}}$ wenn $\frac{m+1}{n}$ und p ganze, positive oder negative, gerade oder ungerade Zahlen sind, lassen sich integriren, wenn man sie in Binomien verwandelt. Dieses geschieht, wenn man nach den im §. 329. gegebenen Gründen das zweyte Glied des Trinomiums hinwegschaffet, nähmlich wenn man $x^n = z^n - \frac{\beta}{2\gamma}$ setzet, daraus x, dx, x^m, x^{2n} bestimmet, und diese Werthe in $x^m dx(\alpha+\beta x^n+\gamma x^{2n})^{\frac{p}{2}}$ substituiret. Zuweilen müssen auch noch andere Kunstgriffe angewendet werden, als z. B. die Hinwegschaffung der veränderlichen Größe aus einem Gliede, u. m. dgl. ehe man die angeführte Verwandlung in ein solches Binomium vornehmen kann, welches mit einer der aufgestellten Fundamental-Formeln übereinkommt.

Wir wollen einige Beyspiele hierher setzen, aus welchen die Bearbeitung für diesen Fall deutlich zu ersehen seyn wird. Es ist nähmlich

$$\text{I.} \int \frac{m dx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2} =$$

$$\begin{cases} \int \frac{m dx}{a+bx+cx^2} = \frac{2m}{\sqrt{(4ac-b^2)}} . \text{arc.tang} \frac{b+2cx}{\sqrt{(4ac-b^2)}} \\ \int \frac{m dx}{a+bx-cx^2} = \frac{2m}{\sqrt{(4ac+b^2)}} . L. \frac{\sqrt{(4ac+b^2)}-(b-2cx)}{\sqrt{(a+bx-cx^2)}} \end{cases}$$

Fig.

$$\text{II.} \int \frac{m\,dx}{x(\alpha+\beta x+\gamma x^2)} =$$

$$\begin{cases} \int \frac{m\,dx}{x(a+bx+cx^2)} = -\frac{m}{a} L. \frac{\sqrt{(a+bx+cx^2)}}{x} \\ \qquad - \frac{mb}{a\sqrt{(4ac-b^2)}} . \text{arc.tang.} \frac{b+2cx}{\sqrt{(4ac-b^2)}} \\ \int \frac{m\,dx}{x(a+bx-cx^2)} = -\frac{m}{a} L. \frac{\sqrt{(a+bx-cx^2)}}{x} \\ \qquad - \frac{mb}{a\sqrt{(4ac+b^2)}} . L. \frac{\sqrt{(4ac+b^2)-(b-2cx)}}{\sqrt{(a+bx-cx^2)}} \end{cases}$$

$$\text{III.} \int \frac{mx\,dx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2} =$$

$$\begin{cases} \int \frac{mx\,dx}{a+bx+cx^2} = \frac{m}{2c} . L. (a+bx+cx^2) \\ \qquad - \frac{mb}{c\sqrt{(4ac-b^2)}} . \text{arc.tang.} \frac{b+2cx}{\sqrt{(4ac-b^2)}} \\ \int \frac{mx\,dx}{a+bx-cx^2} = -\frac{m}{2c} . L . (a+bx-cx^2) \\ \qquad + \frac{mb}{c\sqrt{(4ac+b^2)}} . L. \frac{\sqrt{(4ac+b^2)-(b-2cx)}}{\sqrt{(a+bx-cx^2)}} \end{cases}$$

$$\text{IV.} \int \frac{m\,dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}} =$$

$$\begin{cases} \int \frac{m\,dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)}} = \frac{m}{\sqrt{c}} . L . [2cx+b+2\sqrt{c(a+bx+cx^2)}] \\ \int \frac{m\,dx}{\sqrt{(a+bx-cx^2)}} = \frac{m}{\sqrt{c}} . \text{arc.tang.} \frac{2cx-b}{2\sqrt{c(a+bx-cx^2)}} \end{cases}$$

$$\text{V.} \int \frac{m\,dx}{x\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}} =$$

$$\begin{cases} \int \frac{m\,dx}{x\sqrt{(+a+bx+cx^2)}} = -\frac{m}{\sqrt{a}} . L. \left[\frac{2a+bx+2\sqrt{a(a+bx+cx^2)}}{x}\right] \\ \int \frac{m\,dx}{x\sqrt{(-a+bx+cx^2)}} = \frac{m}{\sqrt{a}} . \text{arc.tang.} \frac{2\sqrt{a(-a+bx+cx^2)}}{2a-bx} \end{cases}$$

VI.

VI. $\int m\,dx \sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)} =$ Fig.

$$\int m\,dx \sqrt{(a+bx+cx^2)} = \frac{m(2cx+b)\cdot\sqrt{(a+bx+cx^2)}}{4c} + \frac{m(4ac-b^2)}{8c\sqrt{c}} \cdot L.\left[2cx+b+2\sqrt{c(a+bx+cx^2)}\right]$$

$$\int m\,dx \sqrt{(a+bx-cx^2)} = \frac{m(2cx-b)\sqrt{(a+bx-cx^2)}}{4c} + \frac{m(4ac+b^2)}{8c\sqrt{c}} \cdot \text{arc.tang.} \frac{2cx-b}{2\sqrt{c(a+bx-cx^2)}}$$

Die Integralen der Formeln I. II. III. IV. und VI. werden erhalten, wenn man $x + \frac{\beta}{2\gamma} = z$ setzet, um das Trinomium $\alpha+\beta x+\gamma x^2$ in ein Binomium zu verwandeln. Um die Formel V. in ein Binomium zu verwandeln muß man zuvor in dem Trinomium $\alpha+\beta x+\gamma x^2$ das dritte Glied von der veränderlichen Größe befreyen, und sodann erst das zweyte Glied hinwegschaffen. Es ist nähmlich

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{(\alpha x^{-2}+\beta x^{-1}+\gamma)}}$$

$$= -2\alpha \overset{z}{\int} \frac{dz}{\sqrt{[(4\alpha\gamma-\beta^2)+4\alpha^2 z^2]}} \text{ für } x^{-1}+\frac{\beta}{2\alpha} = z.$$

Durch einen der zwey angeführten Kunstgriffe läßt sich jedes Trinomium von der Gestalt $x^m dx(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{p}{2}}$ für alle ganze, positive oder negative, gerade oder ungerade Zahlen m und p integriren.

Um endlich $x^m dx(\alpha+\beta x^n+\gamma x^{2n})^{\frac{p}{2}}$, wenn $\frac{m+1}{n}$ und auch p ganze, positive oder negative, gerade oder ungerade Zahlen sind, zu integriren, hat man für $y = x^n$

$$\int x^m dx(\alpha+\beta x^n+\gamma x^{2n}) = \frac{1}{n}\int y^{\frac{m+1}{n}-1} dy.(\alpha+\beta y+\gamma y^2)^{\frac{p}{2}}.$$

Fig. Wenn bey dem Gebrauche der angeführten Formeln I. II. und III. der Ausdruck $\sqrt{(4ac \pm b^2)}$ eine unmögliche Größe anzeigen sollte, so muß man bey der vorgelegten Differenzial-Größe, die das rationale Trinomium $(\alpha + \beta x + \gamma x^2)$ enthält und integriret werden soll, den Zähler und Nenner mit -1 multipliciren, um den unmöglichen Ausdruck zu vermeiden.

Es sey z. B. das Integrale $\int \frac{dx}{1 - 3x + x^2}$ zu bestimmen. Wenn man nun solches mittelst der vordern Formel I. angeben würde für $a = 1$, $b = -3$, $c = 1$; so erhielte man $\int \frac{dx}{1 - 3x + x^2} = \frac{2}{\sqrt{-5}} . \text{arc.tang.} \frac{2x - 3}{\sqrt{-5}}$ den Ausdruck einer unmöglichen Größe. Man verändere daher die Zeichen des gegebenen Differenziales im Zähler und Nenner, nähmlich $\frac{dx}{1 - 3x + x^2} = \frac{-1 . dx}{-1 + 3x - x^2}$. Sodann findet man mittelst der zweyten Formel in I. für $a = -1$, $b = 3$, $c = 1$, $m = -1$ das gesuchte Integrale

$$\int \frac{dx}{1 - 3x + x^2} = \int \frac{-dx}{-1 + 3x - x^2} = \text{Const.}$$
$$- \frac{2}{\sqrt{5}} . L. \frac{\sqrt{5} - (3 - 2x)}{\sqrt{(-1 + 3x - x^2)}}$$
$$= \text{Const.} - \frac{1}{\sqrt{5}} . L. \frac{[\sqrt{5} - (3 - 2x)]^2}{-1 + 3x - x^2}$$

welches für $x = 3$, oder $x > 3$ auch unmöglich zu seyn scheint, durch die Bestimmung der Constante aber, die in dergleichen Fällen den Logarithmus einer negativen Zahl anzeiget, in der wirklichen Anwendung doch wirklich möglich werden kann.

Es wäre überflüßig mehrere Beyspiele anzuführen, da diese gegebenen hinlänglich sind, zu zeigen wie trinomische Differenzial-Größen behandelt werden müssen, wenn sie integriret werden sollen. Da übrigens Trinomien in der Ausübung seltner vorkommen, so wollen wir uns nicht länger

ger dabey aufhalten, und so gleich zu der Integrirung ratio- Fig.
naler Brüche schreiten.

II. Integrirung der rationalen Brüche und die davon abhangende vollständige Integration des Binomiums $x^m dx(a+bx^n)^p$.

§. 728.

Das Integrale eines vorgelegten Bruches $\frac{Pdx}{Q}$, dessen Zähler und Nenner rationale Functionen der veränderlichen Größe x sind, und wobey die höchste Potenz von x im Zähler kleiner seyn muß als im Nenner (dieses kann jederzeit durch die wirkliche Division des Zählers durch den Nenner erhalten werden), wird nach den bisher gegebenen Regeln gefunden, wenn man den gegebenen Bruch in mehrere andere Partial-Brüche zerleget, welche zusammen genommen demselben gleich sind. Die Partial-Brüche aber müssen so beschaffen seyn, daß deren Nenner als Binomien in der Gestalt von $(c+ex)^m$ oder aber als Trinomien in der Gestalt von $(r+sx^n+tx^{2n})^q$ erscheinen. Wenn nähmlich der in seine Factoren aufgelöste Nenner Q die Gestalt hat.

$$Q=x(a+bx)(kx^2+l)(c+ex)^m(f+gx+hx^2)$$
$$\times(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^p(r+sx^n+tx^{2n})^q;$$

so setze man

$$\frac{Pdx}{Q}=\frac{Adx}{x}+\frac{Bdx}{(a+bx)}+\frac{(C+Dx)dx}{kx^2+l}$$
$$+\frac{Edx}{(c+ex)^m}+\frac{Fdx}{(c+ex)^{m-1}}+\frac{Gdx}{(c+ex)^{m-2}}+..+\frac{Ndx}{c+ex}$$
$$+\frac{(a'+b'x)dx}{f+gx+hx^2}+\frac{(A'+B'x)dx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^p}+..+\frac{(M'+N'x)dx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$$
$$+\frac{(\alpha'+\beta'x+\gamma'x^2+\delta'x^3+\varepsilon'x^4+..+\mu'x^{2nq-1})dx}{(r+sx^n+tx^{2n})^q}$$

Nun bestimme man die Werthe der Coefficienten $A, B, C \ldots\ldots A', B', C', \ldots\ldots a', b', c', \ldots\ldots \alpha', \beta', \gamma'$, nach

der

Fig. der im §. 287. angegebenen Methode, und suche das Integrale eines jeden einzelnen Partial-Bruches. Z. B. die Differenzial-Gleichung

$$dy = \frac{dx(2x^6 - 6x^5 + 4x^4 + 4x^3 - x + 12)}{x^5 - 3x^4 + x^3 + 4x} = 2x\,dx + \frac{dx(2x^4 + 4x^3 - 8x^2 - x + 12)}{x(x-2)^2(1+x+x^2)}$$

läßt sich integriren, wenn man

$$\frac{2x^4 + 4x^3 - 8x^2 - x + 12}{x(x-2)^2(1+x+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B+Cx}{(x-2)^2} + \frac{D+Ex}{1+x+x^2}$$

setzet, sodann (nach §. 287.) die Coefficienten $A = 3$, $B = -1$, $C = 2$, $D = 0$, $E = -3$ bestimmet, und endlich die gefundenen Differenzial-Brüche

$$\frac{3\,dx}{x} + \frac{dx(2x-1)}{(x-2)^2} - \frac{3x\,dx}{1+x+x^2}$$

nach den bereits gegebenen Regeln integriret. Man findet nach vorgenommener Reduction

$$y = C + x^2 - \frac{3}{x-2} + L\frac{x^3(x-2)^2}{\sqrt{(1+x+x^2)^3}} + \sqrt{3}.\text{arc.tang.}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

§. 729.

Wenn bey dem rationalen Bruche $\frac{P\,dx}{Q}$ ein Factor des Nenners Q die Gestalt $a + bx^n$ hat, so kann solcher auf folgende Art in trinomische Factoren von der Gestalt $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ aufgelöset werden, deren Anzahl entweder $\frac{1}{2}n$ oder $\frac{1}{2}(n-1)$ seyn wird, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist; wo im letzteren Falle die Function $a + bx^n$ auch noch einen einfachen Factor von der Gestalt $\alpha + \beta x$ hat. Es ist nähmlich, wenn π den halben Umkreis oder den Bogen von 180° bedeutet, für die Function $a + bx^n$

$$a^{\frac{2}{n}} - 2a^{\frac{1}{n}}\,b^{\frac{1}{n}}\,x.\cos\frac{(2g+1)\pi}{n} + b^{\frac{2}{n}}\,x^2$$

der allgemeine Ausdruck aller trinomischen Factoren, in wel-

welche die Function $a + bx^n$ aufgelöset werden kann. *) Fig. Man findet daraus diese Factoren, wenn man nach und nach $g = 0$, $g = 1$, $g = 2$, $g = 3$. u. s. w. bis $g = \frac{1}{2}n - 1$, oder $g = \frac{1}{2}(n - 1)$ setzet, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist. Dabey ist aber zu bemerken, daß da für eine ungerade Zahl n und $g = \frac{1}{2}(n-1)$ das Glied $\cos \frac{(2g+1)\pi}{n}$ in $\cos \pi = -1$ übergeht, man statt des quadratischen Factors $a^{\frac{2}{n}} + 2a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} x + b^{\frac{2}{n}} x^2$ dessen Wurzel $a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} x$ setzen muß, weil in einem solchen Falle die Function $a + bx^n$ nebst $\frac{1}{2}(n-1)$ trinomischen Factoren auch den hier angeführten binomischen $(a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} x)$ enthält. Nach diesem allgemeinen Ausdrucke findet man z. B.

$a^3 + z^3 = (a^2 - 2az.\cos\frac{1}{3}\pi + z^2)(a+z) = (a^2 - az + z^2)(a+z)$

$a^4 + z^4 = (a^2 - 2az\cos\frac{1}{4}\pi + z^2)(a^2 - 2az\cos\frac{3}{4}\pi + z^2)$

$= (a^2 - az\sqrt{2} + z^2)(a^2 + az\sqrt{2} + z^2)$

$a^5 + z^5 = (a^2 - 2az\cos\frac{1}{5}\pi + z^2)(a^2 - 2az\cos\frac{3}{5}\pi + z^2)(a+z)$

$= [a^2 - \frac{1}{2}az(\sqrt{5}+1) + z^2][a^2 - \frac{1}{2}az(\sqrt{5}-1) + z^2](a+z).$

Für die Function $a - bx^n$, und $bx^n - a$ aber ist

$$a^{\frac{2}{n}} - 2a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} x.\cos\frac{2g\pi}{n} + b^{\frac{2}{n}} x^2$$

der allgemeine Ausdruck aller trinomischen Factoren, in welche die Function $a - bx^n$ oder auch $(-a + bx^n)$ aufgelöset werden kann. Daraus werden eben so wie in dem vorigen Falle alle Factoren abgeleitet, wenn man nach und nach $g = 0$, $g = 1$, $g = 2$, $g = 3$ u. s. w. bis $g = \frac{1}{2}n$ oder $g = \frac{1}{2}(n-1)$ setzet, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist. Nur ist dabey zu bemerken, daß man anstatt der aus der angeführten Formel erhaltenen Quadrate

*) Die Herleitung dieser allgemeinen Regel das Binomium $(a + bx^{\frac{a}{n}})$ in trinomische Factoren von der Gestalt $(\alpha + \beta x + \gamma x^2)$ zu zerlegen ist für die vielleicht schon zu weit hinausgerückten Gränzen dieses Lehrbuches zu weitläufig. Man kann dieselbe aus Pasquich Unterricht in der mathem. Analysis 11. Bd. §. 42. und §. 43. oder aus dessen Element. Analys. et Geometriae sublimioris, §. 232. Leipzig bey Weidmann 1791 und 1799. nachhohlen.

Fig. $a^{\frac{2}{n}} - 2a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} x + b^{\frac{2}{n}} x^2 = (a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}} x)^2$ oder auch

$a^{\frac{2}{n}} - 2a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} x + b^{\frac{2}{n}} x^2 = (b^{\frac{1}{n}} x - a^{\frac{1}{n}})^2$

deren Wurzeln für die Factoren annehmen muß. Nähmlich anstatt $a^{\frac{2}{n}} - 2a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} x + b^{\frac{2}{n}} x^2$ ist für diesen Factor $b^{\frac{1}{n}} x - a^{\frac{1}{n}}$ oder $a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}} x$ anzuschreiben, je nachdem entweder $bx^n - a$, oder aber $a - bx^n$ in Factoren zu zerlegen ist. Nach diesem allgemeinen Ausdrucke findet man z. B.

$a^3 - z^3 = (a - z)(a^2 + az + z^2)$

$a^4 - z^4 = (a - z)(a + z)(a^2 + z^2)$

$a^5 - z^5 = (a-z)[a^2 - \frac{1}{2}az(\sqrt{5}-1) + z^2][a^2 + \frac{1}{2}az(\sqrt{5}+1) + z^2]$

§. 730.

Wenn nun ein rationaler Bruch $\frac{x^{\frac{m}{n}} dx}{(\alpha + \beta x^n)^p}$, wo $n > 2$ ist, integriret werden soll, so muß man zuerst die Function $(\alpha + \beta x^n)$ nach dem vorigen §. in ihre Factoren zerlegen, sodann diesen Bruch (nach §. 728.) in mehrere andere ihm gleiche Partial-Brüche verwandeln, und endlich jeden dieser Brüche nach den gegebenen Regeln und Formeln integriren. Z. B.

Aus der Differenzial-Gleichung $dy = \frac{x^7 dx}{(1 + x^3)^2}$ findet man die Gleichung für die Function auf folgende Art.

$$\text{Es ist } \frac{x^7 dx}{(1+x^3)^2} = \frac{x^7 dx}{x^6 + 2x^3 + 1} = x dx - \frac{(x + 2x^4) dx}{(1+x^3)^2}$$

$$= x dx - \frac{(x+2x^4) dx}{(1+x)^2 (1 - x + x^2)^2} = x dx - \frac{A dx}{(1+x)^2} - \frac{B dx}{1+x} - \frac{(C + Dx) dx}{(1 - x + x^2)^2} - \frac{(E + Fx) dx}{1 - x + x^2}.$$

Nun bestimme man die beständigen Coefficienten A, B, C, D, E, F; und integrire dann jeden Bruch ins besondere, so wird man endlich das gesuchte Integrale der ganzen Function erhalten.

§. 731.

§. 731.

Nun sind wir endlich im Stande alle Fälle anzugeben, in welchen sich das Integrale des Binomium $x^m dx(a+bx^n)^p$ vollständig bestimmen läßt. Fig.

Ist nähmlich entweder p oder aber $\frac{m+1}{n}$, oder endlich $(\frac{m+1}{n}+p)\times -1$ eine ganze positive Zahl; so wird $\int x^m dx(a+bx^n)^p$ jederzeit vollständig (nach §. 720. F. I. II. oder III.) angegeben. Ist dieses nicht; so läßt sich $\int x^m dx(a+bx^n)^p$ nur noch in folgenden Fällen vollständig bestimmen.

A) Wenn p eine ganze negative Zahl ist.

a) Wenn dabey auch m und n ganze Zahlen sind, positiv oder negativ, jedoch $n>2$; so wird $\int \frac{x^{\pm m} dx}{(a+bx^n)^p}$ nach §. 730. bestimmet.

b) Wenn $n=2$ und m eine gerade positive oder negative Zahl ist; so wird $\int \frac{x^{\pm 2g} dx}{(a+bx^2)^p}$ vermöge §. 721. Formel I. entwickelt.

c) Wenn aber $n=1$ und $m=\pm\frac{g}{2}$ eine Bruchzahl des Nenners 2 ist; so wird $\int \frac{x^{\pm\frac{g}{2}} dx}{(a+bx)^p}$ vermöge §. 723. Formel II. bestimmet.

d) Wenn endlich m und n was immer für Zahlen sind, jedoch von der Beschaffenheit, daß $\frac{m+1}{n}$ eine positive oder negative Bruchzahl des Nenners 2 ist; so ist

$$\int \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^p} = \frac{1}{nb^{\frac{m+1}{n}}} \cdot \int \frac{dz(z-a)^{\frac{m+1}{n}-1}}{z^p} \text{ für } z=a+bx^n.$$

Die-

Fig. Dieses läßt sich dann mittelst der Verwandlungs-Formeln B und A §. 722. auf die VI. Formel des §. 721. bringen.

B) Wenn $p = \pm\frac{q}{2}$ eine Bruchzahl des Nenners 2 ist.

e) Wenn dabey auch $n = 2$, m aber eine ganze positive oder negative Zahl ist, so läßt sich $\int x^{\pm m} dx \sqrt[\pm q]{(a \pm bx^2)}$ nach §. 721. Formel III. und V. angeben.

f) Wenn aber in diesem Falle $n = 1$ und m entweder eine ganze negative, oder aber eine gebrochene positive oder negative 2 zum Nenner habende Zahl ist; so ist nach §. 721. sowohl $\int x^{-m} dx \sqrt[\pm q]{(a \pm bx)}$, als auch $\int x^{\pm \frac{g}{2}} dx \sqrt[\pm q]{(a \pm bx)}$ integrabel.

g) Wenn endlich m und n wie immer beschaffen sind, jedoch so, daß $\frac{m+1}{n}$ entweder eine ganze negative Zahl oder aber ein positiver oder negativer Bruch des Neuners 2 ist; so ist

$$\int x^m dx \sqrt[q]{(a+bx^n)} = \frac{2}{\frac{m+1}{n}} \cdot \int z^{q+1} dz (z^2 - a)^{\frac{m+1}{n}-1} \cdot b^{-\frac{m+1}{n}},$$

für $z = \sqrt[n]{(a+bx^n)}$.

Das Integrale dieses Ausdruckes läßt sich bey $\frac{m+1}{n} = -r$ nach der Formel I. und bey $\frac{m+1}{n} = \pm\frac{k}{2}$ nach der Formel III. §. 721. vermittelst der Verwandlungs-Formeln §. 722. angeben.

C) Wenn $p = \pm\frac{q}{r}$ eine Bruchzahl des Nenners $r > 2$ ist.

h) Wenn zugleich $\frac{m+1}{n}$ eine ganze negative Zahl ist; so ist

$$\int x^m dx \sqrt[r]{(a+bx^n)^q} = \frac{r}{\frac{m+1}{n}} \cdot \int z^{q+r-1} dz (z^r - a)^{\frac{m+1}{n}-1} \cdot b^{-\frac{m+1}{n}},$$

für $z = \sqrt[r]{(a+bx^n)}$ ein rationaler Bruch, der sich nach §. 730. integriren läßt.

i)

1) Wenn endlich $\frac{m+1}{n}+\frac{q}{r}$ eine ganze positive Zahl ist, Fig.

so wird $\int x^m dx \sqrt[r]{(a+bx^n)^q} = \frac{ra}{n} \cdot \int \frac{z^{q+r-1}\,dz}{(z^r-b)^{\frac{m+1}{n}+\frac{q}{r}+1}}$ für

$z = \left(\frac{a+bx^n}{x^n}\right)^{\frac{1}{r}}$ ebenfalls ein rationaler Bruch seyn, der sich nach §. 730. integriren läßt.

Außer den hier angeführten Bedingungen sind keine anderen denkbar, bey welchen das Binomium $x^m dx(a+bx^n)$ eine vollständige Integration zuließe. Aus dieser Ursache kann z. B. das Integrale des sehr einfachen Binomiums $x^{\frac{1}{2}} dx \sqrt{(a^2+x^2)}$ nach den bis jetzt bekannten Kunstgriffen der Integral-Rechnung nicht anders bestimmt werden, als durch unendliche Reihen.

§. 732.

Wenn also eine Differenzial-Größe von der Gestalt $x^m dx(a+bx^n)^p$ sich vermöge des vorigen §. nach keiner bisher gegebenen Regel integriren läßt; so muß man das gesuchte Integrale nach den im §. 720. entwickelten allgemeinen Formeln darstellen. Man muß aber um das gesuchte Integrale in einer sehr schnell abnehmenden Reihe zuerhalten, zuweilen verschiedene Vorbereitungen treffen; man muß nähmlich bald die veränderliche, bald auch eine der unveränderlichen Größen unter dem Zeichen aus einem Gliede in das andere schaffen, und sodann erst die Substitution und Reduction vornehmen. Zuweilen können auch die Verwandlungs-Formeln A und B im §. 722. das gesuchte Integrale von $x^m dx(a+bx^n)^p$ in einer so schnell abnehmenden Reihe geben, daß man das summatorische, mit dem Integrations-Zeichen $\int$ begleitete Glied gänzlich hinweg lassen kann. Dabey muß man auch aus den Umständen der Aufgabe genau untersuchen, welche aus den unendlichen Reihen, die man

Fig. aus den fünf angeführten allgemeinen Formeln erhalten kann, am schnellsten zusammen läuft.

Anmerkung. Die Integration des quadrinomischen Differenzials $dx(\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)^p$ für $p=$ einer ganzen negativen oder einer gebrochenen positiven oder negativen Zahl, läßt sich zuweilen nach Hinwegschaffung des zweyten Gliedes mittelst der Zerlegung der Größe x^3+ax+b in ihre Factoren durch die Cardanische Formel bewerkstelligen. In den übrigen Fällen, und überhaupt bey der Differenzial-Größe $x^n dx(a+bx^s+cx^k+ex^m\ldots.)^p$ für $p=$ einer negativen oder für $p=$ einer gebrochenen positiven oder negativen Zahl, muß man die Potenz p in eine Reihe auflösen, diese dann mit $x^n dx$ multipliciren und endlich jedes Glied für sich integriren. Wir wollen uns nicht länger dabey aufhalten, sondern die verschiedenen Kunstgriffe vornehmen, welche man bey den irrationalen und auch anderen Differenzial-Größen anwendet.

IV. Abschnitt.

Verwandlung einiger sehr merkwürdigen irrationalen Differenzialen in eine rationale Gestalt, um dieselben nach §. 730. zu integriren, wenn deren Integrirung durch andere Kunstgriffe nicht geschehen kann.

§. 733.

Wenn keine Methode und kein Kunstgriff bekannt ist, um ein vorgelegtes irrationales Differenziale zu integriren; so muß man noch untersuchen, ob sich nicht dasselbe in eine rationale Gestalt verwandeln lasse, wodurch das ganze Integrations-Geschäft auf die Integration der rationalen Differenzialen beschränket wird. Allgemeine Regeln, wodurch wir im Stande wären jedes irrationale Differenziale in eine rationale Gestalt zu verwandeln, gibt es gar keine. Aus dieser Ursache wollen wir die merkwürdigsten irrationalen Differenzial-Größen anführen, und die Substitutionen, wodurch

durch dieselben eine rationale Gestalt erhalten, nur mit kur- Fig.
zem berühren.

§. 734.

Das Differenziale Xdx, in welchem X was immer für eine Function der veränderlichen Größe x bedeutet, und dabey die Einschränkung hat, daß sie außer $\sqrt{(a+bx^2)}$ und $\sqrt{(a+bx^2)^g}$ für ganze Zahlen g, keine andere irrationale, und auch keine transcendente Function der Größe x enthält, wird eine rationale Gestalt erhalten, wenn man darin $\sqrt{(a+bx^2)} = \frac{z^2+a}{2z}$ setzet, damit nähmlich $x = \frac{z^2-a}{2z\sqrt{b}}$, $dx = \frac{dz(z^2+a)}{2z^2\sqrt{b}}$, und $z = x\sqrt{b} + \sqrt{(a+bx^2)}$ werde.

Z. B. Aus der Gleichung $dy = \frac{[x^3-\sqrt{(x^2-1)^3}]dx}{x+\sqrt{(x^2-1)}}$

folgt, wenn man $z = x+\sqrt{(x^2-1)}$ setzet,

$$y = \tfrac{1}{16}\int\frac{(1+z^2)^3(z^2-1)dz}{z^6} - \tfrac{1}{16}\int\frac{(z^2-1)^4dz}{z^6},$$

welches sich sehr leicht nach §. 720. F. I. integriren läßt.

Anmerkung. Mittelst der oben bezeichneten Substitution findet man nachstehende merkwürdige Integralen.

1) $\int[x+\sqrt{(a+x^2)}]^n dx = \frac{1}{2}\int z^n dz + \frac{1}{2}a\int z^{n-2}dz.$

2) $\int[bx+c\sqrt{(a+x^2)}][x+\sqrt{(a+x^2)}]^n dx = \frac{1}{4}(b+c)\int z^{n+1}dz$
$+\frac{1}{2}ac\int z^{n-1}dz + \frac{1}{4}a^2(c-b)\int z^{n-3}dz$

wenn man $z = x+\sqrt{(a+x^2)}$ setzet.

§. 735.

Wen aber bey dem Differenziale Xdx die Function X der veränderlichen Größe x außer $\sqrt{(a-bx^2)}$ und $\sqrt{(a-bx^2)^g}$ keine andere irrationale Function enthält; so wird es eine rationale Gestalt annehmen, wenn man

$\sqrt{(a-bx^2)} = \frac{2z\sqrt{a}}{1+z^2}$ setzet, damit sodann

$x = \frac{(1-z^2)\sqrt{a}}{(1+z^2)\sqrt{b}}$, $dx = -\frac{4zdz\sqrt{a}}{(1+z^2)^2\sqrt{b}}$, $z = \frac{\sqrt{(a-bx^2)}}{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}$ sey.

Fig. Es ist z. B. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{(1-x^2)}} = 4\int \frac{zdz}{(1+z^2)(z^2+2z-1)}$,

wenn man $z = \frac{\sqrt{(1-x^2)}}{1+x}$ setzet.

§. 736.

Wenn bey dem Differenziale $X.\frac{dx}{x}$ die Function X keine anderen irrationalen Functionen der veränderlichen Größe x enthält, als $\sqrt[p]{(a+bx^n)^s}$, $\sqrt[q]{(a+bx^n)^t}$, $\sqrt[r]{(a+bx^n)^u}$, &c. bey den ganzen Zahlen p, q, r, s, t, u, es mögen diese irrationalen Functionen mit anderen rationalen Functionen der Potenz x^n z. B. mit $gx^n \pm hx^{mn}$ auf was immer für eine Art verbunden seyn; so kann man diese irrationalen Functionen, wenn die Exponenten des Wurzelzeichens $p, q, r,$ verschieden sind, in die Functionen $\sqrt[\mu]{(a+bx^n)^\alpha}$, $\sqrt[\mu]{(a+bx^n)^\beta}$, $\sqrt[\mu]{(a+bx^n)^\gamma}$ u. s. w. eines und eben desselben Wurzel-Exponenten μ verwandeln. Sodann wird ein solches Differenziale $X.\frac{dx}{x}$ eine rationale Gestalt annehmen, wenn man darin $\sqrt[\mu]{(a+bx^n)} = z$ setzet; damit

$$x^n = \frac{z^\mu - a}{b}, \text{ und } \frac{dx}{x} = \frac{\mu z^{\mu-1} dz}{n(z^\mu - a)} \text{ sey.}$$

Z. B. Es ist $\int \frac{dx\sqrt{(1+x^2)^3}}{x^3 - x\sqrt{(1+x^2)}} = \int \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{x^2 - \sqrt{(1+x^2)}} \cdot \frac{dx}{x}$

$$= \int \frac{z^4 dz}{(z^2-1)(z^2-z-1)} = z + \int \frac{(z^3+2z^2-z-1)dz}{(z^2-1)(z^2-z-1)}$$

wenn man $z = \sqrt{(1+x^2)}$ setzet.

§. 737.

Wenn bey dem Differenziale Xdx die Function X außer den irrationalen Functionen $\sqrt[\mu]{(a+bx)^\alpha}$, $\sqrt[\mu]{(a+bx)^\beta}$,

$\sqrt$

Fig.

$\sqrt[\beta]{(a+bx)^{\gamma}}$ u. s. w. oder anderen $\sqrt[s]{(a+bx)^{s}}$, $\sqrt[t]{(a+bx)^{t}}$, $\sqrt[u]{(a+bx)^{u}}$, welche alle auf einen gemeinschaftlichen Exponenten k des Wurzelzeichens zu bringen sind, keine anderen irrationalen Functionen der veränderlichen Größe x enthält, es mögen diese irrationalen Functionen mit was immer für rationalen Functionen der veränderlichen Größe x z. B. mit $\frac{mx^4}{g+hx^3}$, wie immer verbunden seyn; so wird ein solches Differenziale $X\mathrm{d}x$ eine rationale Gestalt annehmen für $\sqrt[k]{(a+bx)}=z$, damit $x=\frac{z^k-a}{b}$, $\mathrm{d}x=\frac{kz^{k-1}\mathrm{d}z}{b}$ sey.

§. 738.

Jedes gegebene Differenziale $X.\frac{\mathrm{d}x}{x}$, welches außer $\sqrt[\mu]{\left[\frac{a+bx^n}{f+gx^n}\right]^{\alpha}}$, $\sqrt[\mu]{\left[\frac{a+bx^n}{f+gx^n}\right]^{\beta}}$ u. s. w. keine anderen irrationalen Functionen enthält, diese Wurzelgrößen mögen mit rationalen Functionen der Potenz x^n wie immer verbunden seyn, wird in ein Differenziale von einer rationalen Gestalt verwandelt, wenn man $\sqrt[\mu]{\left(\frac{a+bx^n}{f+gx^n}\right)}=z$ setzet; damit dann $x^n=\frac{fz^{\mu}-a}{b-gz^{\mu}}$, $\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mu(bf-ag)z^{\mu-1}\mathrm{d}z}{n(fz^{\mu}-a)(b-gz^{\mu})}$ sey.

Z. B. Aus der Differenzial-Gleichung $\mathrm{d}y=x\mathrm{d}x\sqrt{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)}$

$=\frac{\mathrm{d}x}{x}.x^2\sqrt{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)}$, wenn man $z=\sqrt{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)}$ setzet, folgt

$$y=2\int\frac{z^2\mathrm{d}z}{(1+z^2)^2}=C-\frac{z}{2}\sqrt{(1-x^4)}+\text{arc tang}\sqrt{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)}.$$

§. 739.

Fig.

§. 739.

Wenn das Differenziale $X\mathrm{d}x$ außer $\sqrt[\mu]{\left[\frac{a+bx}{f+gx}\right]^{\alpha}}$, $\sqrt[\mu]{\left[\frac{a+bx}{f+gx}\right]^{\beta}}$ u. s. w. keine andere irrationale Function enthält, so kann dasselbe durch nachstehende Substitution in ein rationales verwandelt werden:

$$\sqrt[\mu]{\left(\frac{a+bx}{f+gx}\right)}=z, \text{ nähmlich } x=\frac{fz^{\mu}-a}{b-gz^{\mu}}, \mathrm{d}x=\frac{\mu(bf-ag)z^{\mu-1}\mathrm{d}z}{(b-gz^{\mu})^{2}}.$$

§. 740.

Jedes gegebene Differenziale $X.\frac{\mathrm{d}x}{x}$ von der Beschaffenheit, daß es irrationale Functionen zweyer verschiedenen Binomien $\sqrt{(a+bx^n)^p}$, $\sqrt{(a+bx^n)^q}$ u. s. w. und $\sqrt{(f+gx^n)^{\alpha}}$, $\sqrt{(f+gx^n)^{\beta}}$ u. s. w. enthält, welche mit rationalen Functionen der Potenz x^n wie immer verbunden seyn mögen, kann durch nachstehende Substitution in ein Differenziale verwandelt werden, welches eine einzelne irrationale Function $\sqrt{(b-gz^2)}$ enthält, wo sodann letzteres nach §. 734. oder nach §. 735. zuweilen auch nach §. 736. eine rationale Gestalt annehmen wird. Wenn man nähmlich im §. 738. $\mu=2$ setzet; so ist

$$x^n=\frac{fz^2-a}{b-gz^2}, \frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{2(bf-ag)z\mathrm{d}z}{n(fz^2-a)(b-gz^2)},$$

$$\sqrt{(a+bx^n)}=\frac{z\sqrt{(fb-ag)}}{\sqrt{(b-gz^2)}}, \sqrt{(f+gx^n)}=\sqrt{\left(\frac{bf-ag}{b-gz^2}\right)},$$

$$z=\sqrt{\left(\frac{a+bx^n}{f+gx^n}\right)}=\frac{\sqrt{[(a+bx^n)(f+gx^n)]}}{f+gx^n}.$$

Setzet man nun $n=1$, so erhält man dadurch folgende Ausdrücke

$$x=\frac{fz^2-a}{b-gz^2}, \mathrm{d}x=\frac{2(bf-ag)z\mathrm{d}z}{(b-gz^2)^2},$$

$$\sqrt{(a+bx)}=\frac{z\sqrt{(bf-ag)}}{\sqrt{(b-gz^2)}}, \sqrt{(f+gx)}=\frac{\sqrt{(bf-ag)}}{\sqrt{(b-gz^2)}},$$

$$z=\sqrt{\left(\frac{a+bx}{f+gx}\right)}=\frac{\sqrt{[(a+bx)(f+gx)]}}{f+gx}.$$

Wenn

Wenn daher irgend ein Differenziale Xdx irrationale Fig. Functionen zweyer verschiedenen Binomien von der Gestalt $\sqrt{(a+bx)^m}$ und $\sqrt{(f+gx)^p}$ enthält, welche mit rationalen Functionen der veränderlichen Größe x wie immer verbunden seyn mögen; so kann dieses durch Anwendung vorstehender Substitutionen in ein anderes Differenziale verwandelt werden, welches nur eine einzelne irrationale Function $\sqrt{(b-gz^2)}$ enthält, wo sodann letzteres nach §. 734. oder nach §. 735. zuweilen auch nach §. 736. rational gemacht werden kann.

§. 741.

Das Differenziale Xdx, worin X außer $\sqrt{(a+bx+cx^2)^m}$ $\sqrt{(a+bx+cx^2)^p}$ u. s. w. keine andere irrationale Function enthält, es mögen diese Wurzelgrößen mit rationalen Functionen von x wie immer verbunden seyn, wird in ein rationales Differenziale verwandelt, wenn man

$$\sqrt{(a+bx+cx^2)} = \frac{a\sqrt{c}+bz+z^2\sqrt{c}}{b+2z\sqrt{c}}, \text{ nähmlich}$$

$$x = \frac{z^2-a}{b+2z\sqrt{c}}, \quad dx = \frac{2dz(a\sqrt{c}+bz+z^2\sqrt{c})}{(b+2z\sqrt{c})^2},$$

$z = x\sqrt{c}+\sqrt{(a+bx+cx^2)}$ setzet.

§. 742.

Wenn aber X irrationale Potenzen der Wurzel $\sqrt{(a+bx-cx^2)}$ und sonst keine andere irrationale Function enthält; so wird das Differenziale Xdx eine rationale Gestalt erhalten, wenn man

$$\sqrt{(a+bx-cx^2)} = \frac{z\sqrt{(b^2+4ac)}}{(1+z^2)\sqrt{c}}, \text{ nähmlich}$$

$$x = \frac{b(1+z^2)+(1-z^2(\sqrt{(b^2+4ac)}}{2c(1+z^2)},$$

$$dx = -\frac{2zdz\sqrt{(b^2+4ac)}}{c(1+z^2)^2},$$

$$z = \frac{2\sqrt{[c(a+bx-cx^2)]}}{2cx-b+\sqrt{(b^2+4ac)}} \text{ setzet.}$$

§. 743.

Fig.

§. 743.

Jedes Differenziale $X\mathrm{d}x$, welches außer den einnahmigen Wurzelgrößen $\sqrt[m]{x^n}$, $\sqrt[p]{x^q}$, $\sqrt[r]{x^t}$ u s. w. es mögen solche untereinander und mit rationalen Functionen von x wie immer verbunden seyn, keine andere irrationale Function enthält, wird eine rationale Gestalt annehmen, wenn man alle einzelnen Wurzelgrößen auf einen gemeinschaftlichen Wurzel-Exponenten μ bringet, und sodann

$\sqrt[\mu]{x}=z$, $x=z^{\mu}$, $\mathrm{d}x=\mu z^{\mu-1}\mathrm{d}z$, $x^{\alpha}=z^{\alpha\mu}$ setzet.

Z. B. Es ist $\int\frac{(a+\sqrt[3]{x^2})\mathrm{d}x}{x^2-x+\sqrt{x}}=\int\frac{(a+\sqrt[6]{x^4})\mathrm{d}x}{x^3-x+\sqrt[6]{x^3}}$,

$=\int\frac{6(az^2+z^6)\mathrm{d}z}{z^9-z^3+1}$ für $z=\sqrt[6]{x}$.

V. Abschnitt.

Integrirung der merkwürdigsten logarithmischen und trigonometrischen Differenzialen.

§. 744.

Sowohl die logarithmischen, als auch die trigonometrischen Differenzialen können nach den vorher gehenden Gründen integriret werden, wenn man darin eine schickliche Substitution trifft. Soll aber das Integrale durch eine Reihe ausgedrucket werden, welche unter gewissen Umständen abbrechen kann; so muß man (nach §. 722.) eine solche Function annehmen, daß aus deren Differenzirung ein Glied entspringt, welches der gegebenen Differenzial-Größe gleich ist. Dadurch wird das zu suchende Integrale erst in zwey Gliedern angegeben, wovon das erste schon wirklich integriret, bey den zweyten aber die Integration nur angezeiget ist. Eben so wird das zweyte Glied wieder in zwey andere Glieder zerleget, welche in die erste Gleichung substituiret werden. Auf diese Art verfahre man so lange, bis

das

das Gesetz der gesuchten Reihe entdecket ist. Ein Beyspiel hiervon haben wir schon im §. 722. bey der Herleitung der zweyten Verwandlungs-Formel B) gesehen. Im folgenden werden wir oft nach dieser Methode die Integralen einiger Differenzial-Größen bestimmen. Fig.

§. 745.

Um $\int a^{mx} x^n \, dx$ durch eine Reihe auszudrucken, welche abbricht, wenn n eine ganze positive Zahl ist; so betrachte man x^n als nnveränderlich und integrire in dieser Voraussetzung $a^{mx} x^n \, dx$; dadurch erhält man die Gleichung

$$\int a^{mx} x^n \, dx = \frac{a^{mx} x^n}{m \operatorname{Log}. a} + X \text{ wie im §. 722. bey B).}$$

Nun ist $d(a^{mx} x^n) = n a^{mx} x^{n-1} \, dx + mLa . a^{mx} x^n \, dx$; folglich ist

$$\int a^{mx} x^n \, dx = \frac{a^{mx} x^n}{mLa} - \frac{n}{mLa} \int a^{mx} x^{n-1} \, dx \ldots\ldots \text{A).}$$

Setzen wir in dieser Gleichung $n-1$ statt n; so ist

$$\int a^{mx} x^{n-1} \, dx = \frac{a^{mx} x^{n-1}}{mLa} - \frac{n-1}{mLa} \int a^{mx} x^{n-2} \, dx.$$

Folglich ist

$$\int a^{mx} x^n \, dx = \frac{a^{mx} x^n}{mLa} - \frac{n a^{mx} x^{n-1}}{(mLa)^2} + \frac{n(n-1)}{(mLa)^2} \int a^{mx} x^{n-2} \, dx.$$

Wenn man ferner nach und nach in der Gleichung (A) $n-2, n-3$, u. s. w. statt n setzet, und dann gehörig substituiret; so erhält man endlich

$$1. \int a^{mx} x^n \, dx = C + \frac{a^{mx}}{mLa} \left[x^n - \frac{n x^{n-1}}{mLa} + \frac{n(n-1) x^{n-2}}{(mLa)^2} - \frac{n(n-1)(n-2) x^{n-3}}{(mLa)^3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) x^{n-4}}{(mLa)^4} \mp \right]$$

Um $\int x^m (Lx)^n \, dx$ auszudrucken, so betrachte man $(Lx)^n$ als unveränderlich, damit man das erste Glied des gesuchten Integrals $\frac{x^{m+1} (Lx)^n}{m+1}$ erhalte. Dieses differenzire man und verfahre dann eben so wie bey dem oberen Ausdrucke,

oder

Fig. oder so wie bey dem einer Division ähnlichen Verfahren im §. 722. bey der Herleitung von B); so ist

$$\text{II. } \int x^m (Lx)^n \,dx = C + \frac{x^{m+1}}{m+1}\Big[(Lx)^n - \frac{n}{m+1}(Lx)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{(m+1)^2}.(Lx)^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)(Lx)^{n-3}}{(m+1)^3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(Lx)^{n-4}}{(m+1)^4} \mp \ldots\ldots\ldots\Big]$$

Aus dem Gesetze dieser zwey Reihen folget klar, daß beyde Reihen abbrechen, wenn n was immer für eine ganze positive Zahl ist. Setzen wir in dem zweyten Differenzial-Ausdrucke $m = -1$; so kann $\int \frac{dx(Lx)^n}{x}$ aus der angesetzten Reihe nicht bestimmet werden, weil in diesem Falle $m+1 = 0$ wird. Doch findet man

$$\text{III. } \int \frac{dx(Lx)^n}{x} = C + \frac{1}{n+1}.(Lx)^{n+1}$$

wenn man $Lx = z$, nähmlich $dx = h^z dz$ setzet, und dann gehörig substituiret.

Um für $\int \frac{a^x dx}{x^n} = \int a^x . x^{-n} dx$, und für $\int \frac{x^m dx}{Log^n x} = \int x^m . (Lx)^{-n} dx$ brauchbare Reihen zu erhalten, sehe man bey dem Anfange der Integration bey der ersten Formel a^x, und bey der zweyten x^m für unveränderlich an; so erhält man auf die angezeigte Art

$$\text{IV. } \int \frac{a^x dx}{x^n} = C - \frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a^x Log.a}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} - \frac{a^x Log^2 a}{(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-3}} - \ldots\ldots\ldots - \frac{a^x Log.^{n-2} a}{(n-1)(n-2)\ldots 2.1.x} + \frac{Log^{n-1} a}{(n-1)(n-2)\ldots 2.1}.\int \frac{a^x dx}{x}$$

V.

V. $\int \frac{x^m \mathrm{d}x}{Log^n x} = C - \frac{x^{m+1}}{(n-1)(Lx)^{n-1}} - \frac{(m+1)x^{m+1}}{(n-1)(n-2)(Lx)^{n-2}}$ Fig.

$$- \frac{(m+1)^2 x^{m+1}}{(n-1)(n-2)(n-3)(Lx)^{n-3}} - \ldots\ldots$$

$$- \frac{(m+1)^{n-2} x^{m+1}}{(n-1)(n-2)\ldots 2.1.Lx} + \frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 2.1} \int \frac{x^m \mathrm{d}x}{Lx}$$

Endlich erhält man auch

VI. $\int \frac{a^x \mathrm{d}x}{x} = \int \frac{\mathrm{d}z}{Logz}$ für $z = a^x$.

VII. $\int \frac{x^m \mathrm{d}x}{Log.x} = \int \frac{\mathrm{d}z}{Logz.}$ für $z = x^{m+1}$.

VIII $\int \frac{\mathrm{d}z}{Log\, z} = \int z^0 \mathrm{d}z . (Log.z)^{-1}$, welches nach II. sich in eine Reihe auflösen läßt.

§. 746.

Wenn man die Ausdrücke $(\text{arc sin } x) . \int X \mathrm{d}x$, $(\text{arc cos } x) . \int X \mathrm{d}x$, $(\text{arctang} x) . \int X \mathrm{d}x$ differenziret, so erhält man dadurch folgende Formeln

I. $\int X \mathrm{d}x \,.\, \text{arcsin } x = (\text{arc sin } x) . \int X \mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}x \int X \mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)}}$

II. $\int X \mathrm{d}x \,.\, \text{arc cos } x = (\text{arc cos } x) . \int X \mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x \int X \mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)}}$

III. $\int X \mathrm{d}x \,.\, \text{arc tang} x = (\text{arc tang } x) . \int X \mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}x \int X \mathrm{d}x}{1+x^2}$

Es ist einleuchtend, daß hier die Bestimmung der Integralen von $\int X \mathrm{d}x$ abhängt. Ist einmahl dieses gefunden so wird es leicht seyn zu entscheiden, ob die Integralen $\int \frac{\mathrm{d}x \int X \mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)}}, \int \frac{\mathrm{d}x \int X \mathrm{d}x}{1+x^2}$ nach den angeführten Regeln sich angeben lassen.

Es sey $X = x^m$; so ist $\int X \mathrm{d}x = \frac{x^{m+1}}{m+1}$. In diesem Falle lassen sich demnach aus den vorhergehenden, nachstehende merkwürdige Formeln ableiten.

IV.

Fig.

$$\text{IV.} \int x^m \mathrm{d}x . \arcsin x = \frac{x^{m+1} \arcsin x}{m+1} - \frac{1}{m+1} \cdot \int \frac{x^{m+1}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$\text{V.} \int x^m \mathrm{d}x . \arccos x = \frac{x^{m+1} \arccos x}{m+1} + \frac{1}{m+1} \cdot \int \frac{x^{m+1}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$\text{VI.} \int x^m \mathrm{d}x . \operatorname{arctang} x = \frac{x^{m+1} \operatorname{arctang} x}{m+1} - \frac{1}{m+1} \cdot \int \frac{x^{m+1}\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

Es ist klar, daß diese Integralen für jede ganze Zahl m, sie möge positiv oder negativ seyn, vollständig angegeben werden können, den einzigen Fall $m = -1$ ausgenommen, weil dann $m + 1 = 0$ wird.

§. 747.

Vermöge §. 685. ist $\mathrm{d}(\sin\varphi) = \mathrm{d}\varphi \cos\varphi$, und $\mathrm{d}(\cos\varphi) = -\mathrm{d}\varphi . \sin\varphi$; folglich ist auch

I. $\int \mathrm{d}\varphi . \cos\varphi = C + \sin\varphi$, und

II. $\int \mathrm{d}\varphi . \sin\varphi = C - \cos\varphi$.

Eben so findet man auch

$$\text{III.} \int \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sin\varphi} = C + L \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi$$

$$\text{IV.} \int \frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos\varphi} = C + L \operatorname{tang} (45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi)$$

$$\text{V.} \int \frac{\mathrm{d}\varphi \cos\varphi}{\sin\varphi} = C + L \sin\varphi$$

$$\text{VI.} \int \frac{\mathrm{d}\varphi \sin\varphi}{\cos\varphi} = C - L \cos\varphi$$

$$\text{VII.} \int \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sin\varphi . \cos\varphi} = C + L \operatorname{tang} \varphi$$

VIII. $\int \mathrm{d}\varphi . \sin\varphi \cos\varphi = C + \frac{1}{2}\sin^2\varphi$.

Diese Formeln erhält man, wenn man $\sin\varphi$ oder $\cos\varphi = x$ setzet, und dann die gehörige Substitution und Reduction der trigonometrischen Ausdrücke vornimmt. Um z. B. die dritte Formel zu finden, setze man $\sin\varphi = x$, nähmlich $\varphi = \arcsin x$; so ist $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}(\arcsin x) = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)}}$.

Das

Daraus folgt $\int \frac{d\phi}{\sin\varphi} = \int \frac{dx}{x\sqrt{(1-x^2)}}$. Nun ist aber Fig.

$\int \frac{dx}{x\sqrt{(1-x^2)}} = C + L\frac{x}{1+\sqrt{(1-x^2)}}$. Folglich ist

$\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = C + L\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}$. Es ist aber $\sin\phi = 2\sin\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi$

und $1+\cos\phi = 2\cos^2\frac{1}{2}\phi$; folglich ist auch

$\int \frac{d\varphi}{\sin\phi} = C + L\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi} = C + L\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi$. Eben derselbe Weg muß bey der Herleitung der übrigen Formeln eingeschlagen werden.

§. 748.

Wir wollen die Substitution für die Integrirung der folgenden allgemeinen trigonometrischen Differenzial-Größen ansetzen, um in einem jeden besonderen Falle das gehörige Integrale finden zu können.

Für $x = \sin\phi$ und $\sqrt{(1-x^2)} = \cos\varphi$ ist

I. $\int d\varphi \sin^n\varphi = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$

II. $\int d\phi \sin^n\varphi . \cos^m\varphi = \int x^n dx \sqrt{(1-x^2)^{m-1}}$

III. $\int \frac{d\varphi \sin^n\phi}{\cos^m\varphi} = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x^2)^{m+1}}}$

IV. $\int \frac{d\phi . \cos^m\phi}{\sin^n\varphi} = \int \frac{dx\sqrt{(1-x^2)^{m-1}}}{x^n}$

V. $\int \frac{d\varphi}{\sin^n\phi . \cos^m\varphi} = \int \frac{dx}{x^n\sqrt{(1-x^2)^{m+1}}}$

Für $x = \cos\varphi$ und $\sqrt{(1-x^2)} = \sin\varphi$ ist

VI. $\int d\varphi \cos^n\phi = -\int \frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$.

Für $x = a + b\cos\phi$ und

$\sqrt{(b^2-a^2+2ax-x^2)} = b\sin\phi$ ist

VII. $\int \frac{d\phi}{(a+b\cos\phi)^n} = -\int \frac{dx}{x^n\sqrt{(b^2-a^2+2ax-x^2)}}$

VIII.

Fig. VIII. $\int \frac{d\varphi \sin^m \varphi}{(a+b\cos\varphi)^n} = -\frac{1}{b^m}\int \frac{dx\sqrt{(b^2-a^2+2ax-x^2)^{m-1}}}{x^n}$

IX. $\int \frac{d\varphi \cos^m \varphi}{(a+b\cos\varphi)^n} = -\frac{1}{b^m}\int \frac{(x-a)^m dx}{x^n \sqrt{(b^2-a^2+2ax-x^2)}}$

Durch die Substitution $\sin m\varphi = x$ lassen sich auch folgende Integral-Formeln entwickeln.

X. $\int d\varphi \cos m\varphi (\sin m\varphi)^n = C + \frac{(\sin m\varphi)^{n+1}}{m(n+1)}$

XI. $\int d\varphi (\sin m\varphi)\ (\cos m\varphi)^n = C - \frac{(\cos m\varphi)^{n+1}}{m(n+1)}$

XII. $\int d\varphi \sin m\varphi \,.\, \cos n\varphi = C - \frac{\cos(m+n)\varphi}{2(m+n)}$

$$- \frac{\cos(m-n)\varphi}{2(m-n)}$$

XIII. $\int d\varphi \sin m\varphi \,.\, \sin n\varphi = C + \frac{\sin(m-n)\varphi}{2(m-n)}$

$$- \frac{\sin(m+n)\varphi}{2(m+n)}$$

XIV. $\int d\varphi \cos m\varphi \,.\, \cos n\varphi = C + \frac{\sin(m+n)\varphi}{2(m+n)}$

$$+ \frac{\sin(m-n)\varphi}{2(m-n)}.$$

Die drey letzten Formeln können nur dadurch erhalten werden, wenn man die Producte der Functionen durch die Functionen von der Summe und Differenz der Winkel ausdrucket.

§. 749.

Auch die Integralen von $\varphi^n d\varphi . \sin\varphi$, und $\varphi^n d\varphi . \cos\varphi$ lassen sich durch Reihen angeben, welche abbrechen, wenn n eine positive ganze Zahl ist. Man muß nähmlich um diese gesuchten Integralen zu erhalten, im Anfange der Integration φ^n als unveränderlich ansehen, und sodann das im

§. 722.

§. 722. bey der Herleit. von B) angeführte, einer Divis.-Bear- Fig.
beitung ähnliche Verfahren anwenden. Dadurch erhält man

I. $\int \varphi^n \, d\varphi \sin\varphi = C - \varphi^n \cos\varphi + n\varphi^{n-1}\sin\varphi + n(n-1)\varphi^{n-2}\cos\varphi$
$-n(n-1)(n-2)\varphi^{n-3}\sin\varphi - n(n-1)(n-2)(n-3)\varphi^{n-4}\cos\varphi + + - - \ldots$

II. $\int \varphi^n d\varphi \cos\varphi = C + \varphi^n \sin\varphi + n\varphi^{n-1}\cos\varphi - n(n-1)\varphi^{n-2}\sin\varphi$
$-n(n-1)(n-2)\varphi^{n-3}\cos\varphi + + - - \ldots$

§. 750.

Ehe wir zu der Integrirung der Differenzialen von mehreren veränderlichen Größen schreiten, wollen wir noch eine allgemeine Formel für $\int z\,dx$, in welcher dx für unveränderlich angenommen wird, entwickeln. Diese kann auf folgende Art abgeleitet werden.

Es ist $d(xz) = z\,dx + x\,dz$; folglich ist

$\int z\,dx = xz - \int x\,dz; \ldots\ldots$ A)

Damit man ferner $\int x\,dz$ integriren könne, multiplicire man diese Differenzial-Größe mit $\frac{dx}{dx}$ um $\int x\,dz = \int x\,dx \cdot \frac{dz}{dx}$ zu erhalten, und betrachte Anfangs $\frac{dz}{dx}$ als unveränderlich; so ist $\int x^1\,dx \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{dz}{dx}$.

Nun differenzire man dieses; so ist

$d(\frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{dz}{dx}) = x\,dz + \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{ddz}{dx}$; folglich ist

$\int x\,dz = \frac{1}{2}x^2 \frac{dz}{dx} - \frac{1}{2}\int x^2 \cdot \frac{ddz}{dx}$.

Substituiret man diese Werthe in die obere Gleichung A), so ist

$\int z\,dx = xz - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{1}{2}\int x^2 \cdot \frac{ddz}{dx} \ldots\ldots$ B)

Nun

Fig. Nun integrire man wieder $\int x^2 . \frac{ddz}{dx} = x^2\,dx . \frac{d\,dz}{dx^2}$;

so daß man $\frac{ddz}{dx^2}$ für unveränderlich ansieht. Dadurch erhält man $\int x^2\,dx . \frac{ddz}{dx^2} = \frac{x^3}{3} . \frac{ddz}{dx^2}$. Wenn man dieses wieder differenziret; so ist

$d(\frac{x^3}{3} . \frac{ddz}{dx^2} = x^2 . \frac{ddz}{dx} + \frac{x^3}{3} . \frac{d^3z}{dx^2}$ nähmlich

$\int x^2 . \frac{ddz}{dx} = \frac{x^3}{3} . \frac{ddz}{dx^2} - \frac{1}{3}\int x^3 \frac{d^3z}{dx^2}$.

Substituiret man diese Werthe in der Gleichung B), so ist

$$\int z\,dx = xz - \frac{x^2}{2} . \frac{dz}{dx} + \frac{x^3}{2.3} . \frac{ddz}{dx^2} - \frac{1}{6}\int x^3 \frac{d^3z}{dx^2}.$$

Nun betrachte man wieder bey $\frac{x^3\,d^3z}{dx^2} = x^2\,dx . \frac{d^3z}{dx^3}$ den Bruch $\frac{d^3z}{dx^3}$ für unveränderlich, und verfahre eben so bey der fernern Arbeit, so kommt endlich folgende Reihe zum Vorschein

$$\int z\,dx = xz - \frac{x^2}{2} . \frac{dz}{dx} + \frac{x^3}{2.3} . \frac{ddz}{dx^2} - \frac{x^4}{2.3.4} . \frac{d^3z}{dx^3} \pm \text{u. s. w.}$$

Es ist einleuchtend, daß diese Reihe abbrechen muß, wenn für was immer für eine positive ganze Zahl n, $d^n z = 0$ wird; im Gegentheile läuft sie ohne Ende fort, und kann als eine Annäherungs-Formel dienen, wenn die Function so beschaffen ist, daß die Reihe schnell genug zusammen läuft.

VI. Abschnitt.

Fig.

Einige Kunstgriffe, wodurch verschiedene Differenzialen von mehreren veränderlichen Größen, wie auch verschiedene höhere Differenzial-Gleichungen integriret werden.

§. 751.

Aus einer Differenzial-Größe, welche mehrere veränderliche Größen enthält, findet man oft das gesuchte Integrale, wenn man die im §. 722. bey der Herleitung der Verwandlungs-Formel B) gegebene Regel anwendet Man integrire nähmlich irgend ein Glied der vorgelegten Differenzial-Größe so, als wenn nur ein Factor veränderlich und der andere beständig wäre. Auf diese Art hat man das erste Glied des gesuchten Integrales erhalten Nun differenzire man dieses Glied, und ziehe das Differenziale desselben von der ganzen Differenzial-Größe ab. In diesem Ueberreste integrire man wieder ein Glied mit der vorigen Bemerkung, differenzire es, und suche dann wieder den Ueberrest. Dieses mit der algebraischen Divisions-Arbeit übereinkommende Verfahren wird so lange fortgesetzet, bis endlich der Ueberrest $= 0$ wird. Trifft dieser Fall ein, so hat man das vollständige Integrale der Differenzial-Größe erhalten. Ist dieses nicht, so müßte der Ueberrest mit dem angehängten Integral-Zeichen den schon entwickelten Gliedern beygesetzet werden. Im letzten Falle muß man noch besonders bedacht seyn, in einer zu integrirenden Differenzial-Gleichung von mehreren veränderlichen Größen diese abzusondern, nähmlich durch eine schickliche Substitution die Differenzial-Gleichung dergestalt zu verwandeln und zu ordnen, daß jedes Glied nur eine einzige veränderliche Größe enthält. Sodann wird die Integration nach den bereits gegebenen Regeln vorgenommen. Wir wollen einige Beyspiele ansetzen.

Fig. I. Es sey $dZ = \frac{1}{2}x^3 y dy + 3z dz + \frac{3}{4}y^2 x^2 dx - yz^{-2} dz + 2z dz Lz + z^{-1} dy$

so ist $Z = \frac{1}{4}x^3 y^2 + \frac{3}{2}z^2 + yz^{-1} + z^2 Lz - \frac{1}{2}z^2$

$\pm\frac{2}{4}x^3 y dy \pm\frac{3}{4}y^2 x^2 dx$

$+3z dz - yz^{-2} dz + 2z dz Lz + z^{-1} dy$

$\pm 3z dz \mp yz^{-2} dz \pm z^{-1} dy$

$+2z dz Lz$

$\pm 2z dz Lz \pm z dz$

$-z dz$

$\mp z dz$

0

nähmlich $Z = C + \frac{1}{4}x^3 y^2 + \frac{y}{z} + z^2 (1 + Lz)$

II. Es sey $x^2 dy Lx + 2xy dx Lx - x^2 dy - xy dx$

$+3ax^2 dx Lx - b dy Ly + dy(c^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}$

$+\frac{1}{2}z^2 dy(c^2 - z^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}yz^3 dz(c^2 - z^2)^{-\frac{3}{2}} = 0;$

so ist $x^2 y Lx - x^2 y + ax^3 Lx - \frac{1}{3}ax^3 - by Ly$

$+by + y(c^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}yz^2 (c^2 - z^2)^{-\frac{1}{2}} = C.$

§. 752.

Das Integrale einer gleichartigen Differenzial-Gleichung von zwey veränderlichen Größen $Pdx + Qdy = 0$, wo nähmlich P und Q entweder jede, oder doch eine von diesen Functionen zwey veränderliche Größen x und y enthält, so zwar, daß die Summe der Exponenten von den veränderlichen Größen in jedem Gliede in beyden Functionen eben dieselbe sey, wird, wenn es sich nach dem vorigen §. nicht angeben läßt, durch die Substitution $\frac{P}{Q} = Z$ und $\frac{y}{x} = z$ in Z mittelst nachstehender Formel gefunden.

Für

Für die gleichartige Differenzial-Gleichung Fig.

$$Pdx+Qdy=0,$$

ist das Integrale für $\frac{P}{Q}=Z$, und $\frac{y}{x}=z$ in Z

$$Lx+\int\frac{dz}{z+Z}+C=0.$$

Denn wenn man für P und dy die angenommenen Werthe QZ und $d(xz)$ substituiret; so ist

$$QZdx+Q(zdx+xdz)=0, \text{ ferner}$$

$$\frac{Zdx+zdx}{x}+dz=0, \text{ und } \frac{dx}{x}+\frac{dz}{Z+z}=0;$$

folglich $Lx+\int\frac{dz}{Z+z}+C=0.$

Einige Beyspiele werden die Anwendung dieser Formel erläutern.

I. Für $0=xdx+ydy-xdy+ydx=$
$(x+y)dx+(y-x)dy$

ist $P=x+y$, $Q=y-x$, und

$$Z=\frac{x+y}{y-x}=\frac{1+z}{z-1} \text{ für } z=\frac{y}{x}. \text{ Folglich ist}$$

$$C=Lx+\int\frac{(z-1)dz}{1+z^2}=Lx+\int\frac{zdz}{1+z^2}-\int\frac{dz}{1+z^2}$$

$$=Lx+\tfrac{1}{2}L(1+z^2)-\text{arc.tg.}z=\tfrac{1}{2}L(x^2+y^2)-\text{arc.tg.}\frac{y}{x}$$

II. Es sey $vdu-dv\sqrt{(u^2+v^2)}=0$ zu integriren, so ist $P=-\sqrt{(u^2+v^2)}$, $Q=v$, $Z=\frac{P}{Q}=-\sqrt{(z^2+1)}$ für $z=\frac{u}{v}$.

Substituiret man nun diese Werthe, so ist

$$C=Lv+\int\frac{dz}{z-\sqrt{(z^2+1)}}=Lv-\int zdz-\int dz\sqrt{(z^2+1)}$$

$$=L.\frac{v\sqrt{v}}{\sqrt{[u+\sqrt{(u^2+v^2)}]}}-\frac{u}{2v^2}.[u+\sqrt{(u^2+v^2)}].$$

Fig.

§. 753.

Hier folgen noch einige Differenzial-Gleichungen von zwey veränderlichen Größen, nebst ihrer zum Theil verrichteten Integrirung durch die dazu erforderliche Substitution.

1. Es ist nähmlich von folgender Differenzial-Gleichung

$$(a+bx+cy)\,dx+(\alpha+\beta x+\gamma y)\,dy=0$$

das Integrale

$$C=L[\alpha+\beta x+\gamma y)\ \mathrm{V}\ (\gamma z^2-(\beta+c)\,z+b)]$$
$$-\frac{\beta-c}{2}\int\frac{dz}{\gamma z^2-(\beta+c)\,z+b}$$

wenn $z=\frac{a+bx+cy}{\alpha+\beta x+\gamma y}$ gesetzet wird.

Wäre aber $(a+bx+cy)\,dx-(\alpha+\beta x+\gamma y)\,dy=0$

oder $-(a+bx+cy)\,dx+(\alpha+\beta x+\gamma y)\,dy=0$

so würde $C=L[\alpha+\beta x+\gamma y)\ \mathrm{V}\ (\gamma z^2-(\beta-c)z-b)]$

$$-\frac{(\beta+c)}{2}\int\frac{dz}{\gamma z^2-(\beta-c)z-b}$$

daraus folgen,

wenn $z=-\frac{a+bx+cy}{\alpha+\beta x+\gamma y}$ gesetzet wird.

Hieraus folgt für die Differenzial-Gleichung

$$(a+bx+cy)\,dx+(\alpha+cx+\frac{c^2}{b}y)\,dy=0$$

das Integrale

$$(ac-\alpha b)x+\frac{b}{2c}(\alpha+cx+\frac{c^2}{b}y)^2=\text{Const.}$$

und für die Differenzial-Gleichung

$$(a+bx+cy)\,dx-(\alpha+cx+\frac{c^2}{b}y)\,dy=0,\ \text{oder}$$

$$-(a+bx+cy)\,dx+(\alpha+cx+\frac{c^2}{b}y)\,dy=0$$

ist

ist das Integrale Fig.

$$4bcx - 2b(\alpha + cx + \frac{c^2}{b}y) + (ac - \alpha b) \times$$

$$\text{Log}[ac - \alpha b + 2b(\alpha + cx + \frac{c^2}{b}y)] = C.$$

Für die Differenzial-Gleichung aber

$$(a + bx + cy)\,dx + [\alpha + \beta\,(bx + cy)]\,dy = 0$$

ist das Integrale

$$(\beta b - c)^2 x - (\beta b - c)[\alpha + \beta(bx + cy)] - (a\beta - \alpha)\,c \times$$
$$\text{Log.}[ac - \alpha b - (\beta b - c)\,(bx + cy)] = C; \text{ oder}$$
$$(\beta b - c)^2 x - (a\beta - \alpha)c \times \text{Log}[ac - \alpha b - (\beta b - c)(bx + cy)]$$
$$+ \beta[ac - \alpha b - (\beta b - c)\,(bx + cy)] = C.$$

II. Von folgender Differenzial-Gleichung

$$dy + y\,P dx + y^n\,Q dx = 0$$

ist das dazu gehörige Integrale

$$\frac{1}{y^{n-1}h^{(n-1)\int P dx}} - (n-1)\int \frac{Q dx}{h^{(n-1)\int P dx}} = C$$

wobey P und Q was immer für Functionen von der veränderlichen Größe x sind. Z. B.

1) Es sey $0 = ax^2\,dy + bxy\,dx + c\,dx$

$$= dy + y \cdot \frac{b\,dx}{ax} + y^0 \cdot \frac{c\,dx}{ax^2};$$

so ist $P dx = \frac{b\,dx}{ax}$, $Q dx = \frac{c\,dx}{ax^2}$, $n = 0$,

$$\int P dx = \frac{b}{a} Lx, \quad h^{(n-1)\int P dx} = h^{-\frac{b}{a}Lx} = x^{-\frac{b}{a}},$$

$$\int \frac{Q dx}{h^{(n-1)\int P dx}} = \int \frac{c\,dx}{ax^2 - \frac{b}{a}} = \frac{c}{a} \cdot \int x^{\frac{b}{a}-2}\,dx = \frac{cx^{\frac{b}{a}-1}}{\frac{b}{a}-1}$$

Es ist also

$$C = yx^{\frac{b}{a}} + \frac{cx^{\frac{b}{a}}}{(b-a)x} = \frac{(bxy - axy + c)x^{\frac{b}{a}-1}}{b-a}.$$

2)

Fig. 2.) Es sey $dy - x^2 dy + aydx - by^2 dx + by^2 x^2 dx = 0$

oder $dy + y \cdot \frac{adx}{1-x^2} + y^2 \cdot bdx = 0$;

so ist $Pdx = \frac{adx}{1-x^2}$, $Qdx = -bdx$, $n = 2$;

$$\int Pdx = \frac{a}{2} \cdot L \frac{1+x}{1-x} = L \vee \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^a;$$

$$h^{(n-1)\int Pdx} = h^{L \vee \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^a} = \vee \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^a$$

$$\int \frac{Qdx}{h^{(n-1)\int Pdx}} = -b \int dx \vee \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^a.$$ Folglich ist

$$C = \frac{1}{y} \vee \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^a + b \int dx \vee \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^a;$$

dieser letzte Ausdruck kann nach §. 739. vollends integriret werden.

§. 754.

Eine ungleichartige Differenzial-Gleichung

$$ax^m y^n dy + bx^p y^q dx + cx^r y^s dx = 0$$

von der Eigenschaft, daß $\frac{p-r}{s-q} = \frac{m-r-1}{s-n-1}$ ist,

wenn das Integrale derselben weder nach §. 751. noch nach §. 753. noch auch durch die Absonderung der veränderlichen Größe sich bestimmen läßt, wird in eine gleichartige Differenzial-Gleichung durch folgende Substitution verwandelt.

$$y = z^{\frac{p-r}{s-q}}, \quad dy = \left(\frac{p-r}{s-q}\right) z^{\frac{p-r}{s-q}-1} dz, \quad z = y^{\frac{s-q}{p-r}}.$$

Nun läßt sich das Integrale einer solchen Differenzial-Gleichung nach §. 752. bestimmen.

Z. B. Es sey folgende Differenzial-Gleichung zu integriren.

$$xy^3 dx - dy + x^2 y^4 dx = 0,$$

so

so ist, wenn man diese mit der vorigen Formel vergleichet, Fig.

$$0 = \left\{\begin{array}{c} -1\,.x^0 y^0\,dy + 1\,.x^2 y^4\,dx + 1\,.x^1 y^3\,dx \\ ax^m y^n\,dy + bx^p y^q\,dx + cx^r y^s\,dx \end{array}\right\}$$ nähmlich

$$\frac{p-r}{s-q} = \frac{2-1}{3-4} = -1, \text{ und } \frac{m-r-1}{s-n-1} = \frac{0-1-1}{3-0-1} = -1;$$

folglich ist $y = z^{-1} = \frac{1}{z}$, $dy = -\frac{dz}{z^2}$

und $xy^3\,dx + x^2y^4\,dx - dy = 0$

$$= \frac{x\,dx}{z^3} + \frac{x^2\,dx}{z^4} + \frac{dz}{z^2} = (xz + x^2)\,dx + z^2\,dz.$$

Ferner ist, wenn man die weitere Entwickelung nach §. 751. vornimmt,

$$P = xz + x^2,\ Q = z^2,\ Z = \frac{xz + x^2}{z^2}.$$

Man setze nun hier $\omega = \frac{z}{x}$,

so ist endlich das gesuchte Integrale

$$C = Lx + \int \frac{d\omega}{\omega + Z} = Lx + \int \frac{\omega^2\,d\omega}{\omega^3 + \omega + 1}$$

für $\omega = \frac{1}{xy}$.

Anmerkung. Man setze in der oberen Formel $r = p$,

so ist

$$ax^m y^n\,dy + (by^q + cy^s)x^p\,dx = 0$$

$$= \frac{ay^n\,dy}{by^q + cy^s} + x^{p-m}\,dx$$

folglich ist das Integrale

$$C = \frac{x^{1+p-m}}{1+p-m} + a\int \frac{y^{n-q}\,dy}{b + cy^{s-q}}.$$

Setzet man aber $s = q$; so ist

$$ax^m y^n\,dy + (bx^p + cx^r)y^q\,dx = 0$$

$$= ay^{n-q}\,dy + (bx^{p-m} + cx^{r-m})\,dx$$

folg-

Fig. folglich ist in diesem Falle das Integrale

$$C = \frac{ay^{1+n-q}}{1+n-q} + \frac{bx^{1+p-m}}{1+p-m} + \frac{cx^{1+r-m}}{1+r-m}.$$

§. 755.

Wenn eine Differenzial-Gleichung von mehreren veränderlichen Größen weder eine Integration nach den angeführten Regeln, noch die Absonderung der veränderlichen Größen zuläßt; so muß man noch untersuchen, ob sich dieselbe nicht durch irgend eine Substitution so verwandeln lasse, daß man sodann entweder die veränderlichen Größen absondern, oder das Integrale nach den angeführten Formeln bestimmen könne. Z. B.

Es sey 1.) $x\mathrm{d}x = ax^4y\mathrm{d}y + 2abx^2y^3\mathrm{d}y + ab^2y^5\mathrm{d}y$ so ist auch $x\mathrm{d}x = ay\mathrm{d}y(x^2+by^2)^2$.

Nun setze man $x^2+by^2 = z$, $2x\mathrm{d}x + 2by\mathrm{d}y = \mathrm{d}z$, so ist $\frac{1}{2}\mathrm{d}z - by\mathrm{d}y = ayz^2\,\mathrm{d}y$; folglich

$$y\mathrm{d}y = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{d}z}{b+az^2}.$$ Hieraus folgt

$$y^2 = C + \int\frac{\mathrm{d}z}{b+az^2} = C + \frac{1}{\sqrt{ab}}.\text{arc.tang.}\frac{az}{\sqrt{ab}};$$

und ferner, wenn man für z den dazu gehörigen Werth wieder substituiret,

$$y = \sqrt{\left(C + \frac{1}{\sqrt{ab}}\,\text{arc.tang.}\,\frac{ax^2+aby^2}{\sqrt{ab}}\right)},\text{und}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{(ab)^{\frac{1}{2}}}{a}.\,\text{tang.arc.}\,[(y^2-C)\,(ab)^{\frac{1}{2}}] - by^2\right)}.$$

2. Es sey ferner folgende Differenzial-Gleichung zu integriren

$$ax\mathrm{d}y + by\mathrm{d}x + x^my^n(fx\mathrm{d}y + gy\mathrm{d}x) = 0;\ \text{oder}$$

$$\frac{a\mathrm{d}y}{y} + \frac{b\mathrm{d}x}{x} + x^my^n.\left(\frac{f\mathrm{d}y}{y} + \frac{g\mathrm{d}x}{x}\right) = 0;$$

so

so ist für $y^a x^b = z$ und $y^f x^g = t$

$\frac{a\,dy}{y} + \frac{b\,dx}{x} = \frac{dz}{z}$, und $\frac{f\,dy}{y} + \frac{g\,dx}{x} = \frac{dt}{t}$, ferner Fig.

$y^{ap} x^{bp} = z^p$, $y^{fq} x^{gq} = t^q$, daher

$y^{ap-fq} x^{bp-gq} = z^p t^{-q}$.

Nun setze man der Kürze des Ausdruckes wegen

$ap - fq = n$, und $bp - gq = m$

so ist $p = \frac{gn - fm}{ag - bf}$, $q = \frac{bn - am}{ag - bf}$,

und die verwandelte Gleichung

$\frac{dz}{z} + z^p t^{-q} \cdot (\frac{dt}{t}) = 0$, oder

$z^{-p-1} dz + t^{-q-1} dt = 0$; daraus folgt

$-\frac{z^{-p}}{p} - \frac{t^{-q}}{q} = -qz^{-p} - pt^{-q} = C$ nähmlich

$(am - bn)(y^a x^b)^{\frac{fm-gn}{ag-bf}} + (fm - gn)(y^f x^g)^{\frac{am-bn}{ag-bf}} = C$.

§. 756.

Nachstehende Formeln enthalten die allgemeine Regel, wie das höhere Differenziale jeder Function von einer einzigen veränderlichen Größe, deren erstes Differenziale dx beständig ist, zu integriren sey.

Aus der Gleichung $d^n y = X dx^n$, oder $\frac{d^n y}{dx^{n-1}} = X dx$

fließen die nach einander folgenden Integrationen

1) $\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = C' + \int X dx$, oder $\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-2}} = C' dx + dx \int X dx$

2) $\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} = C'' + C'x + \int dx \int X dx$ oder

$\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-3}} = dx(C'' + C'x + \int dx \int X dx)$

3) $\frac{d^{n-3} y}{dx^{n-3}} = C''' + C''x + \frac{1}{2} C'x^2 + \int dx \int dx \int X dx$ u. s. w.

Fig. Diese Regeln leuchten auf der Stelle ein, wenn man nach §. 687 die Entstehung der höhern Differenzialen aufmerksam betrachtet. Die Anwendung dieser Regeln ist aus folgendem Beyspiele zu ersehen.

Es sey $d^3y = -\frac{3xdx^3}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$ zu integriren; so ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C' + \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}};$$

daher $\frac{dy}{dx} = C'' + C'x + \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$

endlich $y = C''' + C''x + \frac{1}{2}C'x^2 + \sqrt{(1+x^2)}$.

§. 757.

Die Differenzial-Gleichungen vom höhern Range, welche mehrere veränderliche Größen und ihre Differenzialen enthalten; können zuweilen nach §. 751. integriret werden. Sehr oft wird man dabey verschiedene Substitutionen und Verwandlungen vornehmen müssen (z. B. in den gleichartigen Differenzial-Gleichungen von zwey veränderlichen Größen x, y kann man $\frac{dy}{dx} = z$ setzen, damit $dy = zdx$, $ddy = dzdx$ sey, vorausgesetzt daß dx unveränderlich ist), um zu ersehen, ob die Absonderung der veränderlichen Größen möglich sey, und dadurch die Integration vollbracht werden könne. Z. B.

I. Aus $ddz = 3x^2ydd x + 6xydx^2 + 6x^2dxdy + x^3ddy + 2yddy + 2dy^2$

folgt $dz = 3x^2ydx + x^3dy + 2ydy$;

$$\begin{array}{l} \pm 3x^2ydd x \pm 3x^2dxdy \pm 6xydx^2 \\ \hline +3x^2dxdy + x^3ddy + 2yddy + 2dy^2 \\ \pm 3x^2dxdy \pm x^3ddy \\ \hline +2yddy + 2dy^2 \\ \pm 2yddy \pm 2dy^2 \\ \hline 0 \end{array}$$

Endlich ist das gesuchte Integrale $z = x^3y + y^2 + C$.

II. Es sey $dz = \frac{y\,ddx}{dt} + \frac{a\,ddy}{dt} - \frac{x\,ddy}{dt}$ Fig.

wobey dt unveränderlich ist; so ist nach §. 751.

$z = \frac{y\,dx}{dt} - \frac{x\,dy}{dt} + \frac{a\,dy}{dt}$, nähmlich

$$z = C + y \cdot \frac{dx}{dt} + (a - x) \cdot \frac{dy}{dt}.$$

III. Es sey $ddy = 10xz\,ddz + 10x\,dz^2 + 20z\,dx\,dz + 6x\,dx^2$

die zu integrirende Differ. Gleichung bey unveränderlichem dx, so ist $dy = 10xz\,dz + 5z^2\,dx + 3x^2\,dx + C\,dx$;

folglich $y = 5xz^2 + x^3 + Cx + C'$.

IV. Es sey $ddy + a\,dx\,dy + b\,dy^2 = 0$

zu integriren, wobey dx unveränderlich ist. Man setze $\frac{dy}{dx} = z$, damit $dy = z\,dx$, und $ddy = dz\,dx$ sey; so ist

$dz\,dx + az\,dx^2 + bz^2\,dx^2 = 0$, und

$$\frac{dz}{az + bz^2} = -dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{dz}{z} - \frac{1}{a} \cdot \frac{b\,dz}{a + bz}; \text{ folglich}$$

$$-x = \frac{1}{a} Lz - \frac{1}{a} \cdot L(a + bz) + \frac{1}{a} LC$$

$$= \frac{1}{a} L \cdot \frac{Cz}{a + bz}$$

und $h^{-ax} = \frac{Cz}{a + bz}$; daher ist auch

$$z = \frac{ah^{-ax}}{C - bh^{-ax}} = \frac{a}{Ch^{ax} - b}.$$

Da nun $dy = z\,dx$ ist, so ist auch

$dy = \frac{a\,dx}{Ch^{ax} - b}$; und hiervon das Integrale

$$y = \frac{1}{b} \cdot L \cdot (C - bh^{-ax}) + \frac{1}{b} \cdot L \cdot C'$$

$$= \frac{1}{b} L(CC' - bC'h^{-ax}), \text{ oder}$$

Fig.

$$h^{by} = CC' - bC'h^{-ax} \text{ und } h^{ax} = \frac{bC'}{CC' - h^{by}}.$$

Endlich ist $x = \frac{1}{a} L\left(\frac{bC'}{CC' - h^{by}}\right)$.

V. In der Differenzial-Gleichung

$$\mathrm{d}\mathrm{d}y + a\mathrm{d}x\mathrm{d}y + b\mathrm{d}x^2 = 0$$

bey unveränderlichem $\mathrm{d}x$, und für $\mathrm{d}y = z\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}\mathrm{d}y = \mathrm{d}z\mathrm{d}x$ ist das zugehörige Integrale

$$y = C' - \left(\frac{abx + h^{C-ax}}{a^2}\right).$$

VI. Wenn X was immer für eine Function von x bedeutet; so folgt bey unveränderlichem $\mathrm{d}x$ aus der Differenzial-Gleichung

$\mathrm{d}\mathrm{d}y + X\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$, für $\mathrm{d}y = z\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}\mathrm{d}y = \mathrm{d}z\mathrm{d}x$, das Integrale

$$y = C' + \int \mathrm{d}x h^{C - \int X\mathrm{d}x}.$$

VII. Aus der Differenzial-Gleichung

$$\mathrm{d}\mathrm{d}y + Y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

folgt bey unveränderlichem $\mathrm{d}x$ für jede Function Y von y, wenn man $\mathrm{d}y = z\mathrm{d}x$ setzet, das zugehörige Integrale

$$x = C' + \int \frac{\mathrm{d}y}{C - \int Y\mathrm{d}y}.$$

VIII. Aus $\mathrm{d}\mathrm{d}y + X\mathrm{d}y^2 = 0$

$$\text{folgt } y = C' + \int \frac{\mathrm{d}x}{C + \int X\mathrm{d}x}.$$

IX. Aus $\mathrm{d}\mathrm{d}y + Y\mathrm{d}y^2 = 0$

$$\text{folgt } x = C' + \int \mathrm{d}y h^{\int Y\mathrm{d}y - C}.$$

X. Aus $\mathrm{d}\mathrm{d}y + Y\mathrm{d}x^2 = 0$

$$\text{folgt } x = C' + \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(C - 2\int Y\mathrm{d}y)}}.$$

XI. Aus $\mathrm{d}\mathrm{d}y + X\mathrm{d}x^2 = 0$

$$\text{folgt } y = C' + Cx - \int \mathrm{d}x \int X\mathrm{d}x.$$

XII. Aus $\mathrm{d}\mathrm{d}y + a\mathrm{d}x\mathrm{d}y + b\mathrm{d}y^2 + c\mathrm{d}x^2 = 0$

$$\text{folgt } x = C - \int \frac{\mathrm{d}z}{c + az + bz^2}.$$

Die

Die fünf letzten Formeln erhält man für das unveränderliche dx, wenn man $dy = z\,dx$ setzet. Fig.

VII. Abschnitt.

Anwendung der Integral-Rechnung auf die Bestimmung des Flächeninhaltes krummliniger Figuren, auf die Rectification der krummen Linien, und auf die Berechnung der Oberfläche und des Cubikinhaltes der Körper.

§. 758.

Aufgabe. Eine allgemeine Formel für den Flächenraum einer jeden krummen Linie von senkrechten Ordinaten zu finden. 205.

Auflösung. Es sey die krumme Linie AMD (Fig. 205.) $AP = x$, $PM = y$, und der gesuchte Flächenraum $APMA = R$. Man gedenke pm unendlich nahe bey PM diesseits gegen den Anfangspunct A gerechnet oder auch auf der entgegen gesetzten Seite; so ist $Pp = dx$, $RM = dy$, und $PpmM = dR$. Es ist aber, weil man den unendlich kleinen Bogen Mm von einer geraden Linie nicht unterscheiden kann, $PpmM = \frac{1}{2}(PM + pm)$. $Pp = \frac{1}{2}(y + y - dy).dx = \frac{1}{2}(2y - dy)\,dx = y\,dx$, weil dy in Hinsicht auf $2y$ für o anzusehen ist. Folglich ist $dR = y\,dx$, und endlich $R = \int y\,dx + C$.

I. Nach dieser Formel läßt sich der Flächenraum bey einer jeden krummen Linie von senkrechten Ordinaten finden, wenn man aus der Gleichung für die krumme Linie statt y den Werth durch x ausgedruckt, oder auch statt dx seinen Werth durch y und durch dy ausgedruckt substituiret, und sodann das Integrale nach den gegebenen Regeln entwickelt. Es sey z. B. AMD eine Parabel, so ist $y = \sqrt{px} = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$; folglich $R = \int p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + C$. Nun ist für $R = o$, auch $x = o$, also auch $C = o$, und $R = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} xy$ (wie §. 634.)

II.

Fig. 188. II. Eben so ist bey der Logistik (Fig. 188.) wenn man $AP = x$, $PM = y$, und $ABMP = R$ setzet, $R = \int y\,dx + C$; nähmlich $R = \int ch^{\frac{x}{a}}\,dx = ach^{\frac{x}{a}} + C$. Nun ist für $R = o$, auch $x = o$, nähmlich $o = ach^{\frac{o}{a}} + C = ac + C$; also $C = -ac$, und $R = ach^{\frac{x}{a}} - ac$, oder $R = ay - ac = a(y - c)$, oder endlich $R = \frac{x(y-c)}{Ly - Lc}$ wie (§. 672.) wenn man statt a seinen Werth setzet. In der Gleichung $R = a(y - c)$ setze man $c = o$, oder unendlich klein; so ist $R = ay$ der Flächenraum längst der ganzen Asymptote vom PM herüber gerechnet.

205. III. Es sey (Fig. 205.) AMD eine gleichseitige Hyperbel, bey der jede Halbachse $= a$ ist; so ist $y = \sqrt{(x^2 - a^2)}$, wenn man den Anfangspunct der Abscissen in dem Mittelpuncte B annimmt, und $\int dx \sqrt{(x^2 - a^2)} = C + \frac{1}{2}x\sqrt{(x^2 - a^2)} - \frac{1}{2}a^2 . L[x + \sqrt{(x^2 - a^2)}]$. Es ist aber in diesem Falle für $R = o$ die Abscisse $x = a = AB$; also ist $C = \frac{1}{2}a^2 . La$, und $R = \frac{1}{2}a^2 . La + \frac{1}{2}x\sqrt{(x^2 - a^2)} - \frac{1}{2}a^2 . L[x + \sqrt{(x^2 - a^2)}]$. Wie man diesen Flächenraum für ein in Zahlen gegebenes a und x zu berechnen habe, ist für sich klar.

87. IV. Wenn man (in Fig. 87.) $CM = x$, $CA = a$ und $CMBA = R$ setzet; so ist $R = \int dx \sqrt{(a^2 - x^2)} = C + \frac{1}{2}a^2 . \text{arc sin}(x : a) + \frac{1}{2}x\sqrt{(a^2 - x^2)}$. Es ist aber für $R = o$, auch $x = o$; also $C = o$, und $R = \frac{1}{2}a . \text{arc sin}(x : a) + \frac{1}{2}x\sqrt{(a^2 - x^2)}$. Dieses erhellet augenscheinlich aus Fig. 87.; denn es ist $\frac{1}{2}x\sqrt{(a^2 - x^2)} = \frac{1}{2}CM . MB = CBM$ und $\frac{1}{2}a^2 . \text{arc sin}(x : a) = ACB$. Wenn man diesen Flächenraum ACMB durch eine unendliche Reihe ausgedruckt haben will, so muß man $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ in der Gleichung $R = \int dx \sqrt{(a^2 - x^2)}$ in eine unendliche Reihe auflösen, dieselbe mit dx multiplicieren, und sodann nach der V. Fundamental-Regel jedes Glied integriren. Man erhält nach vorgenommener Reduction für den Flächenraum ACMB eben dieselbe Reihe, welche (§. 451.) durch die Summirung der Elemente zum Vorschein kam. Es ist auch in der That die Anwendung der Integral-Rechnung

auf

auf die Bestimmung des Flächenraums und auf die Rectifi- Fig.
cation der Bogen bey den krummen Linien, auf die Berech-
nung der Oberflächen und der Cubikinhalte der Körper,
und auf verschiedene andere Gegenstände, nichts anders als
eine abgekürzte Summirung der Elemente, nichts anders als
eine sehr leichte und geschwinde Methode aus dem allgemei-
nen oder letzten Gliede in der unendlichen Reihe der Ele-
mente die Summe selbst zu finden, so wie es schon im §.
709. bemerket worden ist. Wenn man sich nähmlich vor-
stellet, daß (Fig. 205.) die Abscisse AP $= x$ in unendlich 205.
viele gleiche Theile getheilet sey, deren jeder $= dx = \frac{x}{\infty}$
ist, und daß aus allen Theilungspuncten senkrechte Ordina-
ten bis an die krumme Linie geführet werden; so wird da-
durch der Flächenraum APM in seine Elemente (in die einge-
schriebenen oder auch herumbeschriebenen Rechtecke) aufgelöset;
pmMP $= ydx$ ist das letzte oder allgemeine Glied in der
Reihe der Elemente, und $\int ydx + C$ ist die Summe aller
Elemente, welche zusammen genommen den Flächenraum APM
geben, nähmlich $\int ydx + C$ ist der Flächenraum APM selbst.
Was die abgekürzte Redensart bedeutet, eine Größe sey
in unendlich viele gleiche Theile getheilet, ein jeder
Theil davon sey sodann unendlich klein, ist bereits (§.
675.) erörtert worden. Daß die Summe der eingeschrie-
benen oder auch der herumbeschriebenen Rechtecke in einem
krummlinigen Flächenraume ACB Fig. 84. von diesem Flä-
chenraume um keine angebliche Größe verschieden ist, und folg-
lich diesen gleich gesetzet werden kann, erhellet auch schon
aus (§. 442.), wenn AB in unendlich viele gleiche Theile
getheilet wird.

Es kann ein jeder durch eigenen Fleiß bey verschiede-
nen krummen Linien, deren Gleichungen für senkrechte Or-
dinaten bekannt sind, den Flächenraum berechnen. Auch bey
den krummen Linien, deren parallele Ordinaten mit der
Abscissen-Linie einen gegebenen schiefen Winkel einschließen,
ist der Flächenraum sehr leicht zu bestimmen.

An-

Fig. Anmerkung. Weil das Integrale einer Differenzial-Größe nichts anders ist, als das summatorische Glied einer Reihe, wovon die gegebene Differenzial-Größe das allgemeine Glied ist; so läßt sich nun die im §. 454. gegebene Regel aus dem letzten Elemente die Summe aller Elemente zu finden sehr leicht erweisen. Denn wenn das letzte Element folgende Gestalt hat

$$\omega = \frac{Az^m}{\infty} + \frac{Bz^n}{\infty} + \frac{Cz^p}{\infty} + \text{..} = Az^{m-1}\frac{z}{\infty} + Bz^{n-1}\cdot\frac{z}{\infty} + Cz^{p-1}\frac{z}{\infty};$$

so ist dabey $\frac{z}{\infty} = dz$ vermöge der im §. 676. gegebenen Erklärung. Man kann also dieses letzte Element als eine Differenzial-Reihe von folgender Gestalt aufstellen:

$$dS = Az^{m-1}dz + Bz^{n-1}dz + Cz^{p-1}dz.$$

Folglich ist, wenn man jedes Glied insbesondere integriret

$$S = \frac{Az^m}{m} + \frac{Bz^n}{n} + \frac{Cz^p}{p} + \text{.. ..}$$

welches mit der gegebenen Regel übereinstimmet, in der Voraussetzung, daß für $z = 0$ auch $S = 0$ wird.

§. 759.

195. Bey den krummen Linien, deren Ordinaten aus einem Puncte gehen, läßt sich eine allgemeine Formel für den Flächenraum auf folgende Art finden. Man setze Fig. 195. den Halbmesser des Abscissen-Kreises $AB = c$, $AP = u$, $BM = y$, den Flächenraum $APMA = R$. Ferner sey an den Punct m, der unendlich nahe bey M liegt, die Ordinate Bm geführet, und aus B mit dem Halbmesser BM der Kreisbogen MR gezogen; so ist $Pp = du$, $MR = \frac{ydu}{c}$, und $PMmp = PMRp = dR$, weil MmR in Hinsicht auf PMRp für 0 anzusehen ist. Nun ist $PMRp = \frac{1}{2}(MR + Pp).PM$, weil MR und Pp für gerade Linien angesehen werden können, worauf PM senkrecht steht, nähmlich $PMRp = \frac{1}{2}(\frac{ydu}{c} + du) \times$

(y

$(y-c) = \frac{du(y^2-c^2)}{2c}$; folglich ist $dK = \frac{du(y^2-c^2)}{2c}$; Fig. 195.

und $R = \int(\frac{du(y^2-c^2)}{2c}) + C.$

Wenn man hingegen ABMA $= R$ setzet, so ist $dR =$ MBm $=$ MBR $= \frac{1}{2}$MR.BM $= \frac{\frac{1}{2}y^2\,du}{c}$, und folglich $R = \int \frac{y^2\,du}{2c} + C.$

Wenn man in eben diesem Falle die Anzahl der Grade des Bogens AP oder des Winkels ABM $= \varphi$ setzet, so ist

$$R = \int \frac{\pi y^2\,d\varphi}{360} + C.$$

§. 760.

Aufgabe. Eine allgemeine Formel für die Länge des Bogens bey einer jeden krummen Linie von senkrechten Ordinaten zu finden.

Auflösung. In Fig. 205. sey AP $= x$, PM $= y$, AM $= z$, pm unendlich nahe bey PM, und mR parallel zu AP; so ist mR $=$ Pp $= dx$, RM $= dy$, und mM $= dz$. Nun kann der unendlich kleine Bogen mM für eine gerade Linie angesehen werden; folglich ist mM $= \sqrt{}(mR^2 + RM^2)$, 205.

nähmlich $dz = \sqrt{}(dx^2 + dy^2) = dx\,(1 + dy^2 . dx^{-2})^{\frac{1}{2}}$

oder $dz = dy(1 + dx^2 . dy^{-2})^{\frac{1}{2}}$; und endlich $z =$

$\int dx(1+dy^2.dx^{-2})^{\frac{1}{2}} + C$, oder $z = \int dy(1+dx^2.dy^{-2})^{\frac{1}{2}} + C.$

1. Z. B. Aus der Differenzial-Gleichung für die Cycloide 197.

$dy = dx\,(2ax^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}}$ folgt $dy^2 = dx^2(2ax^{-1} - 1)$ (vermöge §.693.); folglich ist $z = \int dx(1+2ax^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}} = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx \sqrt{}\,2a$ $= 2\sqrt{}\,2ax$, allwo C $=$ o ist. Setzen wir nun $x = 2a$, so ist $z = 4a$, nähmlich A'M'D' $=$ 2A'B' (Fig. 197.) und ein jeder anderer Bogen A'M' $=$ 2A'Q'.

II. Aus der Gleichung für die Parabel $y = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$

folgt $dy = \frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dx$. Folglich ist $z = \int dx(1 + \frac{1}{4}px^{-1})^{\frac{1}{2}}$

Fig. 205. $= \int x^{-\frac{1}{2}} dx (x + \frac{1}{4}p)^{\frac{1}{2}} + C$. Nun läßt sich $\int x^{-\frac{1}{2}} dx (x + \frac{1}{4}p)^{\frac{1}{2}}$ vermittelst des bekannten Integrals (§. 723. VII.) bestimmen.

Es ist nach vorgenommener Reduction

$$\int x^{-\frac{1}{2}} dx (x + \tfrac{1}{4}p)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4}px)} + \tfrac{1}{8}p \cdot L[x + \tfrac{1}{8}p + \sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4}px)}];$$

folglich ist $z = \sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}px)} + \frac{1}{8}p \cdot L[x + \frac{1}{8}p + \sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}px)}] + C$.

Es ist aber für $z = o$, auch $x = o$, nähmlich $o = \frac{1}{8}p \cdot L\frac{1}{8}p + C$; also ist $C = -\frac{1}{8}p \cdot L\frac{1}{8}p$, und $z = \sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}px)} + \frac{1}{8}p \cdot L[x + \frac{1}{8}p + \sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}px)}] - \frac{1}{8}p \cdot L\frac{1}{8}p = AM$ (Fig. 205.) wenn AM eine Parabel ist. Setzen wir nun $x = \frac{1}{4}p$, so ist $z = \frac{1}{4}p\sqrt{2} + \frac{1}{8}p \cdot L(3 + 2\sqrt{2}) = \frac{1}{4}p\sqrt{2} + \frac{1}{4}p \cdot L\sqrt{(3 + 2\sqrt{2})} = \frac{1}{4}p\sqrt{2} + \frac{1}{4}p \cdot L(1 + \sqrt{2})$, nähmlich $z = \frac{1}{4}p \cdot [\sqrt{2} + \log \text{nat}\ (1 + \sqrt{2})]$, weil $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ ist.

Wenn man bey eben dieser Parabel AMD (Fig. 205.) den Bogen $AM = z$ durch die Ordinate y ausgedruckt haben will, so kann man gleich anfangs in der Formel $z = \int dy\ (1 + dx^2 \cdot dy^{-2})^{\frac{1}{2}} + C$ statt dx seinen Werth setzen. Aus der Gleichung für die Parabel $\frac{y^2}{p} = x$ folgt nähmlich $dx = \frac{2ydy}{p}$. Folglich ist

$$z = \int dy\ (1 + \frac{4y^2}{p^2})^{\frac{1}{2}} = \int \frac{2}{p} \cdot dy\ (y^2 + \tfrac{1}{4}p^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= C + \frac{y}{p} \cdot \sqrt{(y^2 + \tfrac{1}{4}p^2)} + \tfrac{1}{4}p \cdot L[y + \sqrt{(y^2 + \tfrac{1}{4}p^2)}].$$

Nun ist für $z = o$, auch $y = o$ nähmlich $o = C + \frac{1}{4}p \cdot L\frac{1}{2}p$; also ist $C = -\frac{1}{4}p \cdot L\frac{1}{2}p$, und

$$z = \frac{y}{p} \cdot \sqrt{(y^2 + \tfrac{1}{4}p^2)} + \tfrac{1}{4}p \cdot L\left[\frac{y + \sqrt{(y^2 + \frac{1}{4}p^2)}}{\frac{1}{2}p}\right] = AM.$$

Es

Es sey $y = \frac{1}{4}p$, so ist $z = \frac{1}{4}p\,[\sqrt{2} + \text{lognat}(1+\sqrt{2})]$ Fig. wie oben. Dieser gefundene Werth doppelt genommen ist 205. $\frac{1}{2}p\,.\,[\sqrt{2} + \text{lognat}\,(1+\sqrt{2})]$ die wirkliche Länge eines parabolischen Bogens, welchen die ganze Ordinate des Brennpunctes beyderseits abschneidet Die gemeine Parabel läßt sich demnach mittelst der natürlichen Logarithmen rectificiren.

III. Es sey (Fig. 87.) $CM = x$, $CA = a$; und 87. $AB = z$; so ist $MB = y = \sqrt{\ }(a^2 - x^2)$,

$$dy = -x\,dx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}},\quad dy^2 = x^2\,dx^2\,(a^2 - x^2)^{-1}.$$

Folglich ist $z = \int dx\,[1 + x^2\,(a^2 - x^2)^{-1})]^{\frac{1}{2}}$

$= \int a\,dx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = a$ arc.sin $(x : a)$ für den ganzen Sinus $= 1$, oder $z =$ arc. sin x für den ganzen Sinus $= a$; welches aus Fig. 87. deutlich erhellet, weil $x = CM = EB =$ sin. arc AB ist. Wenn man das Integrale $\int a\,dx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ (nach §. 720 I.) durch eine unendliche Reihe entwickelt, so findet man für z eben die Reihe, die wir (§. 451) durch die Summirung der Kreis-Elemente erhalten haben.

IV. Bey der Ellipse ist für die Abscissen auf der großen Achse vom Mittelpuncte gerechnet $y = \frac{b}{a}\sqrt{\ }(a^2 - x^2)$.

Daraus folgt $dy = -\frac{b\,x\,dx}{a\sqrt{\ }(a^2 - x^2)}$, und $dy^2 = \frac{b^2\,x^2\,dx^2}{a^2\,(a^2 - x^2)}$,

also $z = \int dx\,[1 + \frac{b^2\,x^2}{a^2\,(a^2 - x^2)}]^{\frac{1}{2}} = \int dx\,\sqrt{\ }[\frac{a^4 - (a^2 - b^2)\,x^2}{a^4 - a^2\,x^2}] + C.$

Dieses Integrale läßt sich durch keinen einzigen bisher bekannten Kunstgriff weder algebraisch, noch mittelst der Kreisbogen, noch auch mittelst der Logarithmen entwickeln. Wäre es nun unumgänglich nothwendig die Länge eines elliptischen Bogens durch Rechnung zu finden, so müßte man

Fig. die Zuflucht zu einer unendlichen Reihe nehmen. Man
173. könnte z. B. zu diesem Ende

178. $$\int dx \sqrt{\left[\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^4-a^2x^2}\right]} = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \ldots$$

setzen, und darauf die Coefficienten so wie im §. 690 bestimmen.

Anmerkung. Nach Pasquich Unterricht in der mathemat. Analysis 2ten Bandes §. 114. und 115. Leipzig 1791, verbunden mit dessen Aufsatze in B. v. Zach Monatl. Corresp May 1800, ist bey unserem Erdsphäroid der Halbmesser des Aequators $a = 3271226$ Paris. Toisen, $\log a = 6{,}5147105$, die halbe Erdachse $b = 3261432$ Toisen, $\log. b = 6{,}5134084$, für die Abplattung am Pole $\frac{1}{334} = \frac{1}{m}$ des Halbmessers des Erd-Aequators; es wird nähmlich die Abplattung $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{m}$ gesetzet.

Hieraus folget die Abkürzung $\frac{2m-1}{m^2} = \frac{667}{(334)^2} = e^2$ und $\log. e^2 = 0{,}7766328 - 3$. Wenn ferner die wahre Polhöhe oder scheinbare Breite $= B =$ AHG $=$ ACK (Fig. 178.) eines Ortes G, dessen wahre Breite aber $= \beta =$ ACG (Fig. 178.) gesetzet wird; so hat man nachstehende merkwürdige und brauchbare Formeln zur Berechnung der Abscisse $= x$ in Pariser-Toisen vom Mittelpuncte, der Ordinate $= y$, und des Krümmungs-Halbmessers $= k$, der wechselsweisen Verwandlung der wahren und scheinbaren Breite, der Länge eines Meridian-Grades oder $\frac{1}{90}$ des Quadranten $= G$, dessen Mittel G in der scheinbaren Breite $= B$ liegt, des ganzen Meridian-Quadranten $= Q$, und endlich der Oberfläche $= F$ einer Erdzone vom Aequator bis zur scheinbaren Breite $= B$.

I. $\text{Log}x = \log a + \frac{1}{2}\log(1 - \sin^2 B) - \frac{1}{2}\log(1 - e^2 \sin^2 B)$. Fig.

II. $\text{Log}y = \log a + \log \sin B - \frac{1}{2}\log(1 - e^2 \sin^2 B) + 0{,}9973955 - 1$.

III. $\text{Log}\, k = \log a - \frac{3}{2}\log(1 - e^2 \sin^2 B) + 0{,}9973955 - 1$.

IV. $\text{Log tang}\beta = \log \text{tang}\, B + 0{,}9973955 - 1$.

V. $\text{Log tang}B = \log \text{tang}\, \beta + 0{,}0026045$.

VI. $B - \beta =$ der Ablenkung der Normale vom Halbmesser.

VII. $G = 57008{,}22 - P \cdot \cos 2B$ für $\log P = 2{,}4080311$.

VIII. $Q = \left(\frac{m-1}{m}\right)^2 \frac{a\pi}{2} \cdot \left[1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 + 5\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 e^4 + 7 \ldots\right]$

IX. $F = \alpha \cdot a^2 \sin B + \beta \cdot a^2 \sin^3 B + \gamma \cdot a^2 \sin^5 B$;

für $\log \alpha = 0{,}7955754$,

$\log \beta = 0{,}3961169 - 2$,

$\log \gamma = 0{,}1269923 - 4$.

Aus VIII folgt auch $a = \dfrac{Q}{\left(\frac{m-1}{m}\right)^2 \frac{\pi}{2} \cdot \left[1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 + 5 \cdot \left(\frac{1.3}{2.5}\right)^2 e^4 + \ldots\right]}$

wodurch man aus der gegebenen Abplattung m unseres Erdsphäroids, und aus der Länge des elliptischen Meridian-Quadranten Q, den Halbmesser a unseres Erd-Aequators, und sodann weiters nach der Formel $b = a \cdot \left(\frac{m-1}{m}\right)$ die halbe Erdachse b berechnen kann. Aus $Q = 10000000$ Metern und $m = 334$ folget $a = 6375741$, und $b = 6356652$ Meter; oder $a = 3271226$ und $b = 3261432$ Toiſ. für $Q = 5130740$ Toiſ. und $m = 334$. *)

§. 761.

*) Die vom Lalande in B. v. Zach Monatl. Correſp. Jul. 1800. S. 82. angegebenen, und vom erſteren unmittelbar auch mir ſchriftlich mitgetheilten Größen der halben Erdachſen nach den letzten Gradmeſſungen $a = 3271408$, $b = 3261672$ Toiſen ſtehen daher mit dem geſetzmäßig beſtimmten Meter, und mit dem dabey angenommenen Achſenverhältniſſe 333 zu 334 im Widerſpruche. Man vergleiche hiermit meine Mathemat. Betrachtungen ꝛc Erfurt bey Beyer 1798.

§. 761.

Fig. 195.

Für die Ordinaten aus einem Puncte ist die Bogen-

Länge $z = \int \frac{dy}{c} (c^2 + y^2 du^2 . dy^{-2})^{\frac{1}{2}} + C$, oder auch

$z = \int \frac{du}{c} \times (y^2 + c^2 dy^2 . du^{-2})^{\frac{1}{2}} + C$ (Fig. 195.), wenn

man AP $= u$, BM $= y$, AB $= c$, und AM $= z$ setzet, weil auch in diesem Falle $Mm = \vee (MR^2 + Rm^2)$ ist.

Z. B. Aus der Gleichung für die logistische Spiral-Linie

$y = c (\frac{b}{c})^{\frac{u}{2c\pi}}$ folgt $u = \frac{2c\pi . (Ly - Lc)}{Lb - Lc}$, $du = \frac{2c\pi dy}{y (Lb - Lc)}$;

also ist

$$z = \int \frac{dy}{c} [c^2 + \frac{4c^2\pi^2}{(Lb - Lc)^2}]^{\frac{1}{2}} = \frac{y}{c} [c^2 + \frac{4c^2\pi^2}{(Lb - Lc)^2}]^{\frac{1}{2}} + C.$$

Nun ist für $z = 0$, die Ordinate $y = c$, nähmlich

$$0 = [c^2 + \frac{4c^2\pi^2}{(Lb - Lc)^2}]^{\frac{1}{2}} + C;$$ folglich ist

$z = (\frac{y}{c} - 1) \times [c^2 + \frac{4c^2\pi^2}{(Lb - Lc)^2}]^{\frac{1}{2}}$. Setzt man nun

$y = 0$ so ist $[c^2 + \frac{4c^2\pi^2}{(Lb - Lc)^2}]^{\frac{1}{2}}$ die wirkliche Länge der logistischen Spiral-Linie von dem Anfangspuncte der Abscissen bis in den Mittelpunct des Abscissen-Kreises gerechnet.

Wenn man statt y seinen Werth setzet, so ist

$z = [(\frac{b}{c})^{\frac{u}{2c\pi}} - 1] . [c^2 + \frac{4c^2\pi^2}{(Lb - Lx)^2}]^{\frac{1}{2}}$ die wirkliche Länge was immer für eines Bogens einer logistischen Spiral-Linie von dem Anfangspuncte der Abscissen gerechnet.

§. 762.

§. 762.

Fig.

Aufgabe. Eine allgemeine Formel für die krumme Oberfläche jener Körper zu finden, welche durch die Umdrehung der krummen Linien von senkrechten Ordinaten erzeuget werden.

Auflösung. Es sey (Fig. 205.) CAD ein solcher Körper, 205.
der durch die Umdrehung der krummen Linie AMD um die Abscissen-Linie AE erzeuget wird; AP sey $= x$, PM $= y$, und die krumme Oberfläche, welche bey der Umdrehung durch den Bogen AM erzeuget wird, sey $= Q$; so ist das Differenziale (oder das letzte Element) dieser Oberfläche nichts anders, als die Oberfläche des abgekürzten Kegels, welcher bey der Umdrehung durch das Trapez MPpm erzeuget wird, weil man mM für eine gerade Linie ansehen kann. Vermöge §. 494. aber ist die Oberfläche dieses abgekürzten Kegels.

$$= (PM + pm)\pi \,.\, Mm = (y + y - dy)\pi (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\pi y dy (1 + dx^2 dy^{-2})^{\frac{1}{2}}. \text{ Folglich ist}$$

$$dQ = 2\pi y dy (1 + dx^2 . dy^{-2})^{\frac{1}{2}}, \text{ und}$$

$$Q = \int 2\pi y dy \, (1 + dx^2 . dy^{-2})^{\frac{1}{2}} + C.$$

I. Es sey z. B. AM eine Parabel, so ist $dx = \frac{2ydy}{p}$.

Folglich ist $Q = \int 2\pi y dy (1 + \frac{4y^2}{p^2})^{\frac{1}{2}} = \int \frac{2\pi y dy}{p} (p^2 + 4y^2)^{\frac{1}{2}}$

$$= \frac{\pi}{6p} (p^2 + 4y^2)^{\frac{3}{2}} + C. \text{ Nun ist für } Q = 0, \text{ auch } y = 0;$$

also ist $C = -\frac{1}{6} p^2 \pi$, und $Q = \frac{\pi}{6p} (p^2 + 4y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6} p^2 \pi$.

II. Aus der Gleichung $Q = \int 2\pi y dy \, (1 + dx^2 . dy^{-2})^{\frac{1}{2}}$

folgt auch $Q = \int 2\pi y dx (1 + dy^2 . dx^{-2})^{\frac{1}{2}} + C$. Nach dieser Formel läßt sich die Oberfläche eines Ellipsoid sehr

leicht

Fig. leicht berechnen. Es ist nähmlich bey der Ellipse für die Abscissen vom Mittelpuncte gerechnet

$$y = \frac{b}{a}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}, \quad dy = -\frac{bx\,dx}{a(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}, \text{ und}$$

$$dy^2 = \frac{b^2 x^2 dx^2}{a^2(a^2 - x^2)}; \text{ folglich ist } Q = \int 2\pi \cdot \frac{b}{a}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$dx\left[1 + \frac{b^2 x^2}{a^2(a^2 - x^2)}\right]^{\frac{1}{2}} = \int \frac{2b\pi dx}{a^2}(a^4 - (a^2 - b^2)x^2)^{\frac{1}{2}},$$

oder $Q = \int \frac{2b\pi dx}{a^2}(a^4 \mp c^2 x^2)^{\frac{1}{2}}$, nähmlich

$$Q = \int \frac{2bc\pi dx}{a^2} \times \left(\frac{a^4}{c^2} \mp x^2\right)^{\frac{1}{2}} + C, \text{ wenn man } a^2 - b^2 = c^2$$

für $a > b$, oder $b^2 - a^2 = c^2$ für $b > a$ setzet, allwo c die Excen-
178. tricität bedeutet. Das obere Zeichen — ist bey einem länglich-
180. ten Ellipsoid zu gebrauchen (Fig. 178.), welches durch die Umdrehung einer Ellipse um die große Achse $AB = 2a$ erzeuget wird, wovon die kleine Achse $DE = 2b$ ist. Das untere Zeichen + aber gehöret zu einem abgeplatteten Ellipsoid (Fig. 180.), welches durch die Umdrehung einer Ellipse um die kleine Achse $ED = 2a$ entsteht, wovon die große Achse $AB = 2b$ ist. Setzen wir in dem ersten Falle $CP = x$ (Fig. 178.), so ist das Stück der Oberfläche des länglichten Ellipsoid von dem größten Kreise DE bis zum Parallel-Kreise MM' gerechnet

$$Q = \int \frac{2bc\pi dx}{a^2}\left(\frac{a^4}{c^2} - x^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a^2 b\pi}{c}.\text{arc.sin}\frac{cx}{a^2} + \frac{bcx\pi}{a^2}\left(\frac{a^4}{c^2} - x^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

allwo $C = 0$ seyn muß. Setzen wir nun $x = CB = a$, so ist die Oberfläche des halben länglichten Ellipsoid

$$= \frac{a^2 b\pi}{c}.\text{arc.sin}\frac{c}{a} + b\pi(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{a^2 b\pi}{c}.\text{arc.sin}\frac{c}{a} + b^2\pi,$$

wenn man wieder statt c den gehörigen Werth setzet. Folglich

lich ist die Oberfläche des ganzen länglichten Ellipsoid Fig.

$$= \frac{2a^2b\pi}{c} \times \text{arc.sin}\frac{c}{a} + 2b^2\pi.$$

Setzen wir ferner $a=b$, so verwandelt sich das Ellipsoid in eine Kugel. In dieser Voraussetzung ist $c = 0$, und $\text{arc.sin}\frac{c}{a} = \frac{c}{a}$; folglich ist sodann die Oberfläche

$$= \frac{2b^3\pi}{c} \cdot \frac{c}{a} + 2b^2\pi = 4b^2\pi =$$ der Kugelfläche, wovon der Halbmesser $= b$ ist.

Setzen wir aber in dem zweyten Falle (Fig. 180.) $CP = x$, 180.
die Umdrehungsachse $ED = 2a$, und die große Achse $AB = 2b$, so ist bey dem abgeplatteten Ellipsoid das Stück der Oberfläche von dem größten Kreise AB bis zum Parallel-Kreise MN gerechnet.

$$Q = \int \frac{2bc\pi dx}{a^2}\left(\frac{a^4}{c^2} + x^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{bc\pi x}{a^2}\left(\frac{a^4}{c^2} + x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{a^2b\pi}{c} \cdot L\left[x + V\left(\frac{a^4}{c^2} + x^2\right)\right] + C.$$ Nun ist für $Q = 0$,

auch $x = 0$, nähmlich $0 = \frac{a^2b\pi}{c} \cdot L\frac{a^2}{c} + C$; also ist

$$C = -\frac{a^2b\pi}{c} \cdot L\frac{a^2}{c}, \text{ und}$$

$$Q = \frac{bc\pi x}{a^2}\left(\frac{a^4}{c^2} + x^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{a^2b\pi}{c} \cdot L\left[\frac{c}{a^2}\left(x + V\left(\frac{a^4}{c^2} + x^2\right)\right)\right].$$

Setzen wir $x = CD = a$ und substituiren statt c^2 seinen Werth $b^2 - a^2$, so ist die halbe Oberfläche

$$= \frac{a^2b\pi}{c} \cdot L\left[\frac{c}{a} + V\left(1 + \frac{c^2}{a^2}\right)\right] + b^2\pi;$$ und folglich ist die ganze Oberfläche eines abgeplatteten Ellipsoid, dessen Umdrehungsachse $= 2a$, der Durchmesser des größten Kreises $= 2b$, und die Excentricität der Erzeugungs-Ellipse $= c$ ist,

$$Q = \frac{2a^2b\pi}{c} \cdot L\left[\frac{c}{a} + V\left(1 + \frac{c^2}{a^2}\right)\right] + 2b^2\pi.$$

Fig. Setzen wir ferner wie oben $b = a$, so verwandelt sich das abgeplattete Ellipsoid in eine Kugel. In dieser Voraussetzung ist $c = 0$, und $L[\frac{c}{a} + V(1 + \frac{c^2}{a^2})] = L(\frac{c}{a} + 1)$

$= L(1 + \frac{c}{a}) = \frac{c}{a}$. Folglich ist sodann die ganze Oberfläche $= \frac{2a^2 b\pi}{c} \cdot \frac{c}{a} + 2b^2\pi = 4b^2\pi =$ der Kugelfläche, wovon der Halbmesser $= b$ ist.

Auf eben dieselbe Art lassen sich die Oberflächen von mehreren anderen runden Körpern berechnen. Auch die Oberflächen von verschiedenen Afterpyramiden (Fig. 120.) kann man mittelst der Integral-Rechnung ohne Schwierigkeit finden.

§. 763.

Aufgabe. Eine allgemeine Formel für den Cubik-Inhalt derjenigen Körper zu finden, welche durch die Umdrehung der krummen Linien von senkrechten Ordinaten entstehen.

205. Auflösung. Es sey bey der krummen Linie AMD (Fig. 205.), AE die Umdrehungs-Achse, $AP = x$, $PM = y$, und der Cubikinhalt des Afterkegels $MAM' = K$; so ist der abgekürzte Kegel zwischen den Ebenen $M'M$ und $m'm$ das Differenziale von K. Diesen abgekürzten Kegel kann man für einen Cylinder ansehen, weil die Halbmesser der zwey Grundflächen nur um eine unendlich kleine Größe nähmlich um $RM = dy$ von einander verschieden sind. Es ist demnach dK ein Cylinder, dessen Grundfläche $=$ dem Kreise auf $M'M$, und dessen Höhe $= Pp$ ist; nähmlich es ist $dK = PM^2\pi . Pp = \pi y^2 dx$, und folglich $K = \int \pi y^2 dx + C$.

Es sey z. B. AMD eine Parabel, so ist $y^2 = px$; also $K = \int \pi p x dx = \frac{1}{2}\pi p x^2$, allwo $C = 0$ ist, und auch $K = \frac{1}{2} y^2 \pi x =$ dem halben Producte aus der Grundfläche in die Höhe (wie §. 634.).

Auf

Auf diese Art können nun verschiedene runde Körper Fig.
berechnet werden; als z. B. länglichte und abgeplattete El-
lipsoiden, hyperbolische Afterkegel, welche nähmlich durch
die Umdrehung einer Hyperbel entweder um die erste oder
um die zweyte Achse, oder auch um die eine Asymptote ent-
stehen. Bey dem Afterkegel, welcher durch die Umdrehung
einer gemeinen Hyperbel um die eine Asymptote entsteht,
wird man den besondern Umstand wahrnehmen, daß der
Cubikinhalt eines solchen Körpers von AB oder von PM
(Fig. 186.) längst der ganzen Asymptote ohne Ende hin-
ausgerechnet angeblich, endlich sey, obschon der Durchschnitt
eines solchen Körpers durch die Umdrehungs-Achse gelegt,
größer als jede angebliche Größe, unendlich groß ist,
welches sehr leicht zu begreifen ist, wenn man sich nur
daran erinnert, daß bey einem solchen Afterkegel in einer
unendlichen Entfernung die Körper-Elemente unendlich klei-
ne Größen von der zweyten Ordnung, die Flächen-Ele-
mente des Durchschnittes längst der Umdrehungs-Achse aber in
eben dieser Entfernung unendlich kleine Größen von der ersten
Ordnung sind.

§. 764.

Wenn die krummlinige Fläche APM (Fig. 205.) sich 205.
um die Gerade BG herumdrehet, welche mit APM in ei-
nerley Ebene liegt, und mit der senkrechten Ordinate PM
parallel läuft; so entsteht ein ringförmiger Körper, dessen
Cubikinhalt sich auf folgende Art berechnen läßt. Bey die-
ser Umdrehung beschreibet jedes Flächen-Element pmMP
eine cylindrische Röhre, wovon der äußere Durchmesser
$=$ BP und der innere $=$ Bp ist, die Höhe dieser cylindri-
schen Röhre aber ist $=$ pm $=$ PM $= y$. Diese cylin-
drische Röhre ist das Differenziale des ringförmigen Kör-
pers. Setzen wir nun diesen Körper $= K$, den Abstand
$AB = c$, $AP = x$, und $PM = y$; so ist die erwähnte

cylin-

Fig. 205. cylindrische Röhre $dK = BP^2 . \pi \times PM - Bp^2 . \pi \times PM$
$= \pi . PM (BP^2 - Bp^2) = \pi . PM [BP^2 - (BP - Pp)^2]$
$= \pi y (BP^2 - BP^2 + 2BP . Pp - Pp^2) = 2\pi y . BP . Pp$
$= 2\pi y (c + x) dx$; und folglich $K = \int 2\pi y (c + x) dx + C$.

Diese allgemeine Formel wird ein jeder auf besondere Beyspiele anwenden können, z. B. auf die Berechnung eines wirklichen Kreisringes. Auch die Oberflächen lassen sich bey dergleichen Ringförmigen Körpern ohne Schwierigkeit finden. Es ist überflüßig zu erinnern, daß man $c = 0$ setzen müsse, wenn AQ die Umdrehungs-Achse seyn sollte.

§. 765.

Auch die Cubikinhalte der pyramidalförmigen Körper lassen sich mittelst der Integral-Rechnung berechnen. Man stelle sich vor, daß die Höhe eines pyramidalförmigen Körpers in unendlich viele gleiche Theile getheilet sey; man gedenke durch alle diese Theilungs-Puncte zur Grundfläche parallele Ebenen; der Inhalt der Durchschnitts-Fläche sey $= t$, welche in der Entfernung x von dem Anfange des Körpers zur Grundfläche parallel gelegt ist; so ist tdx das Differenziale oder das allgemeine Glied in der Reihe der Elemente eines solchen Körpers. Folglich ist der Cubikinhalt des Stückes vom Anfange bis zur parallelen Durchschnittsfläche t gerechnet $K = \int tdx$. Läßt sich nun aus der Eigenschaft des Körpers, t in x ausdrucken, so läßt sich tdx integriren, und folglich der Cubikinhalt des vorgegebenen pyramidalförmigen Körpers bestimmen.

120. Es sey z. B. DQA eine After-Pyramide (Fig. 120.) deren Höhe $QP = a$ ist; ihre Grundfläche sey $= b$, die ein Rechteck, oder ein Quadrat, oder sonst ein regelmäßiges Vieleck seyn mag. Diese Afterpyramide sey also beschaffen, daß alle ihre Seiten-Linien aus Viertheil-Kreisen bestehen, welche aus dem Mittelpuncte P mit dem

Halb-

Halbmesser AP = PQ beschrieben sind. Setzen wir nun QR = x, und die Durchschnittsfläche EF = t; so ist vermöge der Eigenschaft des Kreises die Gerade RF = $\sqrt{(2ax - x^2)}$. Ferner verhält sich die Grundfläche DA zur Fläche EF wie PA^2 zu RF^2; nähmlich $b : t = a^2 : 2ax - x^2$; also ist Fig. 120.

$$t = \frac{2abx - bx^2}{a^2}, \text{ und } K = \int\left(\frac{2bx\,dx}{a} - \frac{bx^2\,dx}{a^2}\right)$$

$$= \frac{bx^2}{a} - \frac{bx^3}{3a^2}, \text{ allwo } C = 0 \text{ ist.}$$

Man setze $x = a$, so ist der Cubikinhalt der ganzen After-Pyramide = $\frac{2}{3}\,ab$ = zwey Drittheilen des Productes aus der Grundfläche in die Höhe. Wenn die Seitenlinien einer solchen After-Pyramide Parabeln, Ellipsen oder andere bekannte krumme Linien wären, so könnte der Cubikinhalt auf eben dieselbe Art berechnet werden.

§. 766.

Die Anwendung der Integral-Rechnung auf die verkehrte Methode der Tangenten wollen wir allhier nur ganz kurz berühren. Diese Methode besteht darinn, daß man aus einer bekannten Eigenschaft einer krummen Linie die Gleichung für dieselbe finde. Dieses geht jederzeit an, so oft sich die bekannte Eigenschaft durch die Differenzial-Rechnung ausdrucken läßt. Es sey z. B. die Gleichung für die krumme Linie zu suchen, bey der die Subtangente $\frac{3}{2}$ der Abscisse gleich ist; so ist nach dieser Bedingung $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{3}{2}\,x$.

Daraus folgt durch die Absonderung $\frac{3\,dy}{y} = \frac{2\,dx}{x}$, und durch die Integration $3\,Ly = 2.Lx + Lconst$, nähmlich $Ly^3 = Lcx^2$, und endlich $y^3 = cx^2$. Die gesuchte krumme Linie ist demnach eine cubische Parabel.

Ingleichen eine krumme Linie von der Beschaffenheit

zu

Fig. zu finden, daß der Krümmungs-Halbmesser der *n*fachen Normale gleich sey. Es ist (vermöge §. 698.) der Krümmungs-Halbmesser $= \frac{(1 + dy^2 \cdot dx^{-2})^{\frac{3}{2}}}{-ddy \cdot dx^{-2}}$, und (vermöge §. 694. II.) die Normale $= y(1 + dy^2 \cdot dx^{-2})^{\frac{n}{2}}$. Es ist also vermöge der Bedingung der Aufgabe

$$\frac{(1 + dy^2 \cdot dx^{-2})^{\frac{3}{2}}}{-ddy \cdot dx^{-2}} = ny\,(1 + dy^2 dx^{-2})^{\frac{n}{2}},$$ woraus

$nyddy + dx^2 + dy^2 = o$ folgt. Nun setze man $\frac{dx}{dy} = z$, so ist $dx = zdy$, $dy = \frac{dx}{z}$, und $ddy = -\frac{dxdz}{z^2} = -\frac{dzdy}{z}$

Folglich ist die verwandelte Gleichung

$$-\frac{nydzdy}{z} + z^2dy^2 + dy^2 = o,$$ oder wenn man die veränderlichen Größen absondert, $\frac{dy}{ny} = \frac{dz}{z(z^2+1)}$.

Diese Gleichung (nach §. 720. I.) integriret gibt

$$\frac{1}{n}.Ly = L\frac{z}{\sqrt{(z^2+1)}} + Log.const,$$ oder

$$Ly^{\frac{1}{n}} = L[\frac{cz}{\sqrt{(z^2+1)}}],$$ nähmlich $y^{\frac{1}{n}} = \frac{cz}{\sqrt{(z^2+1)}}$.

Daraus fließt $z = y^{\frac{1}{n}}(c^2 - y^{\frac{2}{n}})^{-\frac{1}{2}}$, das ist

$$\frac{dx}{dy} = y^{\frac{1}{n}}(c^2 - y^{\frac{2}{n}})^{-\frac{1}{2}},$$ und $dx = y^{\frac{1}{n}}\,dy\,(c^2 - y^{\frac{2}{n}})^{-\frac{1}{2}}$.

Diese Gleichung wieder integriret giebt endlich

$x = \int y^{\frac{1}{n}}\,dy\,(c^2 - y^{\frac{2}{n}})^{-\frac{1}{2}} + c'$. Man setze *n* einer ungeraden positiven Zahl gleich, z. B. $n = 1$, und dabey $c' = o$; so ist $x = \int ydy\,(c^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{(c^2 - y^2)}$, und

$y =$

$y = \sqrt{(c^2 - x^2)}$ die Gleichung eines Kreises, wovon der Halbmesser $= c$ ist.

Die Anwendung der Integral-Rechnung auf verschiedene Gegenstände aus den mechanischen Wissenschaften ist in dem dritten und vierten Bande dieses Lehrbuches enthalten. Einige besondere Fälle aus der Geometrie, z. B. die Oberfläche eines schiefen Kegels, den Cubikinhalt der Angußscheiben sowohl bey den Kanonen als auch bey den Bomben-Mörsern, die Oberfläche und den Cubikinhalt verschiedener Cylinder-Stücke u. s. w. wird ein geübter Leser durch eigenen Fleiß mittelst der Integral-Rechnung zu bestimmen im Stande seyn.

Schluß-Anmerkung. Die Differenzial- und Integral-Rechnung mit der Anwendung derselben ist in diesem Lehrbuche durchaus auf die Lehre und Rechnungs-Arbeiten mit unendlich kleinen Größen gegründet. Man kann zwar diese Lehre von dem unendlich Kleinen und unendlich Großen in der Mathematik gänzlich vermeiden. Allein die dazu nöthigen Sätze sind mehr verwickelt, und erfordern einen größeren Grad des Fassungs-Vermögens, als man es bey Anfängern vom gewöhnlichen Schlage voraus setzen darf. Ueber dieses ist die Lehre von dem unendlich kleinen (die Infinitesimal-Rechnung) vorzüglich geeignet, mit einigen wenigen Vorkenntnissen die verwickeltsten Wahrheiten selbst zu erfinden. Wer inzwischen die höhere Analysis mit Vermeidung des unendlich Kleinen gründlich studieren, und vermittelst derselben die durch die Infinitesimal-Rechnung zu erst gefundenen Resultate mit der größten mathematischen Schärfe erweisen will, der findet die zweckmäßigste Anleitung hierzu in Johann Pasquich Unterricht in der mathemat. Analysis in zwey Bänden sammt einer Beylage in 8vo, und in dessen lateinischem Werke Opuscula statico - mechanica principiis analyseos finitorum superstructa in zwey Bänden in 4to, Leipzig bey Weidmann 1790 bis 1799.

End-

Endlich muß ich noch bemerken, daß diejenigen, welche weder mit der Infinitesimal-Rechnung noch mit andern bisher bekannten Methoden des Vortrages der höhern Analysis zufrieden sind, und zu dieser Absicht etwas neues und eigenes erfunden zu haben sich schmeicheln, ihre Erfindung durch die Anwendung derselben auf die Bestimmung der Länge eines Bogens bey einer krummen Linie wie §. 760, und auf die Berechnung der Oberflächen der runden Körper wie §. 762. prüfen, und hieraus ihre Brauchbarkeit beurtheilen, können.

Anhang.

Anhang

enthaltend:

I. Ein Verzeichniß der merkwürdigsten Formeln aus der analytischen Trigonometrie.
II. Die analytische Darstellung der Sinus und Cosinus für jeden dritten Grad von 0 bis 90 °.
III. Die Auflösung der geradlinigen und der sphärischen Dreyecke mit einer tabellarischen Uebersicht.

I.

Verzeichniß der merkwürdigsten Formeln aus der analytischen Trigonometrie für den Halbmesser=1.

1) $\sin p = \frac{1}{2}\text{chord } 2p$; $\text{chord } p = 2\sin\frac{1}{2}p$.
$\sin 0° = 0$; $\sin 90° = 1$.

2) $\cos p = \sin(90° - p)$; $\cos 0° = 1$; $\cos 90° = 0$.

3) $\sin^2 p + \cos^2 p = 1$; $\sin p = \cos(90° - p)$;
$\sin p = \sqrt{(1 - \cos^2 p)}$; $\cos p = \sqrt{(1 - \sin^2 p)}$.

4) $\text{tang } p = \frac{\sin p}{\cos p}$; $\cot p = \text{tang}(90° - p) = \frac{\cos p}{\sin p}$.
$\text{tang } 0° = 0$; $\text{tang } 90° = \infty$; $\cot 0° = \infty$; $\cot 90° = 0$

5) $\text{tang } p . \cot p = 1$; $\text{tang } p = \frac{1}{\cot p}$; $\cot p = \frac{1}{\text{tang } p}$.

6) $\sec p = \frac{1}{\cos p}$; $\text{cosec } p = \sec(90° - p) = \frac{1}{\sin p}$.

7) $\sec^2 p = 1 + \text{tang}^2 p$; $\text{cosec}^2 p = 1 + \cot^2 p$.

8) $\text{sin vers } p = 1 - \cos p = 2\sin^2\frac{1}{2}p$.

9) $\text{cos vers } p = 1 - \sin p = 2\sin^2(45 - \frac{1}{2}p)$.

10) $\text{arc sin } x = \text{arc tang } \frac{x}{\sqrt{(1 - x^2)}}$.

11) $\text{arc cos } x = \text{arc tang} \frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$.

12) $\text{arc cot } x = \text{arc tang } \frac{1}{x}$.

13) $\text{arc sec } x = \text{arc tang } \sqrt{(x^2-1)}$.

14) $\text{arc cosec } x = \text{arc tang } \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$.

15) $\text{arc sin vers } x = 2\,\text{arc sin } \sqrt{\tfrac{1}{2}x}$.

16) $\text{arc cos vers } x = \tfrac{1}{2}\pi \mp 2\,\text{arc sin } \sqrt{\tfrac{1}{2}x}$

17) $\sin p = \sqrt{\left(\frac{1-\cos 2p}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{(1+\cot^2 p)}}$

$= \frac{\text{tang} p}{\sqrt{(1+\text{tang}^2 p)}} = \frac{2\text{tang}\frac{1}{2}p}{1+\text{tang}^2\frac{1}{2}p} = \frac{2\cot\frac{1}{2}p}{1+\cot^2\frac{1}{2}p}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{(1+\sin 2p)} - \frac{1}{2}\sqrt{(1-\sin 2p)}$.

18) $\cos p = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}p = 2\cos^2\frac{1}{2}p - 1 = \frac{1}{\sqrt{(1+\text{tang}^2 p)}}$

$= \frac{\cot p}{\sqrt{(1+\cot^2 p)}} = \frac{1-\text{tang}^2\frac{1}{2}p}{1+\text{tang}^2\frac{1}{2}p} = \frac{\cot^2\frac{1}{2}p-1}{\cot^2\frac{1}{2}p+1}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{(1+\sin 2p)} + \frac{1}{2}\sqrt{(1-\sin 2p)}$.

19) $\text{tang} p = \frac{\sin p}{\sqrt{(1-\sin^2 p)}} = \frac{\sqrt{(1-\cos^2 p)}}{\cos p} = \sqrt{\left(\frac{1-\cos 2p}{1+\cos 2p}\right)}$

$= \frac{2\text{tang}\frac{1}{2}p}{1-\text{tang}^2\frac{1}{2}p} = \frac{2\cot\frac{1}{2}p}{\cot^2\frac{1}{2}p-1}$.

20) $\cot p = \frac{\cos p}{\sqrt{(1-\cos^2 p)}} = \frac{\sqrt{(1-\sin^2 p)}}{\sin p} = \sqrt{\left(\frac{1+\cos 2p}{1-\cos 2p}\right)}$

$= \frac{1-\text{tang}^2\frac{1}{2}p}{2\text{tang}\frac{1}{2}p} = \frac{\cot^2\frac{1}{2}p-1}{2\cot\frac{1}{2}p}$.

21) $\sin\frac{1}{2}p = \sqrt{\left(\frac{1-\cos p}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{(1+\sin p)} - \frac{1}{2}\sqrt{(1-\sin p)}$.

22) $\cos\frac{1}{2}p = \sqrt{\left(\frac{1+\cos p}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{(1+\sin p)} + \frac{1}{2}\sqrt{(1-\sin p)}$.

22) $\text{tang}\frac{1}{2}p = \frac{\sin p}{1+\cos p} = \frac{1-\cos p}{\sin p} = \sqrt{\left(\frac{1-\cos p}{1+\cos p}\right)}$.

24)

24) $\cot\frac{1}{2}p = \frac{1+\cos p}{\sin p} = \frac{\sin p}{1-\cos p} = V\left(\frac{1+\cos p}{1-\cos p}\right)$.

25) $1+\sin p = 2\sin^2(45^\circ+\frac{1}{2}p)$.

26) $1-\sin p = 2\sin^2(45^\circ-\frac{1}{2}p)$.

27) $V(1+\sin p) = \sin\frac{1}{2}p+\cos\frac{1}{2}p$.

28) $V(1-\sin p) = \mp\sin\frac{1}{2}p\mp\cos\frac{1}{2}p$.

29) $\frac{1+\sin p}{1-\sin p} = \frac{\tang(45^\circ+\frac{1}{2}p)}{\tang(45^\circ-\frac{1}{2}p)} = \tang^2(45^\circ+\frac{1}{2}p)$
$= \cot^2(45^\circ-\frac{1}{2}p)$.

30) $\frac{1+\sin p}{\cos p} = \frac{\cos p}{1-\sin p} = \tang(45^\circ+\frac{1}{2}p)$
$= \cot(45^\circ-\frac{1}{2}p)$.

31) $\frac{1+\tang p}{1-\tang p} = V\left(\frac{1+\sin 2p}{1-\sin 2p}\right) = \frac{\sin(45^\circ+p)}{\sin(45^\circ-p)}$
$= \tang(45^\circ+p)$.

32) $\frac{1-\tang p}{1+\tang p} = \tang(45^\circ-p) = \cot(45^\circ+p)$.

33) $\sin(30^\circ+p) = \cos p - \sin(30^\circ-p)$.

34) $\cos(30^\circ+p) = \cos(30^\circ-p) - \sin p$.

35) $\sin(60^\circ+p) = \sin(60^\circ-p) + \sin p$.

36) $\sin(p+q) = \sin p \,.\, \cos q + \cos p \,.\, \sin q$.

37) $\sin(p-q) = \sin p \,.\, \cos q - \cos p \,.\, \sin q$.

38) $\cos(p+q) = \cos p \,.\, \cos q - \sin p \,.\, \sin q$.

39) $\cos(p-q) = \cos p \,.\, \cos q + \sin p \,.\, \sin q$.

40) $\tang(p+q) = \frac{\tang p+\tang q}{1-\tang p\,\tang q} = \frac{\cot p+\cot p}{\cot p \,.\, \cot q - 1}$

41) $\tang(p-q) = \frac{\tang p-\tang q}{1+\tang p \,.\, \tang q} = \frac{\cot q-\cot p}{\cot q \,.\, \cot p+1}$.

42) $\cot(p+q) = \frac{\cot p \,.\, \cot q-1}{\cot p+\cot q} = \frac{1-\tang p \,.\, \tang q}{\tang p+\tang q}$.

43) $\cot(p-q) = \frac{\cot q \,.\, \cot p+1}{\cot q-\cot p} = \frac{1+\tang p \,.\, \tang q}{\tang p-\tang q}$.

44) $\arc\tang x + \arc\tang y = \arc\tang\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$.

45) $\text{arc tang}\, x - \text{arc tang}\, y = \text{arc tang}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$

46) $\text{arc cot}\, x + \text{arc cot}\, y = \text{arc cot}\left(\frac{xy-1}{x+y}\right)$.

47) $\text{arc cot}\, x - \text{arc cot}\, y = \text{arc cot}\left(\frac{xy+1}{y-x}\right)$.

48) $\text{arctang}\, x = \frac{1}{2}\text{arctang}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = \frac{1}{2}\text{arc cot}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$.

49) $\text{arccot}\, x = \frac{1}{2}\,\text{arc cot}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right) = \frac{1}{2}\text{arctang}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)$.

50) $\sin p . \sin q = \frac{1}{2}\cos(p-q) - \frac{1}{2}\cos(p+q)$.

51) $\cos p . \cos q = \frac{1}{2}\cos(p-q) + \frac{1}{2}\cos(p+q)$.

52) $\sin p . \cos q = \frac{1}{2}\sin(p+q) + \frac{1}{2}\sin(p-q)$.

53) $\cos p . \sin q = \frac{1}{2}\sin(p+q) - \frac{1}{2}\sin(p-q)$.

54) $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{1}{2}(p+q).\cos\frac{1}{2}(p-q)$.

55) $\sin p - \sin q = 2\cos\frac{1}{2}(p+q).\sin\frac{1}{2}(p-q)$.

56) $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{1}{2}(p+q).\cos\frac{1}{2}(p-q)$.

57) $\cos p - \cos q = 2\sin\frac{1}{2}(p+q).\sin\frac{1}{2}(q-p)$.

58) $\sin p + \cos q = 2\sin\frac{1}{2}(90^\circ + p - q).\cos\frac{1}{2}(p+q-90^\circ)$
$= 2\cos\frac{1}{2}(90^\circ + q - p).\cos\frac{1}{2}(90^\circ - p - q)$.

59) $\sin p - \cos q = 2\cos\frac{1}{2}(90 + p - q).\sin\frac{1}{2}(p+q-90^\circ)$
$= 2\sin\frac{1}{2}(90^\circ + q - p).\sin\frac{1}{2}(p+q-90^\circ)$.

60) $\cos p - \sin q = 2\sin\frac{1}{2}(90^\circ + p - q).\sin\frac{1}{2}(90^\circ - p - q)$
$= 2\cos\frac{1}{2}(90^\circ + q - p).\sin\frac{1}{2}(90^\circ - p - q)$.

61) $\text{tang}\, p + \text{tang}\, q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p.\cos q}$.

62) $\text{tang}\, p - \text{tang}\, q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p.\cos q}$.

63) $\cot p + \cot q = \frac{\sin(p+q)}{\sin p.\sin q}$.

64) $\cot p - \cot q = \frac{\sin(q-p)}{\sin p.\sin q}$.

65) $\cot p + \text{tang}\, q = \frac{\cos(p-q)}{\sin p.\cos q}$

66) $\cot p - \operatorname{tang} q = \frac{\cos(p+q)}{\sin p . \cos q}$.

67) $\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(p+q)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(p-q)} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(p+q).\cot\frac{1}{2}(p-q)$.

68) $\frac{\cos p + \cos q}{\cos p - \cos q} = \frac{\cot\frac{1}{2}(p+q)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(q-p)} = \cot\frac{1}{2}(p+q).\cot\frac{1}{2}(q-p)$.

69) $\frac{\sin p + \sin q}{\cos p + \cos q} \cdot \frac{\cos q - \cos p}{\sin p - \sin q} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(p+q)$

70) $\frac{\sin p + \sin q}{\cos q - \cos p} \cdot \frac{\cos p + \cos q}{\sin p - \sin q} = \cot\frac{1}{2}(p-q)$.

71) $\frac{\operatorname{tang} p + \operatorname{tang} q}{\operatorname{tang} p - \operatorname{tang} q} \cdot \frac{\cot p + \cot q}{\cot q - \cot p} = \frac{\sin(p+q)}{\sin(p-q)}$.

72) $\frac{\operatorname{tang} p + \operatorname{tang} q}{\cot p + \cot q} \cdot \frac{\operatorname{tang} p - \operatorname{tang} q}{\cot q - \cot p} = \operatorname{tang} p . \operatorname{tang} q$.

73) $\frac{\operatorname{tang} p + \cot q}{\cot p + \operatorname{tang} q} \cdot \frac{\cot q - \operatorname{tang} p}{\cot p - \operatorname{tang} q} = \operatorname{tang} p . \cot q$.

74) $\frac{\operatorname{tang} p + \operatorname{tang} q}{\cot p - \operatorname{tang} q} = \operatorname{tang} p . \operatorname{tang}(p+q)$.

75) $\frac{\cot p + \cot q}{\cot p - \operatorname{tang} q} = \cot q . \operatorname{tang}(p+q)$.

76) $\frac{\operatorname{tang} p - \operatorname{tang} q}{\cot p + \operatorname{tang} q} = \operatorname{tang} p . \operatorname{tang}(p-q)$.

77) $\frac{\cot q - \cot p}{\operatorname{tang} q + \cot p} = \cot q . \operatorname{tang}(p-q)$.

78) $1 + \operatorname{tang} p . \operatorname{tang} q = \frac{\cos(p-q)}{\cos p . \cos q}$.

79) $1 - \operatorname{tang} p . \operatorname{tang} q = \frac{\cos(p+q)}{\cos p . \cos q}$.

80) $\sin(p+q).\sin(p-q) = \sin^2 p - \sin^2 q = \frac{1}{2}\cos 2q - \frac{1}{2}\cos 2p$.

81) $\cos(p+q).\cos(p-q) = \cos^2 p - \sin^2 q = \frac{1}{2}\cos 2q + \frac{1}{2}\cos 2p$.

82) $\sin(p+q).\cos(p-q) = \frac{1}{2}\sin 2p + \frac{1}{2}\sin 2q$.

83) $\sin(p-q).\cos(p+q) = \frac{1}{2}\sin 2p - \frac{1}{2}\sin 2q$.

84) Potenzen der Sinus

$$\sin^2 p = \tfrac{1}{2}(-\cos 2p + 1)$$
$$\sin^3 p = \tfrac{1}{4}(-\sin 3p + 3\sin p)$$
$$\sin^4 p = \tfrac{1}{8}(+\cos 4p - 4\cos 2p + 3)$$
$$\sin^5 p = \tfrac{1}{16}(+\sin 5p - 5\sin 3p + 10\sin p)$$
$$\sin^6 p = \tfrac{1}{32}(-\cos 6p + 6\cos 4p - 15\cos 2p + 10)$$
$$\sin^7 p = \tfrac{1}{64}(-\sin 7p + 7\sin 5p - 21\sin 3p + 35\sin p)$$
$$\sin^8 p = \tfrac{1}{128}(+\cos 8p - 8\cos 6p + \frac{8.7}{1.2}\cos 4p - \ldots)$$

85) Potenzen der Cosinus.

$$\cos^2 p = \tfrac{1}{2}(\cos 2p + 1)$$
$$\cos^3 p = \tfrac{1}{4}(\cos 3p + 3\cos p)$$
$$\cos^4 p = \tfrac{1}{8}(\cos 4p + 4\cos 2p + 3)$$
$$\cos^5 p = \tfrac{1}{16}(\cos 5p + 5\cos 3p + 10\cos p)$$
$$\cos^6 p = \tfrac{1}{32}(\cos 6p + 6\cos 4p + 15\cos 2p + 10)$$
$$\cos^7 p = \tfrac{1}{64}(\cos 7p + 7\cos 5p + 21\cos 3p + 35\cos p)$$
$$\cos^8 p = \tfrac{1}{128}(\cos 8p + 8\cos 6p + 28\cos 4p + 56\cos 2p + 35)$$
$$\cos^9 p = \tfrac{1}{256}(\cos 9p + \cos 7p + \frac{9.8}{1.2}\cos 5p + \frac{9.8.7}{1.2.3}\cos 3p + \ldots).$$

86) Potenzen der Tangenten und Cotangenten.

$$\tan^2 p = \frac{1-\cos 2p}{1+\cos 2p}; \tan^3 p = \frac{3\sin p - \sin 3p}{3\cos p + \cos 3p}$$
$$\cot^2 p = \frac{1+\cos 2p}{1-\cos 2p}; \cot^3 p = \frac{3\cos p + \cos 3p}{3\sin p - \sin 3p}.$$

87) Sinus der vielfachen Bogen oder Winkel

$$\sin 2p = 2\cos p \,.\, \sin p$$
$$\sin 3p = (4\cos^2 p - 1).\sin p = 3\sin p - 4\sin^3 p$$
$$\sin 4p = (8\cos^3 p - 4\cos p)\sin p = (4\sin p - 8\sin^3 p).\cos p$$
$$\sin 5p = (16\cos^4 p - 12\cos^2 p + 1)\sin p$$
$$= 5\sin p - 20\sin^3 p + 16\sin^5 p.$$
$$\sin np = [2^{n-1}\cos^{n-1} p - \frac{(n-2)}{1}2^{n-3}\cos^{n-3} p$$
$$+ \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}2^{n-5}\cos^{n-5} p - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}2^{n-7}\cos^{n-7} p$$
$$+ \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1.2.3.4}.2^{n-9}\cos^{n-9} p - \ldots]\sin p.$$

88)

88) Cosinus der vielfachen Bogen.

$$\cos 2p = 2\cos^2 p - 1 = -2\sin^2 p + 1$$

$$\cos 3p = 4\cos^3 p - 3\cos p = (-4\sin^2 p + 1).\cos p$$

$$\cos 4p = 8\cos^4 p - 8\cos^2 p + 1 = 8\sin^4 p - 8\sin^2 p + 1$$

$$\cos 5p = 16\cos^5 p - 20\cos^3 p + 5\cos p$$
$$= (+16\sin^4 p - 12\sin^2 p + 1).\cos p.$$

$$\cos np = 2^{n-1}\cos^n p - \frac{n}{1}.2^{n-3}\cos^{n-2} p$$
$$+ \frac{n\,(n-3)}{1\quad 2}.2^{n-5}\cos^{n-4} p - \frac{n}{1}.\frac{(n-4)\,(n-5)}{2\quad 3}.2^{n-7}\cos^{n\ 6} p$$
$$+ \frac{n\,(n-5)}{1\quad 2}.\frac{(n-6)}{3}.\frac{(n-7)}{4}.2^{n-9}\cos^{n-8} p \ldots\ldots\ldots$$

89) Tangenten der vielfachen Bogen.

$$\tang 2p = \frac{2\tang p}{1-\tang^2 p} = \frac{2}{\cot p - \tang p}$$

$$\tang 3p = \frac{3\tang p - \tang^3 p}{1-3\tang^2 p}.$$

$$\tang np = \frac{\frac{n}{1}\tang p - \frac{n.(n-1)\,(n-2)}{1\quad 2\quad 3}\tang^3 p + \frac{n}{1}..\frac{(n-4)}{5}\tang^5 p}{1 - \frac{n.(n-1)}{1\quad 2}\tang^2 p + \frac{n}{1}..\frac{(n-3)}{4}.\tang^4 p....}$$

90) Cotangenten der vielfachen Bogen.

$$\cot 2p = \frac{\cot p - \tang p}{2} = \frac{\cot^2 p - 1}{2\cot p}$$

$$\cot 3p = \frac{\cot p - 3\tang p}{3 - \tang^2 p}.$$

$$\cot np = \frac{\cot p - \frac{n.(n-1)}{1\quad 2}\tang^1 p + \frac{n}{1}..\frac{(n-3)}{4}\tang^3 p - ..}{n - \frac{n.(n-1)\,(n-2)}{1\quad 2\quad 3}.\tang^2 p + \frac{n}{1}..\frac{(n-4)}{5}.\tang^4 p.}$$

91).

91) Andere Ausdrücke für die Sinus und Cosinus der vielfachen Bogen.

$$\sin 2p = 2\sin p.\cos p$$
$$\sin 3p = 3\sin p.\cos^2 p - \sin^3 p$$
$$\sin 4p = 4\sin p.\cos^3 p - 4\sin^3 p.\cos p$$
$$\sin 5p = 5\sin p.\cos^4 p - 10\sin^3 p.\cos^2 p + \sin^5 p$$
$$\sin np = \frac{n}{1}\sin^1 p.\cos^{n-1} p - \frac{n}{1}.\frac{(n-1)}{2}.\frac{(n-2)}{3}\sin^3 p\cos^{n-3} p$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\ 2\ 3\ 4\ 5}.\sin^5 p.\cos^{n-5} p - \ldots$$
$$\cos 2p = \cos^2 p - \sin^2 p$$
$$\cos 3p = \cos^3 p - 3\sin^2 p.\cos p$$
$$\cos 4p = \cos^4 p - 6\sin^2 p.\cos^2 p + \sin^4 p$$
$$\cos 5p = \cos^5 p - 10\sin^2 p.\cos^3 p + 5\sin^4 p.\cos p$$
$$\cos np = \cos^n p - \frac{n}{1}.\frac{(n-1)}{2}\sin^2 p\cos^{n-2} p$$
$$+\frac{n}{1}\ldots\frac{(n-3)}{4}\sin^4 p.\cos^{n-4} p - \frac{n}{1}\ldots\frac{(n-5)}{6}\sin^6 p.\cos^{n-6} p +$$

92) Verschiedene trigonometrische Ausdrücke durch Hülfe der unendlichen Reihen.

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{2.3} + \frac{\varphi^5}{2.3.4.5} - \frac{\varphi^7}{2\ldots7} + \frac{\varphi^9}{2\ldots9} - \ldots$$
$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{2.3.4} - \frac{\varphi^6}{2\ldots6} + \frac{\varphi^8}{2\ldots8} - \ldots\ldots$$
$$\tang\varphi = \varphi + \frac{\varphi^3}{1.3} + \frac{2\varphi^5}{1.3.5} + \frac{17\varphi^7}{1\ldots7.3} + \frac{62\varphi^9}{1\ldots9.3} +$$
$$\cot\varphi = \frac{1}{\varphi} - \frac{\varphi}{1.3} - \frac{\varphi^3}{1.3.5.3} - \frac{2\varphi^5}{1.3.5.7.3.3} - \frac{\varphi^7}{1\ldots9.5}$$
$$\sin(\varphi+u) = \sin\varphi + u\cos\varphi - \tfrac{1}{2}u^2\sin\varphi - \frac{1}{2.3.}u^3\cos\varphi$$
$$+\frac{1}{2.3.4}u^4\sin\varphi + - - + + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sin(\varphi - u) = \sin\varphi - u\cos\varphi - \tfrac{1}{2}u^2\sin\varphi + \frac{1}{2.3}u^3\cos\varphi$$

$$+ \frac{1}{2.3.4}u^4\sin\varphi - - + + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cos(\varphi + u) = \cos\varphi - u\sin\varphi - \tfrac{1}{2}u^2\cos\varphi + \frac{1}{2.3}u^3\sin\varphi$$

$$+ \frac{1}{2.3.4}u^4\cos\varphi - - + + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cos(\varphi - u) = \cos\varphi + u\sin\varphi - \tfrac{1}{2}u^2\cos\varphi - \frac{1}{2.3}u^3\sin\varphi$$

$$+ \frac{1}{2.3.4}u^4\cos\varphi + - - + + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi = \sin\varphi + \frac{\sin^3\varphi}{2.3} + \frac{3.3\sin_5\varphi}{2.3.4.5} + \frac{3.3.5.5.\sin^7\varphi}{2.3.4.5.6.7} + \cdots$$

$$\varphi = \tang\varphi - \tfrac{1}{3}\tang^3\varphi + \tfrac{1}{5}\tang^5\varphi - \tfrac{1}{7}\tang^7\varphi + \cdots\cdots$$

$\pi = 3,14159265358979323846$

$\log\pi = 0,4971499.$

II.

Analytiſche Darſtellung der Sinus für jeden dritten Grad von 0 bis 90°.

$V2$	$=1,41421356237\,3$	$V\tfrac{1}{2}$	$=0,707106781187$
$V3$	$=1,732050807569$	$V\tfrac{3}{2}$	$=1,224744871392$
$V5$	$=2,236067977500$	$V\tfrac{5}{2}$	$=1,581138830084$
$V(5+V5)$	$=2,689994047856$	$V15$	$=3,872983346208$
$V(5-V5)$	$=1,662507751110$	$V\tfrac{15}{2}$	$=2,738612787526$
$V(10+2V5) = V2.V(5+V5)$			$=3,804226065181$
$V(15+3V5) = V3.V(5+V5)$			$=4,659206362945$
$V(30+6V5) = V2.V(15+3V5)$			$=6,589112828371$
$V(10-2V5) = V2.V(5-V5)$			$=2,351141009170$
$V(15-3V5) = V3.V(5-V5)$			$=2,879547892900$
$V(30-6V5) = V2.V(15-3V5)$			$=4,072295683641$

sin

$\sin 3^\circ = \cos 87 = \frac{1}{8}[\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{15}{2}} + \sqrt{(5+\sqrt{5})} - \sqrt{(15+3\sqrt{5})} - \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}]$.

$\sin 6 = \cos 84 = \frac{1}{8}[\sqrt{(30-6\sqrt{5})} - 1 - \sqrt{5}]$.

$\sin 9 = \cos 81 = \frac{1}{4}[\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{(5-\sqrt{5})}]$.

$\sin 12 = \cos 78 = \frac{1}{8}[\sqrt{3} + \sqrt{(10+2\sqrt{5})} - \sqrt{15}]$.

$\sin 15 = \cos 75 = \frac{1}{2}(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}})$.

$\sin 18 = \cos 72 = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})$.

$\sin 21 = \cos 69 = \frac{1}{8}[\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{(15-3\sqrt{5})}$.
$+\sqrt{(5-\sqrt{5})} - \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{15}{2}}]$.

$\sin 24 = \cos 66 = \frac{1}{8}[\sqrt{3} + \sqrt{15} - \sqrt{(10-2\sqrt{5})}]$.

$\sin 27 = \cos 63 = \frac{1}{4}[\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{(5+\sqrt{5})} - \sqrt{\frac{5}{2}}]$.

$\sin 30 = \cos 60 = \frac{1}{2}$.

$\sin 33 = \cos 57 = \frac{1}{8}[\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{15}{2}} + \sqrt{(15+3\sqrt{5})}$
$-\sqrt{(5+\sqrt{5})} - \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}]$.

$\sin 36 = \cos 54 = \frac{1}{4}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$.

$\sin 39 = \cos 51 = \frac{1}{8}[\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{15}{2}}$
$+\sqrt{(5-\sqrt{5})} - \sqrt{(15-3\sqrt{5})}]$.

$\sin 42 = \cos 48 = \frac{1}{8}[1+\sqrt{(30+6\sqrt{5})} - \sqrt{5}]$.

$\sin 45 = \cos 45 = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

$\sin 48 = \cos 42 = \frac{1}{8}[\sqrt{15} + \sqrt{(10+2\sqrt{5})} - \sqrt{3}]$.

$\sin 51 = \cos 39 = \frac{1}{8}[\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{15}{2}} + \sqrt{(5-\sqrt{5})}$
$+\sqrt{(15-3\sqrt{5})} - \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}}]$.

$\sin 54 = \cos 36 = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$.

$\sin 57 = \cos 33 = \frac{1}{8}[\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{(5+\sqrt{5})}$
$+\sqrt{(15+3\sqrt{5})} - \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{15}{2}}]$.

$\sin 60 = \cos 30 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

$\sin 63 = \cos 27 = \frac{1}{4}[\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{(5+\sqrt{5})} - \sqrt{\frac{1}{2}}]$.

$\sin 66 = \cos 24 = \frac{1}{8}[1+\sqrt{(30-6\sqrt{5})} + \sqrt{5}]$.

$\sin 69 = \cos 21 = \frac{1}{8}[\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{15}{2}}$
$+\sqrt{(15-3\sqrt{5})} - \sqrt{(5-\sqrt{5})}]$.

$\sin 72 = \cos 18 = \frac{1}{4}\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$.

$\sin 75 = \cos 15 = \frac{1}{2}(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}})$.

$\sin 78 = \cos 12 = \frac{1}{8}[\sqrt{5} + \sqrt{(30+6\sqrt{5})} - 1]$.

$\sin 81 = \cos 9 = \frac{1}{4}[\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{(5-\sqrt{5})}]$.

$\sin 84 = \cos 6 = \frac{1}{8}[\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{(10-2\sqrt{5})}]$.

$\sin 87 = \cos 3 = \frac{1}{8}[\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{15}{2}} + \sqrt{(5+\sqrt{5})}$
$+\sqrt{(15+3\sqrt{5})} - \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}}]$.

III.

Auflösung der geradlinigen und der sphärischen Dreyecke.

A) Auflösung der geradlinigen rechtwinkeligen Dreyecke, wobey die Hypothenuse durch H, die beyden Katheten durch A und B, die beyden gegenüber liegenden Winkel aber durch a und b, endlich sin 90° durch R bezeichnet sind.

Gegeben sind		Gesucht wird		Gleichung
		die Hypothenuse	H	$H = \sqrt{(A^2 + b^2)}$
die Katheten	A, B	der Seite A gegenüber liegender Winkel	a	$\text{tang}\, a = \frac{RA}{B}$ oder $\cot a = \frac{RB}{A}$
die Hypothenuse und eine Kathete	H, A	die 2te Kathete	B	$B = \sqrt{[(H+A)(H-A)]}$
		der gegenüber liegende Winkel	a	$\sin a = \frac{RA}{H}$
		der anliegende Winkel	b	$\cos b = \frac{RA}{H}$
die Hypothenuse und ein Winkel	H, a	die gegenüber stehende Kathete	A	$A = \frac{H \cdot \sin a}{R}$
		die anliegende Kathete	B	$R = \frac{H \cdot \cos a}{R}$
eine Kathete und ein Winkel	A, a oder A, b	die Hypothenuse	H	$H = \frac{RA}{\sin a} = \frac{RA}{\cos b}$
		die 2te Kathete	B	$B = \frac{A.\cot a}{R} = \frac{A.\text{tang} b}{R}$

B)

B) Auflösung der geradlinigen schiefwinkeligen Dreyecke, wodurch a, b, c; der Flächenraum durch Q; und sin 90° durch

Gegeben sind		Gesucht wird	
drey Seiten	A, B, C	der Seite A gegenüber liegender Winkel	a
		der Flächeninhalt	Q
zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel	A, B, c	die dritte Seite	C
		die beyden Winkel	a und b
		der Flächeninhalt	Q
zwey Winkel mit der eingeschlossenen Seite	a, b, C	die dem Winkel a gegenüber stehende Seite	A
		der Flächeninhalt	Q
zwey Seiten mit einem gegenüber liegenden Winkel.	A, B, b	die dritte Seite	C
		der eingeschlossene Winkel	c
		der gegenüber liegende Winkel	a
		der Flächeninhalt	Q

bey

bey die Seiten durch A, B, C; die gegenüber liegenden Winkel R bezeichnet sind.

Vorbereitung	Gleichung
$\frac{1}{2}(A+B+C)=P$	$\cos\frac{1}{2}a=\sqrt{\left[\frac{R^2\,P(P-A)}{BC}\right]}$ $\sin\frac{1}{2}a=\sqrt{\left[\frac{R^2(P-B)(P-C)}{BC}\right]}$ $\cos a=R(B^2+C^2-A^2):2BC$
	$Q=\sqrt{[P(P-A)(P-B)(P-C)]}$
	$C=\sqrt{\left[\frac{2A.2B.\sin^2\frac{1}{2}c}{R^2}+(A-B)^2\right]}$ $C=\sqrt{\left[A^2+B^2-\frac{2AB.\cos c}{R}\right]}$
$\frac{1}{2}(180-c)=m$ $a>b$	$\tang n=\frac{(A-B).\tang m}{A+B}$ $a=m+n$, und $b=m-n$; oder $\tang a=\frac{RA.\sin c}{RB-A\cos c}$; $\tang b=\frac{RB.\sin c}{RA-B\cos c}$
	$Q=\frac{1}{2}AB.\sin c:R$
	$A=\frac{C.\sin a}{\sin(a+b)}$
	$Q=\frac{\frac{1}{2}C^2\sin a.\sin b}{R.\sin(a+b)}$
$\sin A=\frac{A.\sin b}{B}$ Es ist $a<90°$ wenn $a<B$ ist; sonst ist es zweifelhaft	$C=B.\sin(a+b):\sin b$
	$c=180°-(a+b)$
	$\sin a=A\sin b:B$
	$Q=\frac{1}{2}AB.\sin(a+b):R$

C)

C) Auflösung der rechtwinkeligen sphärischen Dreyecke, wobey die beyden gegenüber liegenden Winkel aber durch *a* und *b*;

Gegeb.	Gesucht.	Gleichung
H, *a*	*A*	sin *A* = sin *H* sin *a* : *R*
	B	tang *B* = tang *H* cos *a* : *R*
	b	cot *b* = cos *H* tang *a* : *R*
H, *b*	*B*	sin *b* = sin *H* sin *b* : *R*
	A	tang *A* = tang *H* cos *b* : *R*
	a	cot *a* = cos *H* tang *b* : *R*
H, *A*	*B*	cos *B* = *R* cos *H* : cos *A*
	a	sin *a* = *R* sin *A* : sin *H*
	b	cos *b* = tang *A* cot *H* : *R*
H, *B*	*a*	cos *a* = tang *B* cot *H* : *R*
	b	sin *b* = *R* sin *B* : sin *H*
	A	cos *A* = *R* cos *H* : cos *B*
A, *b*	*B*	tang *B* = tang *b* sin *A* : *R*
	H	cot *H* = cot *A* cos *b* : *R*
	a	cos *a* = cos *A* sin *b* : *R*
B, *a*	*A*	tang *A* = tang *a* sin *B* : *R*
	H	cos *H* = cot *B* cos *a* : *R*
	b	cos *b* = cos *B* sin *a* : *R*
A, *B*	*H*	cos *H* = cos *A* cos *B* : *R*
	a	cot *a* = cot *A* sin *B* : *R*
	b	cot *b* = cot *B* sin *A* : *R*
a	*H*	cos *H* = cot *a* cot *b* : *R*
	A	cos *A* = *R* cos *a* : sin *b*
	B	cos *B* = *R* cos *b* : sin *a*
A, *a*	*B*	sin *B* = tang *A* cot *a* : *R*
	H	sin *H* = *R* sin *A* : sin *a*
	b	sin *b* = *R* cos *a* : cos *A*
B, *b*	*A*	sin *A* = tang *B* cot *b* : *R*
	H	sin *H* = *R* sin *B* : sin *b*
	a	sin *a* = *R* cos *b* : cos *B*

die Hypothenuse durch H, die beyden Katheten durch A und B; endlich sin 90° mit R bezeichnet sind *)

Das Gesuchte ist $<$ 90 wenn	oder $>$ 90 wenn
$a < 90$ H gleichartig mit a H gleichartig mit a	$a > 90$ H ungleichartig mit a H ungleichartig mit a
$b < 90$ H gleichartig mit b H gleichartig mit b	$b > 90$ H ungleichartig mit b H ungleichartig mit b
H gleichartig mit A $A < 90$ H gleichartig mit A	H ungleichartig mit A $A > 90$ H ungleichartig mit A
H gleichartig mit B $B < 90$ H gleichartig mit B	H ungleichartig mit B $B > 90$ H ungleichartig mit B
$b < 90$ A gleichartig mit b $A < 90$	$b > 90$ A ungleichartig mit b $A > 90$
$a < 90$ B gleichartig mit a $B < 90$	$a > 90$ B ungleichartig mit a $B > 90$
A gleichartig mit B $A < 90$ $B < 90$	A ungleichartig mit B $A > 90$ $B > 90$
a gleichartig mit b $a < 90$ $b < 90$	a ungleichartig mit b $a > 90$ $b > 90$
Hier ist es zweifelhaft ob das Gesuchte $\gtrless$ 90° ist, wenn dieses nicht aus andern Umständen erhellet.	

*) Diese ganze Tafel bezieht sich zugleich auf ein schiefwinkl. sphärisch. Dreyeck, bey welchem eine Seite $= 90°$ ist, die zwey anderen aber mit a, b, die gegenüber liegenden Winkel mit A, B und endlich der der Seite 90° gegenüber liegende Winkel mit H bezeichnet sind, wenn man überall das Wort gleichartig mit ungleichartig, und umgekehrt, verwechselt.

D) Auflösung der schiefwinkeligen sphärischen Dreyecke für über liegenden Winkel mit *a*, *b*, *c*, bezeichnet sind. Hier tangente eines Bogens oder Winkels über 90°, wie auch werden müssen; und das umgekehrt nach vollendeter Berech- dazu gehörige Bogen oder Winkel kleiner oder größer

Gegeben sind		Gesucht wird	
drey Seiten	*A*, *B*, *C*	der Seite *A* gegenüber liegender Winkel	*a*
zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel	*B*, *C*, *a*	die dritte Seite	*A*
		der Seite *B* gegenüber liegender Winkel	*b*

sin

ein $90° = 1$; wobey die Seiten mit A, B, C, und die gegen ist zu bemerken, daß die Functionen Cosinus, Tangente und Codie Sinus der Bogen oder Winkel über 180° negativ genommen nung, das Zeichen der gefundenen Functionen entscheidet, ob der als 90° sey.

Gleichung

1.) $\cos a = \frac{\cos(A+\Phi)}{\sin B . \sin C . \cos\varphi}$ für $\text{tang}\,\Phi = \frac{\cos B . \cos C}{\sin A}$

oder

2.) $\cos a = \frac{\cos A - \cos B . \cos C}{\sin B . \sin C}$, oder auch

für $\frac{1}{2}(A+B+C) = P$

3.) $\sin\frac{1}{2}a = \sqrt{\left[\frac{\sin(P-B) . \sin(P-C)}{\sin B . \sin C}\right]}$

und

4.) $\cos\frac{1}{2}a = \sqrt{\left[\frac{\sin P . \sin(P-A)}{\sin B . \sin C}\right]}$

1.) $\cos A = \frac{\cos C . \sin(B+\Phi)}{\sin\Phi}$ für $\cot\varphi = \text{tang}\, C . \cos a$

oder

2.) $\cos A = \cos B . \cos C + \sin B . \sin C . \cos a$,

oder auch

3.) $\sin\frac{1}{2}A = \sqrt{[\sin B . \sin C . \sin^2\frac{1}{2}a + \sin^2\frac{1}{2}(B-C)]}$

---

2). $\text{tang}\, b = \frac{\text{tang}\, a . \cos\Phi}{\cos(C+\varphi)}$ für $\cot\varphi = \text{tang}\, B . \cos a$

oder

2.) $\cot b = \frac{\sin C . \cot B - \cos a . \cos C}{\sin a}$

Fortsetzung der Tafel D) von der Auflösung

Gegeben sind		Gesuchet wird	
zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel	B, C, a	der Seite C gegenüber liegender Winkel	c
zwey Seiten mit einem gegenüber liegenden Winkel	B, C, c	die dritte Seite	A
		der eingeschlossene Winkel	a
		der andere der Seite B gegen über liegende Winkel	b

der schiefwinkeligen sphärischen Dreyecke.

Gleichung
1.) $\text{tang}\,c = \frac{\text{tang}\,a \,.\, \cos\phi}{\cos(B+\phi)}$ für $\cot\phi = \text{tang}\,C \,.\, \cos\,a$ oder auch   2.) $\cot\varphi = \frac{\sin B \,.\, \cot C - \cos\,a \,.\, \cos B}{\sin\,a}$
1.) $\sin(A+\phi) = \frac{\cos C \,.\, \sin\phi}{\cos B}$ für $\cot\phi = \cos c \,.\, \text{tang}\,B$ oder   2.) $\text{tang}\,\frac{1}{2}A = \frac{\cos c \,.\, \sin B \pm \sqrt{(\sin^2 C - \sin^2 c \,.\, \sin^2 B)}}{\cos B + \cos C}$
1.) $\sin(a+\phi) = \text{tang}\,B \,.\, \cot C \,.\, \sin\phi$ für $\text{tang}\,\phi = \text{tang}\,c \,.\, \cos B$ oder   2.) $\text{tang}\,\frac{1}{2}a = \frac{\cos c \,.\, \sin C \pm \sqrt{(\sin^2 C - \sin^2 c \,.\, \sin^2 B)}}{\sin c \,.\, \sin(B+C)}$

$$\sin b = \frac{\sin B \,.\, \sin c}{\sin C}$$

hier ist

$b \gtrless 90°$, wenn $c \gtrless 90$ und $C \gtrless B$ sind; oder

$b \gtrless 90°$, wenn $c \gtrless 90$, $B \gtrless 90$ und $C \gtrless (180 - B)$ ist.

Endlich ist $b + c = 180°$, wenn $B + C = 180°$
und $b = c$ wenn $B = C$ ist.

In den übrigen Fällen aber ist es unbestimmt.

Fortsetzung der Tafel D) von der Auflösung

Gegeben sind		Gesucht wird	
die drey Winkel	a, b, c	die dem Winkel a gegenüber liegende Seite	A
zwey Winkel mit der dazwischen liegenden Seite	b, c, A	der dritte Winkel	a
		die dem Winkel b gegenüber liegende Seite	B

der schiefwinkeligen sphärischen Dreyecke.

Gleichung
1.) $\cos A = \frac{\sin(a+\phi)}{\sin b . \sin c . \sin \phi}$ für $\cot \phi = \frac{\cos b . \cos c}{\sin a}$ oder   2.) $\cos A = \frac{\cos a + \cos b . \cos c}{\sin b . \sin c}$, oder auch   für $\frac{1}{2}(a+b+c) = p$ 3.) $\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{[\frac{\cos(p-b).\cos(p-c)}{\sin b . \sin c}]}$ und   4.) $\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{[\frac{\cos p . \cos(p-a)}{\sin b . \sin c}]}$
1.) $\cos a = \frac{\cos b . \cos(c+\phi)}{\cos \phi}$ für $\operatorname{tang} \phi = \cos A . \operatorname{tang} b$ oder   2.) $\cos a = \cos A . \sin b . \sin c - \cos b . \cos c$,   oder auch   3.) $\sin \frac{1}{2} a = \sqrt{[\sin b . \sin c . \sin^2 \frac{1}{2} A + \cos^2 \frac{1}{2}(b+c)]}$
1.) $\operatorname{tang} B = \frac{\operatorname{tang} A . \sin \varphi}{\sin(c+\varphi)}$ für $\operatorname{tang} \phi = \cos A . \operatorname{tang} b$ oder   2.) $\cot B = \frac{\cot b . \sin c + \cos A . \cos c}{\sin A}$.

Fort-

4.) Fortsetzung der Tafel D) von der Auflösung

Gegeben sind		Gesucht wird	
zwey Winkel mit der dazwischen liegenden Seite	b, c, A	die dem Winkel c gegenüber liegende Seite	C
zwey Winkel mit einer gegenüber liegenden Seite	b, c, B	die dazwischen liegende Seite	A
		der dritte Winkel	a
		die dem andern Winkel gegenüber liegende Seite	C

der

der schiefwinkeligen sphärischen Dreyecke.

Gleichung
1.) $\text{tang}\, C = \frac{\text{tang}\, A \,.\, \sin \phi}{\sin(c + \phi)}$ für $\text{tang}\, \phi = \cos A \,.\, \text{tang}\, b$ oder auch 2.) $\cot C = \frac{\cot c \,.\, \sin b + \cos A \,.\, \cos b}{\sin A}$
1.) $\sin(A - \phi) = \cot b \,.\, \text{tang} c \,.\, \sin \phi$ für $\text{tang}\, \phi = \cos c \,.\, \text{tang}\, B$ oder 2.) $\text{tang}\, \frac{1}{2} A = \frac{\sin b \,.\, \cos B \mp \sqrt{(\sin^2 b - \sin^2 c \,.\, \sin^2 B)}}{\sin B \,.\, \sin(c - b)}$
1.) $\sin(a - \phi) = \frac{\sin \varphi \,.\, \cos b}{\cos c}$ für $\cot \phi = \cos B \,.\, \text{tang}\, c$ oder 2.) $\text{tang}\, \frac{1}{2} a = \frac{\cos B \,.\, \sin c \mp \sqrt{(\sin^2 b - \sin^2 c \, \sin^2 B)}}{\cos b - \cos c}$
$\sin C = \frac{\sin c \,.\, \sin B}{\sin b}$ hier ist $C \gtrless 90°$, wenn $B \gtrless 90°$ und $b \gtrless c$ sind; oder $C \gtrless 90°$, wenn $c \gtrless 90°$, $B \lessgtr 90°$, und $b \gtrless (180 - c)$ ist, oder endlich $B + C = 180°$ wenn $b + c = 180°$ und $C = B$ wenn $c = b$ ist. In den übrigen Fällen aber ist es unbestimmt.

An-

Anmerkungen.

1) Bey der Erklärung der Paralell-Linien im §. 361. ist angenommen worden, daß, wenn man auf einer Geraden Senkrechten von gleicher Länge in was immer für einer Anzahl errichtet, alle Endpuncte derselben in einer andern Geraden liegen. Da durch zwey Puncte die Lage einer Geraden schon vollkommen bestimmt ist; so müßte bewiesen werden, daß, wenn man durch die Endpuncte zweyer dieser Senkrechten eine Gerade führet, auch die Endpuncte aller übrigen gleichen Senkrechten in dieser Verbindungs-Linie liegen müssen. Es gibt mehrere Methoden die Sätze für die Parallel-Linien abzuleiten, je nachdem eine oder die andere Eigenschaft für die Erklärung dieser Linien angenommen wird, aber bisher ist noch keine aufgefunden worden, welche in Hinsicht auf eine vollkommene geometrische Schärfe sich jeder Prüfung unterziehen könnte, obschon die scharfsinnigsten mathematischen Köpfe die hier aufstossenden Schwierigkeiten zu heben versuchten. Eine ausführliche Abhandlung über diesen Gegenstand ist im folgenden Werke enthalten: Critik der Parallel-Theorie von Joh. Jos. Ign. Hoffmann. 2 Thle. Jena. 1807.

2) In der zweyten Auflage Seite 657 und 661, so wie in allen mir bekannten Werken über die sphärische Trigonometrie, sind bey der Gleichung aus den vier gegenüber liegenden Stücken eines Kugeldreyeckes folgende Bedingungen angegeben.

Es ist $b \gtrless 90°$, wenn c und $B \gtrless 90°$ und $C \gtrless B$,

dann $C \gtrless 90°$, wenn c und $B \gtrless 90°$ und $b \gtrless c$ sind.

Ich fand aber nach der Methode, welche ich in meiner Abhandlung über diejenigen Fälle, aus welchen sich bestimmt angeben läßt, ob bey der Entwicklung eines sphärischen Dreyeckes aus den gegebenen zwey anliegenden und einem gegenüber liegenden Stücke das vierte gegenüber liegende Stück grösser oder kleiner als 90° sey, anzeigte, indem ich alle möglichen Fälle untersuchte;

$b \gtrless 90°$, wenn $c \gtrless 90°$ und $C \gtrless B$

dann $C \gtrless 90°$, wenn $B \gtrless 90°$, und $b \gtrless c$ sind,

Auf die Art des zu suchenden Winkels b hat also die Art der Seite C, und auf die Art der zu suchenden Seite C die Art des Winkels c keinen Einfluß. Aus dieser Ursache habe ich in dieser Auflage die überflüßige Bedingung hinweggelassen.

Die Art des zu suchenden Winkels b bleibt unbestimmt, wenn

I. $B \gtrless 90°$, $c \gtrless 90°$ und $C \gtrless B$

II. $B \gtrless 90°$, $c \gtrless 90°$, $C \gtrless 90°$ und $B + C \gtrless 180°$

III. $B = 90°$, $c \gtrless 90°$ und $C \gtrless 90°$ sind.

Die Art der zu suchenden Seite C ist zweifelhaft, wenn

I. $c \gtrless 90°$, $B \gtrless 90°$ und $c \gtrless b$

II. $c \gtrless 90°$, $B \gtrless 90°$, $b \gtrless 90°$ und $b + c \gtrless 180°$,

III. $c = 90°$, $B \gtrless 90°$ und $b \gtrless 90°$ sind.

In allen übrigen Fällen ist die Art des zu suchenden Stückes bestimmt, und im Anhange auf den Seiten 655, 659 und 663 angegeben.

3) Ein schiefer Kegel ist nicht immer ein senkrechter elliptischer schief abgeschnittener Kegel, für welchen er auf der Seite 462 in der ersten Anmerkung erkläret wird. Der auf die Achse eines schiefen Kegels senkrecht geführte Schnitt kann auf der Oberfläche jede Kegelschnitts-Linie erzeugen; diese Linie hängt von dem Winkel ab, welchen die Achse mit der kleinsten Seite einschließt. Ist dieser ein spitziger Winkel, so gibt der Schnitt

eine Ellipse. Hat dieser Winkel 90°, so entsteht eine Parabel. Ist endlich dieser Winkel ein stumpfer Winkel, so muß der Schnitt eine Hyperbel bilden. Man kann sich hiervon sehr leicht überzeugen, wenn man sich unter den angegebenen Bedingungen einen Durchschnitt verzeichnet, im welchen die größte und die kleinste Seite des schiefen Kegels sich befindet, oder aber, wenn man die allgemeine Gleichung für den auf die Achse senkrecht gelegten Schnitt entwickelt, und daraus die hierher gehörigen Schlüsse ableitet.

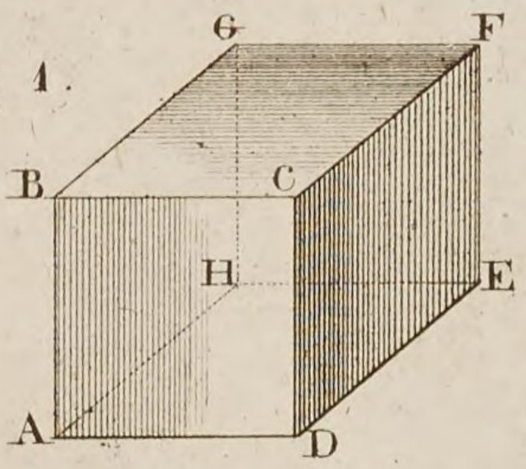
Lindner.

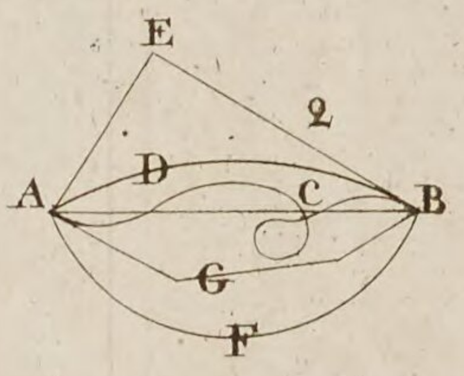
Verbesserungen.

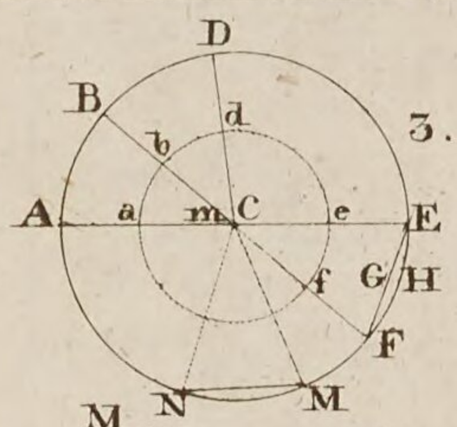
Seite.	Zeile.	Fehler.	Verbesserung.
10	28	CA=a	CA=ca
27	vorletzte	$\frac{360-x}{2}\,\frac{x}{2}=90°$	$\frac{360-x}{2}-\frac{x}{2}=90°$
36	7	Verzeichniß	Verzeichnung
48	vorletzte	$a^2=b^2+c$	$a^2=b^2+c^2$
57	vorletzte	MP:EP=P′G:PM	MP:EP=PG:PM
64	18	GP c	GP=c
94	letzte	$+4+5+6+\ldots$	$3+4+5+6+\ldots$
101	21	EBd, bBe, eBf	EBd, dBe, eBf
102	18	=628 3^{18}	=628, 3^{18}
104	15	$+\frac{x^2}{\infty^2}.\sqrt{(a^2-\frac{\infty^2x^2}{\infty^2})}$	$+\frac{x}{\infty}.\sqrt{(a^2-\frac{\infty^2x^2}{\infty^2})}$
120	2	$=\frac{2}{4}b^2\sqrt{3}$	$=\frac{1}{4}b^2\sqrt{3}$
125	18	$z=x^2+\frac{4a^2}{x^2}$	$z^2=x^2+\frac{4a^2}{x^2}$
141	32	CME	DME
174	8	eigentliche	eigenthümliche
175	28	$\frac{a^2x\pi}{\infty}-\frac{2^2x^3}{\infty^3}$	$\frac{a^2x\pi}{\infty}-\frac{2x^3\pi}{\infty^3}$
—	letzte	$(a^2-\frac{\infty^2x^2}{\infty^2})\pi.\frac{-}{\infty}$	$(a^2-\frac{\infty^2x^2}{\infty^2})\pi.\frac{x}{\infty}$
183	3	$A.a=B:b$	$A:a=B:b$
194	21	AB	Ab
223	27	sin$D$,BC=sin$B$:DC	sin$D$:BC=sin$B$:DC
232	15	$\cos^2B\frac{1}{2}=$	$\cos^2\frac{1}{2}B=$
253	30	$\frac{\text{tang}A.\cos B}{r}$	$\frac{\text{tang}A.\cos b}{r}$
266	7	$2\text{tang}^2\frac{1}{2}C.\cos b.\sin A$	$2\text{tang}\frac{1}{2}C.\cos b.\sin A$
292	19	sin —$(p\,b)$	sin $(p-b)$
294	vorletzte	DCM	DCN
328	7	aus D	aus A
351	10	auch D′C″=	auch D′C′=
414	11	$y^{m+n}\ p^m x^n$	$y^{m+n}=p^m x^n$
425	letzte	$y=+\sqrt{[}$	$y=\pm\sqrt{[}$
448	27	Weil	Will
458	25	HCG=25°44′25½″	HCG=25°44′25½″
480	12	(dx^2)	$(dx)^2$
497	11	$dd(ax^m)=d[(dax^m)]$	$dd(ax^m)=d[d(ax^m)]$
498	14	$ax^m\ ^n dx^n$	$ax^{m-n}dx^n$
501	8	$X=Ax^b$	$X=Ax^a$

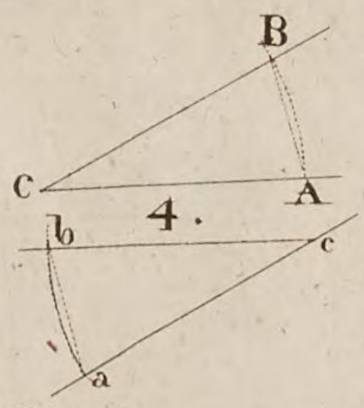
Seite.	Zeile.	Fehler.	Verbesserung.
529	8	$k=\frac{c(\varphi^2+1)^{\frac{3}{2}}}{2\pi(\varphi+2)}$	$k=\frac{c(\varphi^2+1)^{\frac{3}{2}}}{2\pi(\varphi^2+2)}$
553	16	$\int\frac{m}{n}.\frac{x^{n-1}\mathrm{d}x}{a^n+x^n}$	$\int\frac{m}{n}.\frac{nx^{n-1}\mathrm{d}x}{a^n+x^n}$
558	12	$+\frac{p(p-1)a^{p-2}b}{1.2}$	$+\frac{p(p-1)a^{p-2}b^2}{1.2}$
559	10	$+\frac{p(p-)(p-2)}{1.2.3}$	$+\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}$
—	17	$=b^{-n}(z-a)^n,$	$=b^{-\frac{1}{n}}(z-a)^{\frac{1}{n}}$
—	18	$x^m=b^{-\frac{m}{n}}(z-a)^{\frac{m}{n}}$	$x^m=b^{-\frac{m}{n}}(z-a)^{\frac{m}{n}}.$
562	23	$C-\frac{1}{6}\frac{1}{3}(\frac{3-5x^2}{x})^{\frac{7}{2}}$	$C-\frac{1}{6}\frac{1}{3}(\frac{3-5x^2}{x^2})^{\frac{7}{2}}$
571	9	$(a+bx^n)^{p-1}=$	$(a+bx^n)^{p+1}=$
580	vorletzte	$-\frac{1}{2}x^{-1}(x^{-\frac{1}{2}}+1)^2$	$-\frac{1}{2}x^{-1}(x^{-2}+1)^{\frac{1}{2}}$
593	6	$x^m\mathrm{d}x(a+bx^n)$	$x^m\mathrm{d}x(a+bx^n)^p$
597	17	$=\frac{\mu(bf-ag)z^{\mu-2}\,\mathrm{d}z}{n(fz^\mu-a)(b-gz^\mu)}$	$=\frac{\mu(bf-ag)z^{\mu-1}\mathrm{d}z}{n(fz^\mu-a)(b-gz^\mu)}$
604	letzte	$=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^1)}}$	$=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)}}$
613	21	$=\frac{cx^{\frac{a}{-1}}}{b-a}$	$=\frac{cx^{\frac{b}{-1}}}{b-a}.$
626	22	$=C+\frac{y}{p}.\sqrt{(y^2+\frac{1}{4}p^2)}$	$=C+\frac{y}{p}.\sqrt{(y^2+\frac{1}{4}p^2)}$
629	14	$+5.(\frac{1.3}{2.5})^2e^4+\ldots\ldots$	$+5.(\frac{1.3}{2.4})^2e^4+\ldots\ldots$
643	20	$=\frac{\cot p+\cot p}{\cot p.\cot q-1}$	$=\frac{\cot p+\cot q}{\cot p.\cot q-1}$
646	17	$\cos 9p+\cos 7p+$	$\cos 9p+9\cos 7p+$
651	im 3ten Fache	$R=\frac{H.\cos a}{R}$	$B=\frac{H.\cos a}{R}$
653	im letzten Fache	$\sin A=\frac{A.\sin b}{B}$	$\sin a=\frac{A.\sin b}{B}$
—	— —	wenn $a<B$ ist	wenn $A<B$ ist
654	im 8ten Fache	a	$a,\ b$

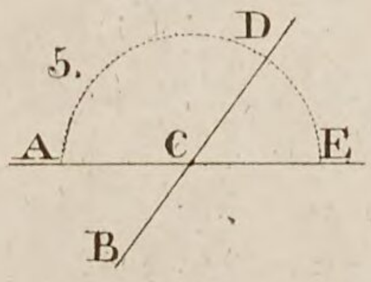
Fig 1.

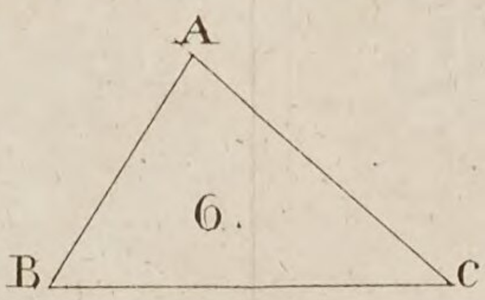

G
F
B
C
H
E
A
D

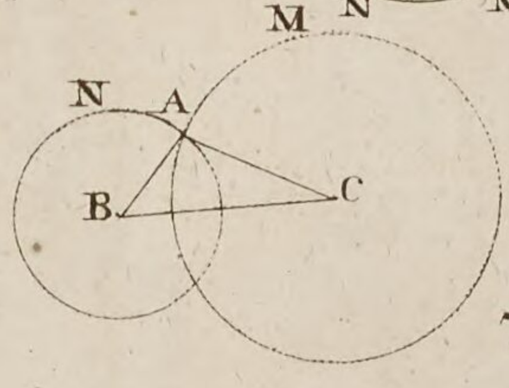

E
2
D
A
C
B
G
F

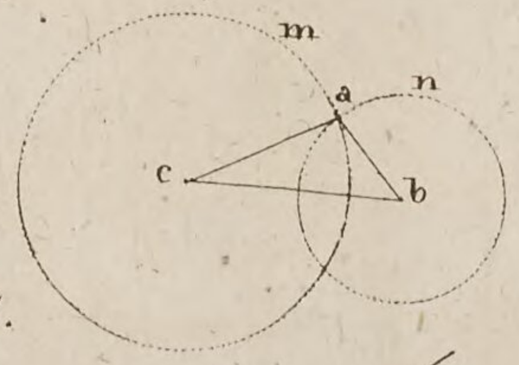

D
B
b
d
3.
A
a
m
C
e
E
f
G
H
F
N
M

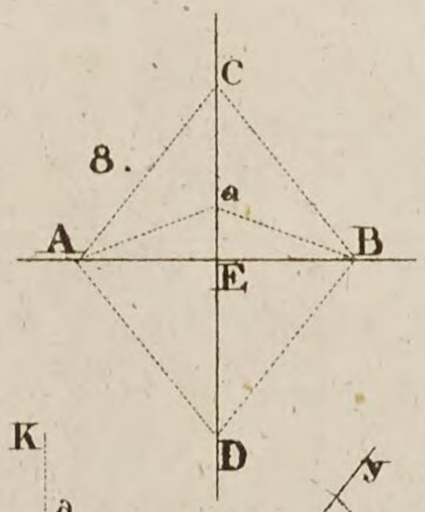

B
C
A
4.
b
c
a

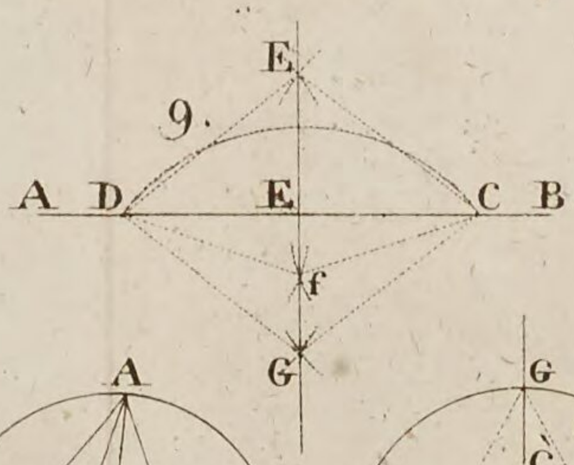

D
5.
A
C
E
B

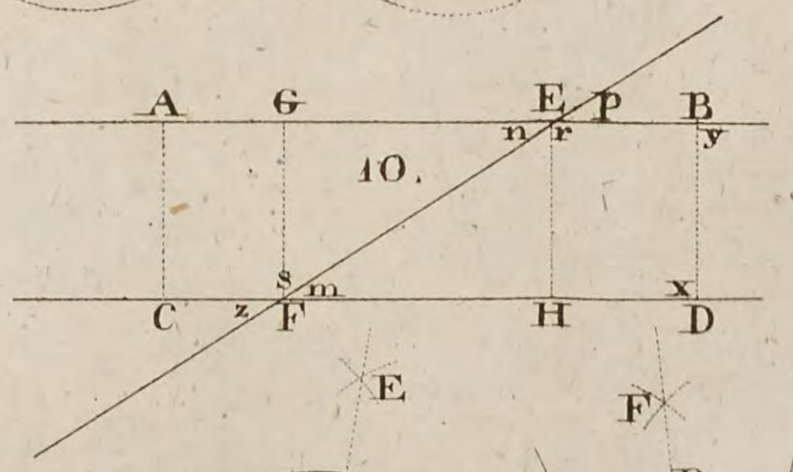

A
6.
B
C

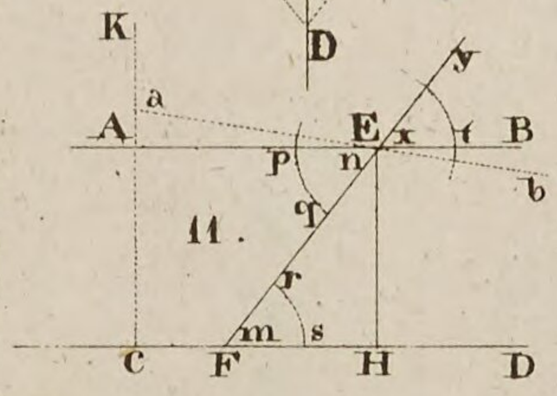

M
N
A
B
C
7.

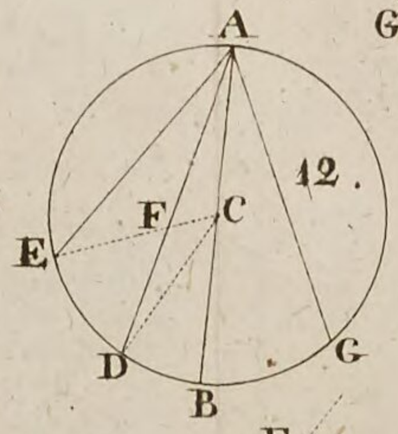

m
a
n
c
b

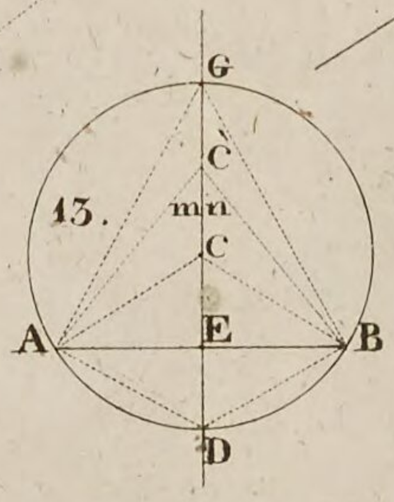

C
8.
a
A
B
E
D

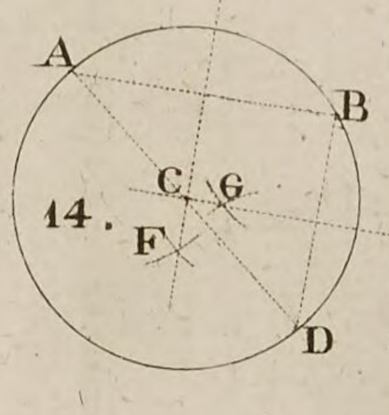

E
9.
A
D
E
C
B
f
G

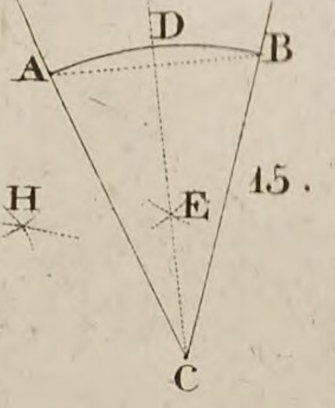

A
G
E
P
B
n
r
y
10.
s
m
x
C
z
F
H
D

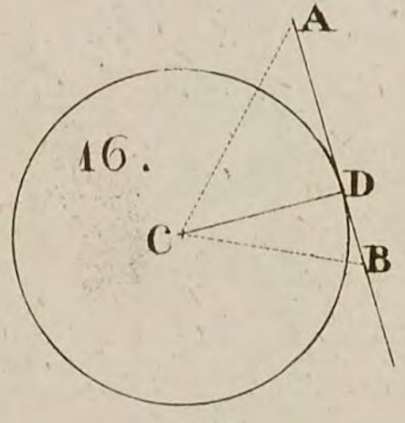

K
a
y
A
E
x
t
B
P
n
b
11.
q
r
m
s
C
F
H
D

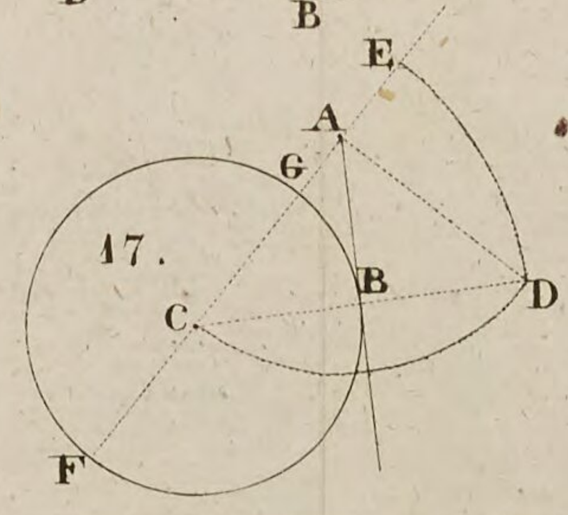

A
12.
F
C
E
D
G
B

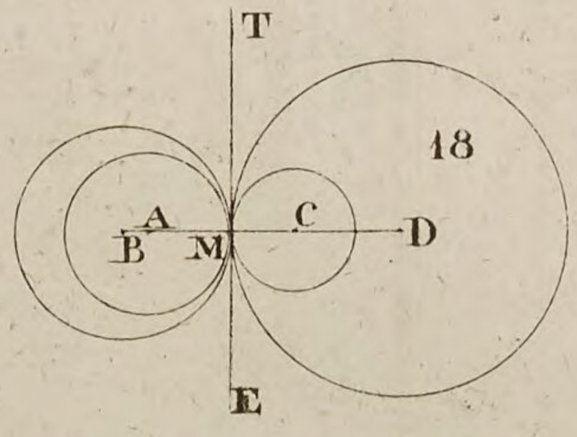

G
C
13.
m
n
C
A
E
B
D

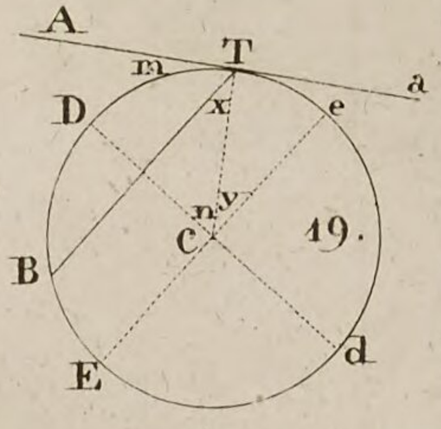

E
A
B
C
G
14.
F
H
D

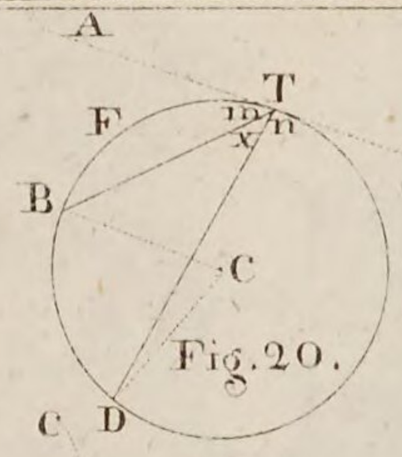

F
D
A
B
15.
E
C

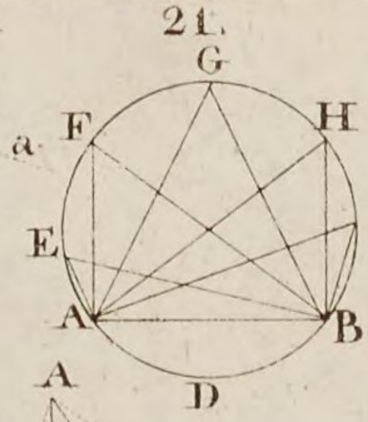

A
16.
D
C
B

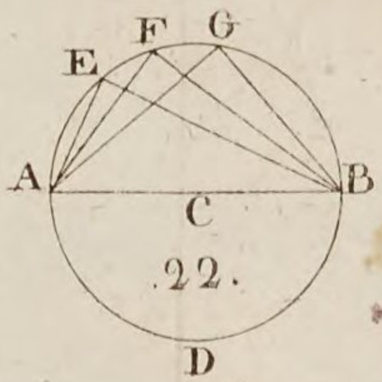

E
A
G
17.
B
D
C
F

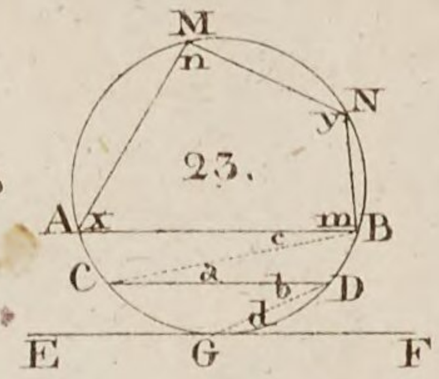

T
18
A
C
D
B
M
E

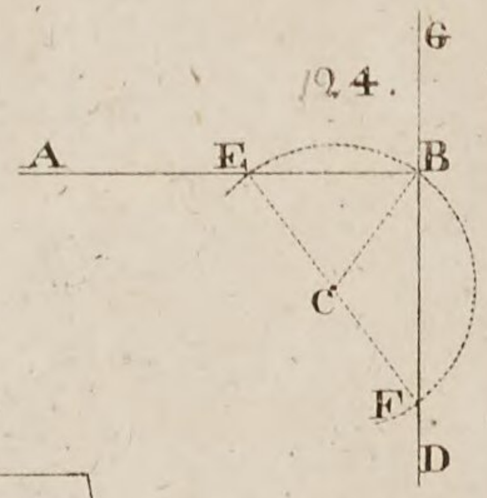

A
T
m
a
D
x
e
n
y
C
19.
B
E
d

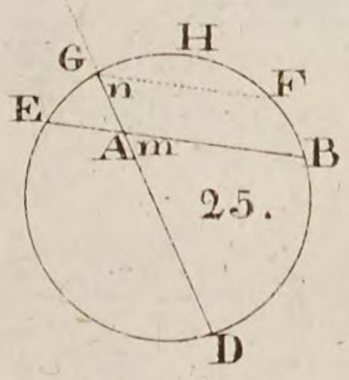

A
T
F
m
x
n
B
C
D
Fig. 20.

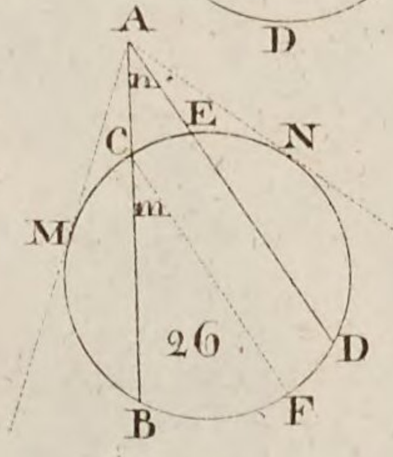

21.
G
a
F
H
E
A
B
D


E
F
G
A
B
C
22.
D

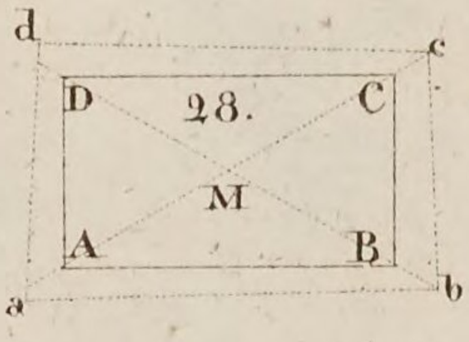

M
n
N
y
23.
A
x
m
B
c
C
a
b
D
d
E
G
F

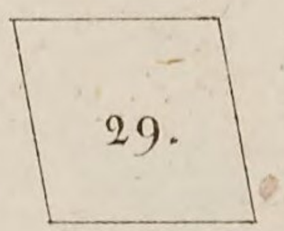

24.
G
A
E
B
c
F
D

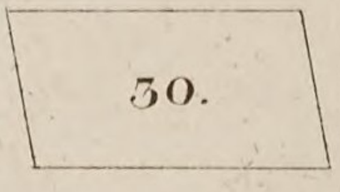

G
H
E
n
F
A
m
B
25.
D

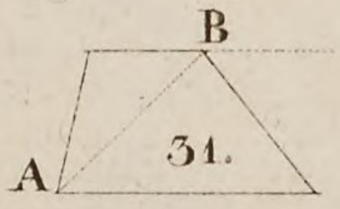

A
n
C
E
N
M
m
26.
B
F
D

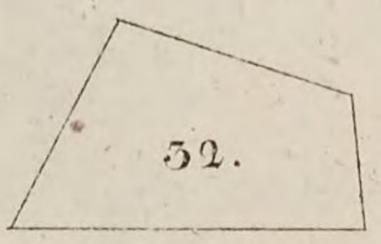
27.

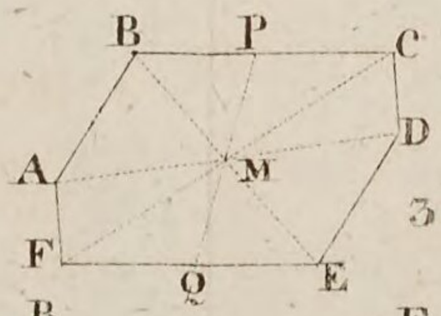

d
c
D
28.
C
M
A
B
a
b

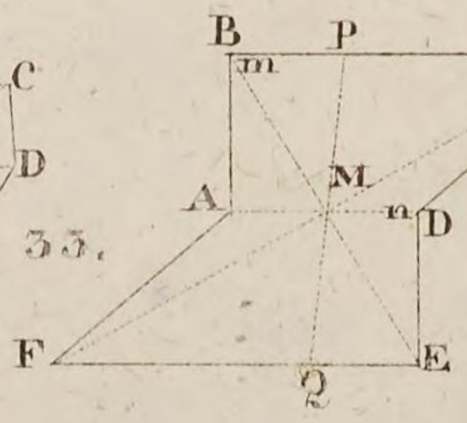

29.

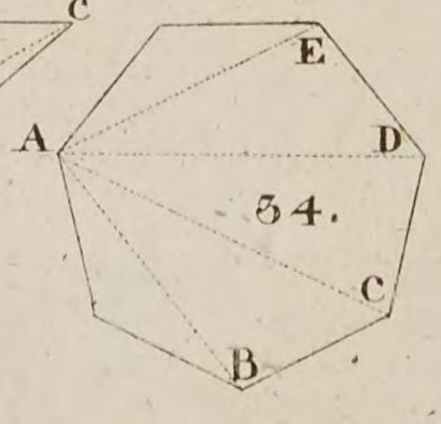

30.

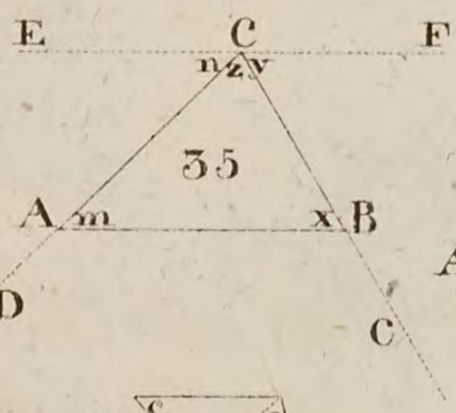

B
A
31.

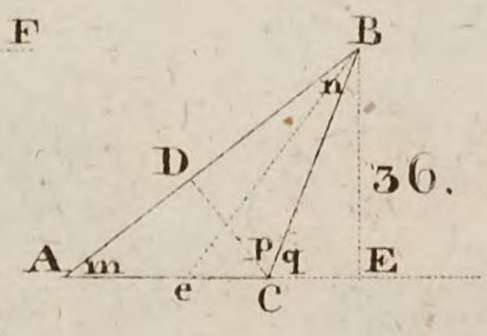

32.

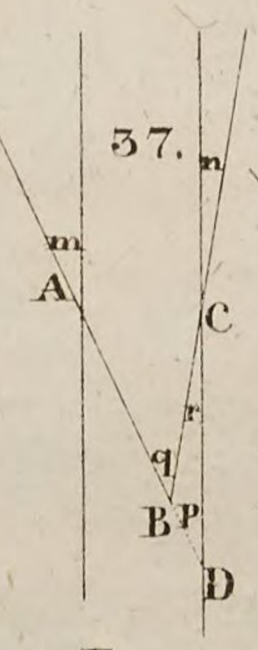

B
P
C
A
M
D
F
Q
E

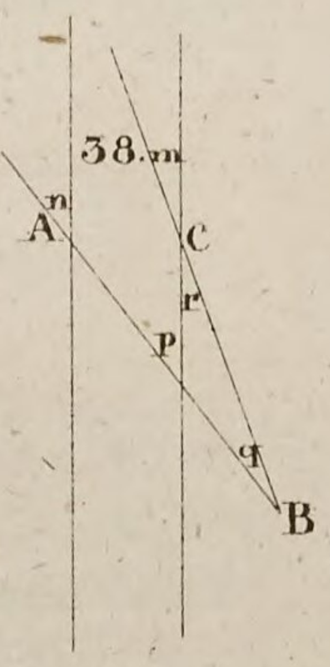

B
P
C
m
A
M
n
D
33.
F
E
2

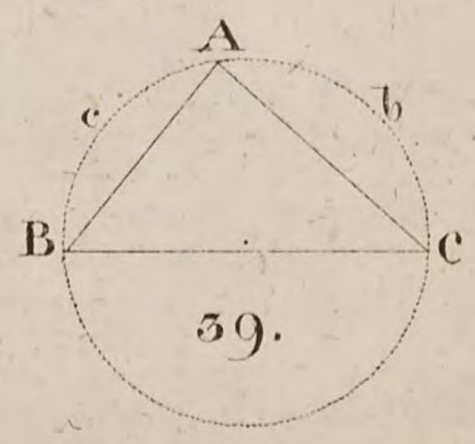

E
A
D
34.
C
B

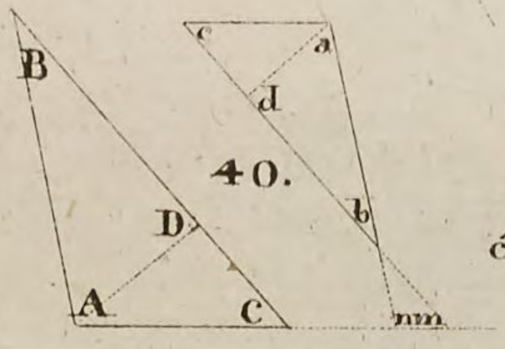

E
C
F
n
z
y
35
A
m
x
B
D
C

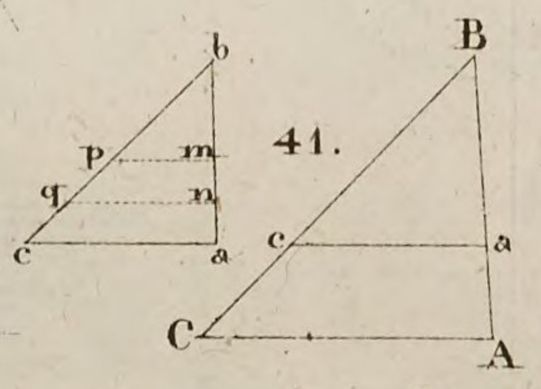

B
n
D
36.
A
m
P
q
E
e
C

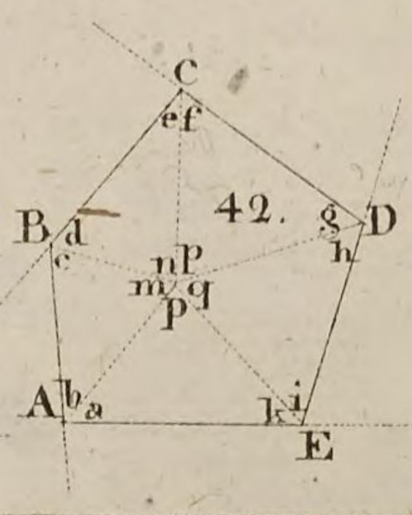

37.
n
m
A
C
r
q
B
P
D

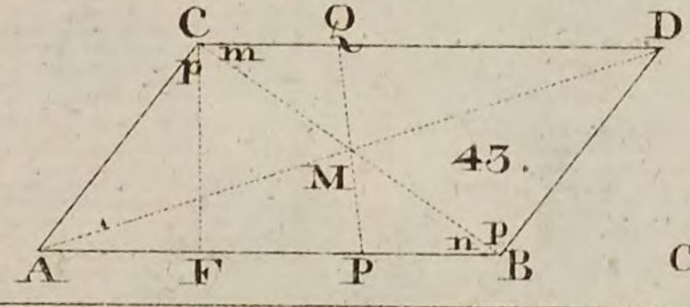

38.
m
n
A
C
r
p
q
B

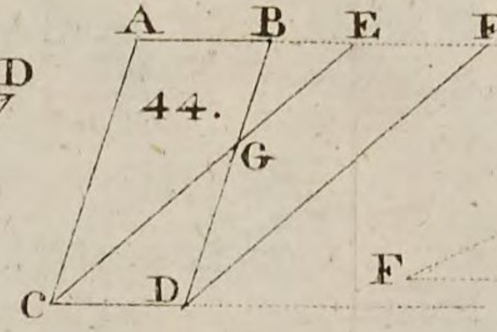

A
c
b
B
C
39.

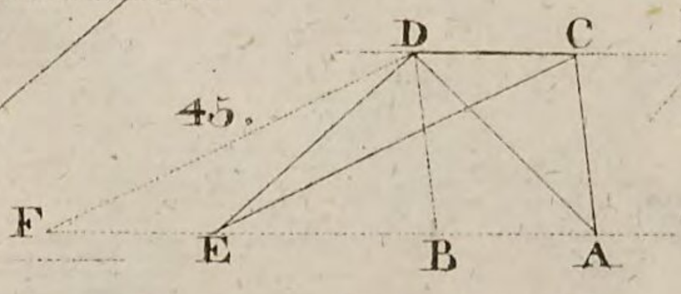

B
c
a
d
40.
D
b
A
C
nm


b
B
p
m
41.
q
n
c
a
c
a
C
A


C
ef
B
d
42.
g
D
c
nP
h
m
q
P
A
b
a
k
i
E


C
Q
D
p
m
43.
M
n
p
A
F
P
B


A
B
E
F
44.
G
C
D


D
C
45.
F
E
B
A

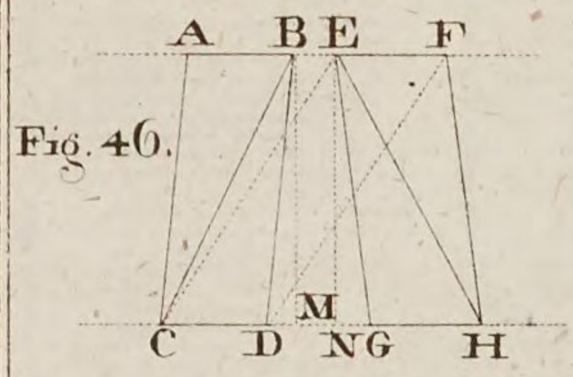
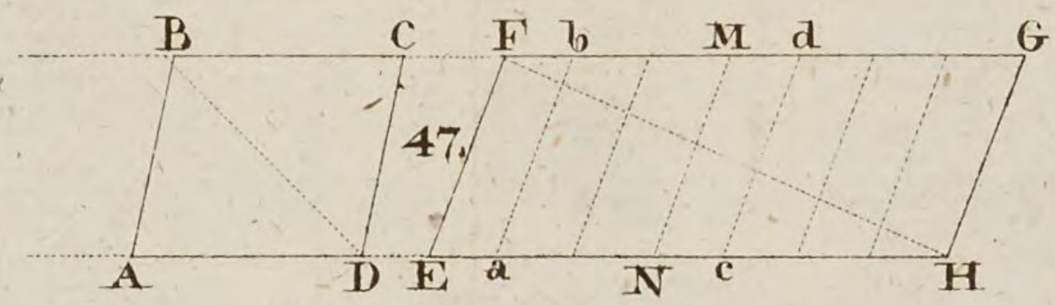
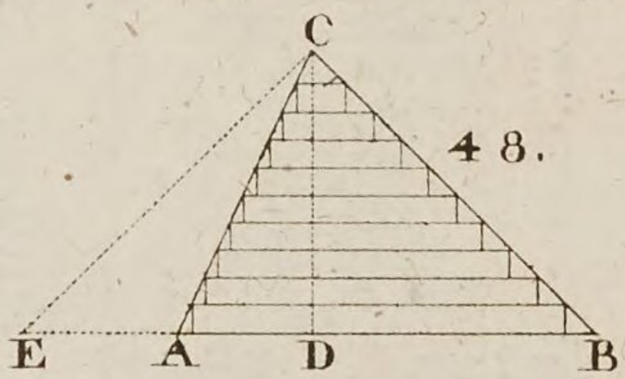
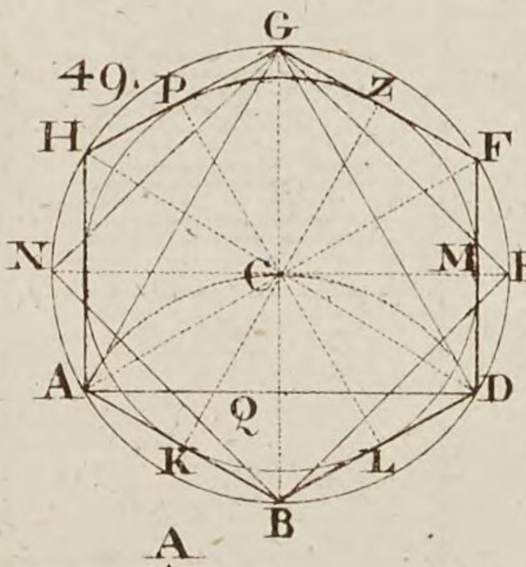
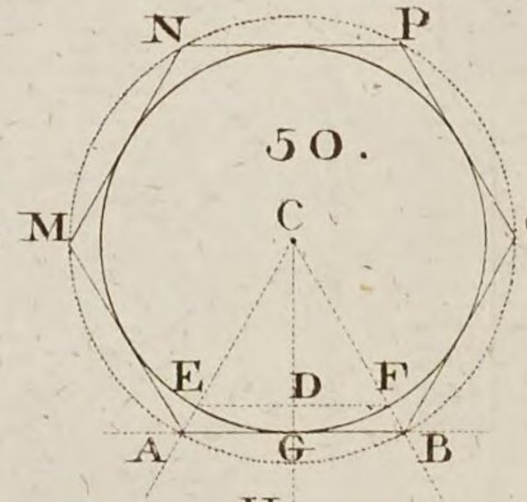


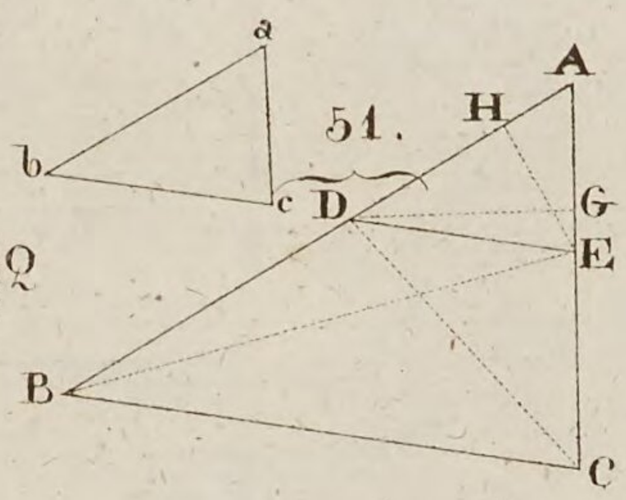
Fig. 46.
A B E F
C D M NG H

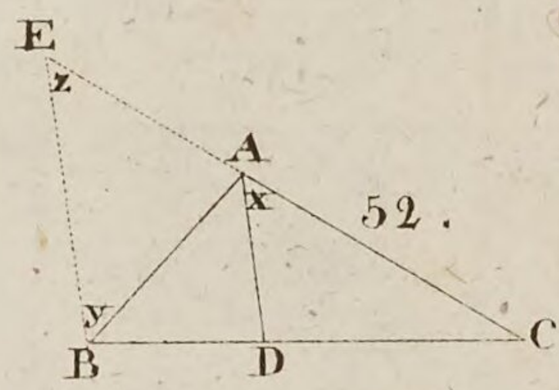

47.
B C F b M d G
A D E a N c H

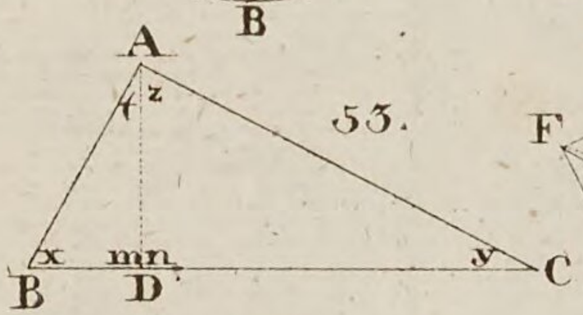

48.
C
E A D B

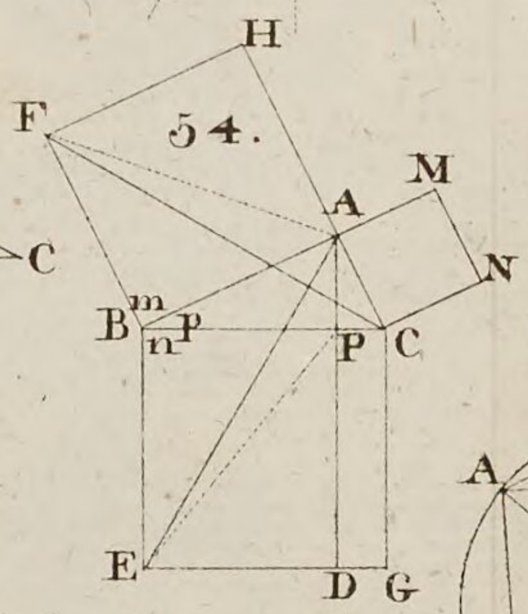

49.
G
H P Z F
N C M E
A Q D
K L
B

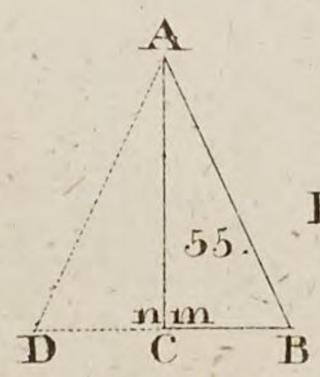

50.
N P
M C Q
E D F
A G B

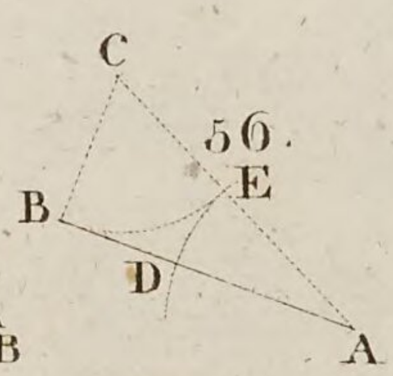

51.
a
b c
A
H
D G
E
B C

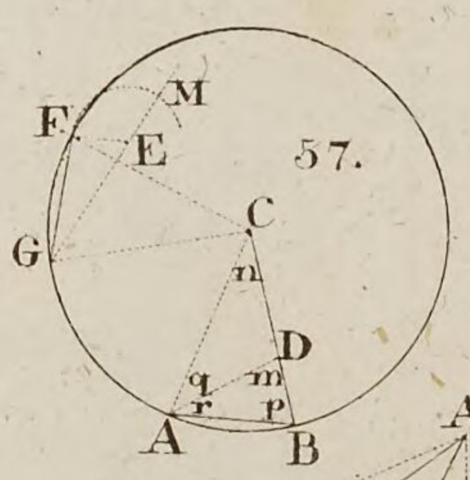

52.
E z
A x
y
B D C

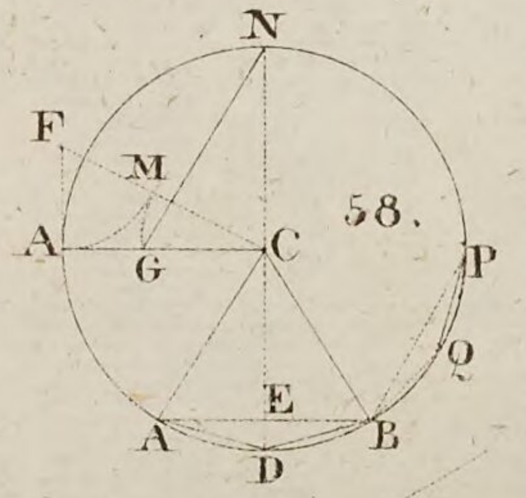

53.
A
t z
x m n y
B D C

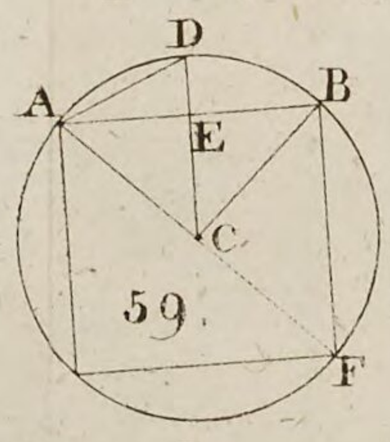

54.
H
F
M
A
N
m
B P
n
P C
E
D G

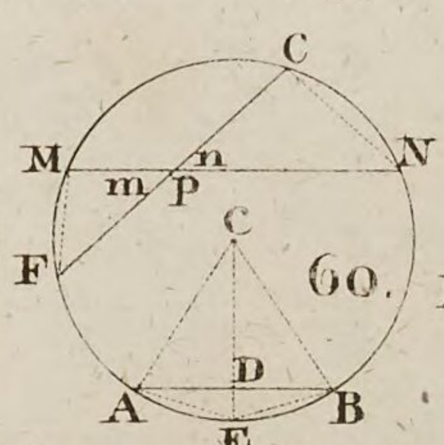

55.
A
n m
D C B

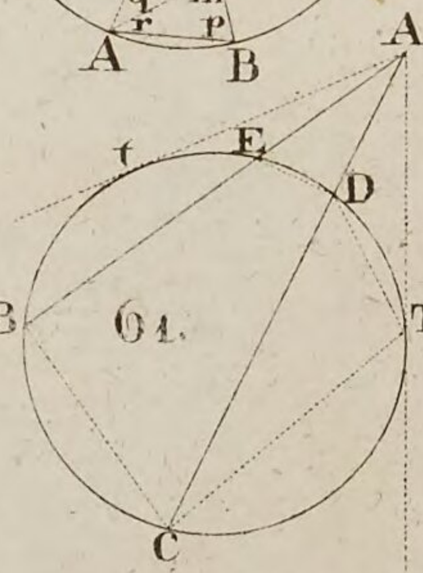

56.
C
B E
D
A

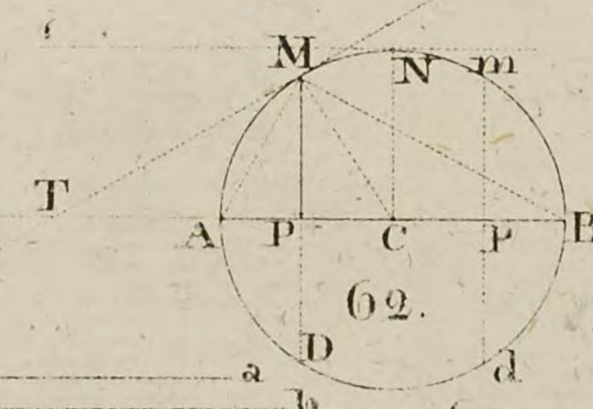

57.
F M
E
C
G
n
D
q m
r p
A B

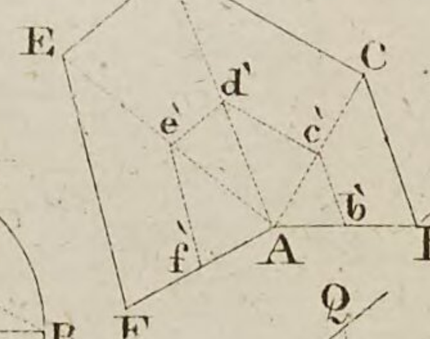

58.
N
F
M
A C P
G
Q
E
A D B

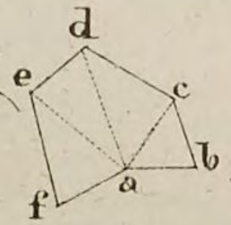

59.
D
A B
E
C
F

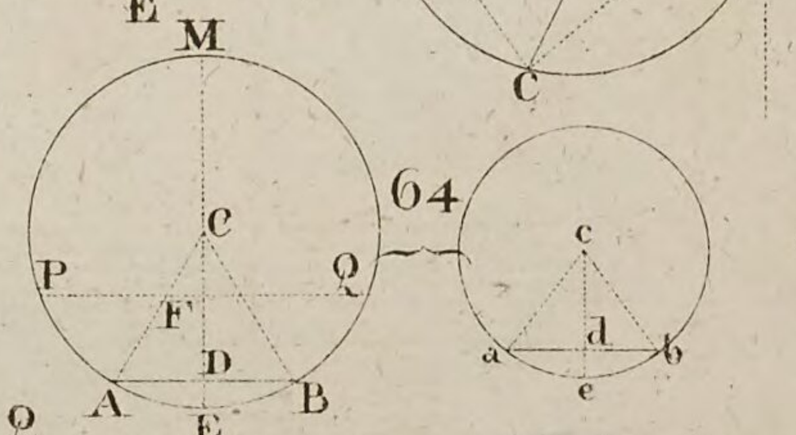

60.
C
M n N
m P
F
c
A D B
E


61.
A
t E D
B T
C


62.
M N m
T
A P C P B
D d
a
b
c
x


63.
D
E
C
d' e' c'
b'
f'
A B
F


d
e c
b
f a


64
M
C
P Q
F
D
A E B
c
a d b
e

65.
Q
N
M P
G

66.
N Q
M P G
x
b
a

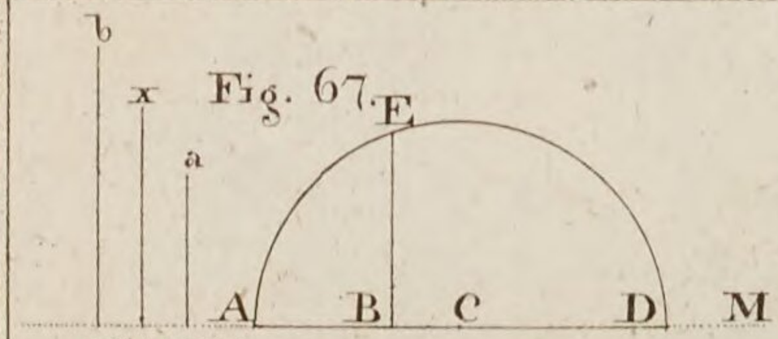
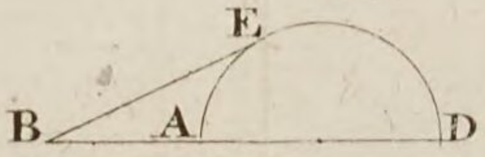
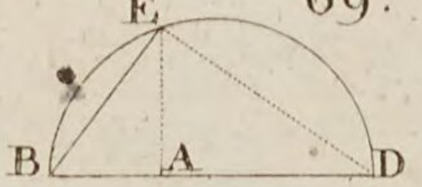


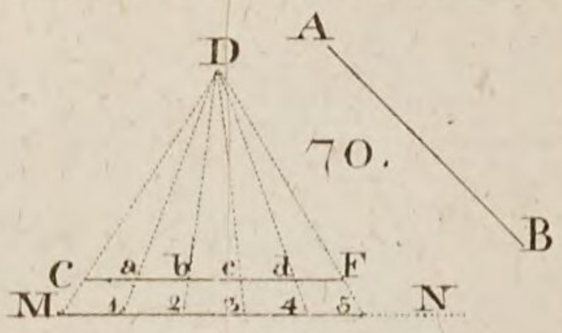
Fig. 67.



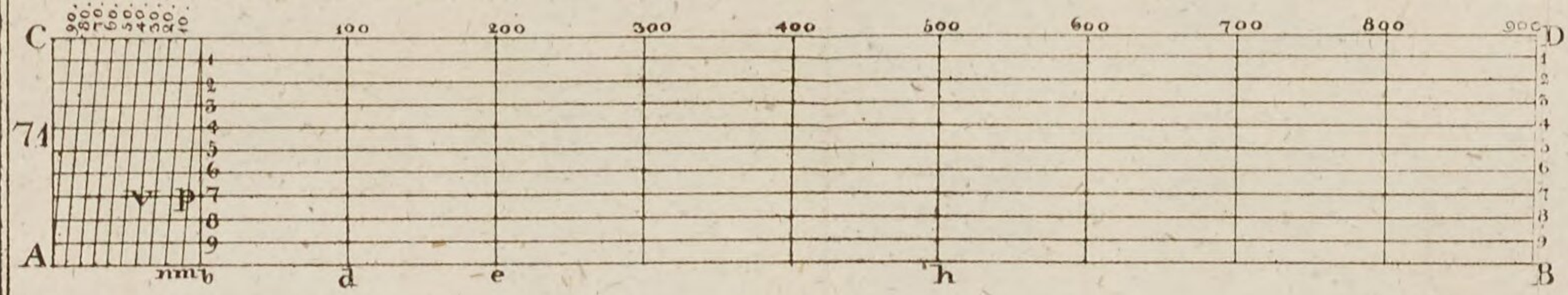
68.



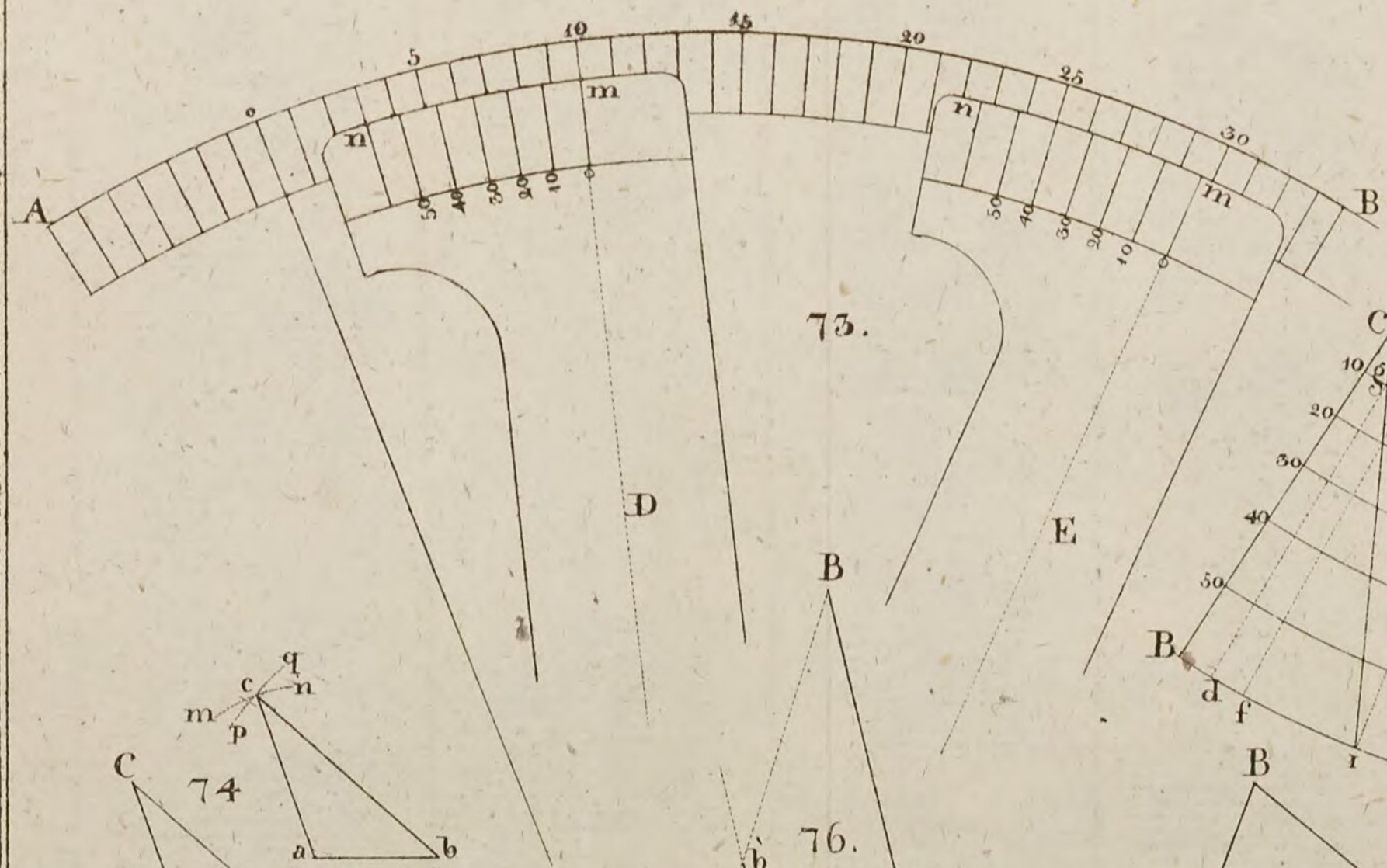
69.



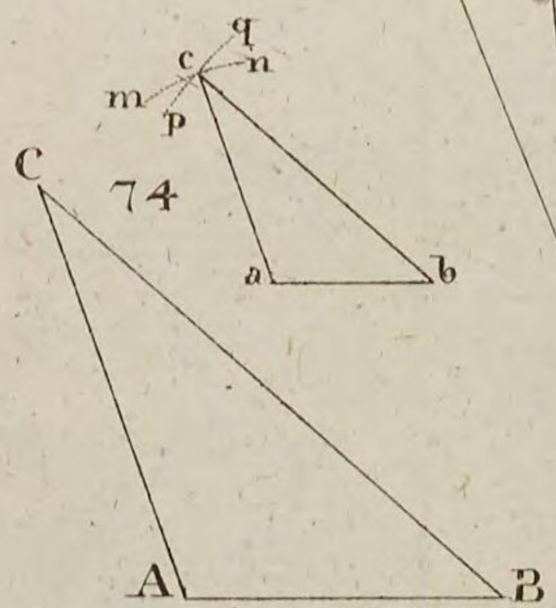
70.



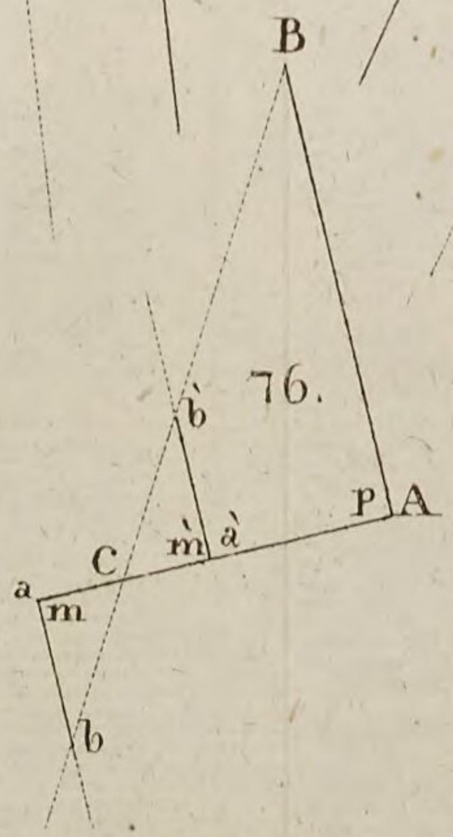
71

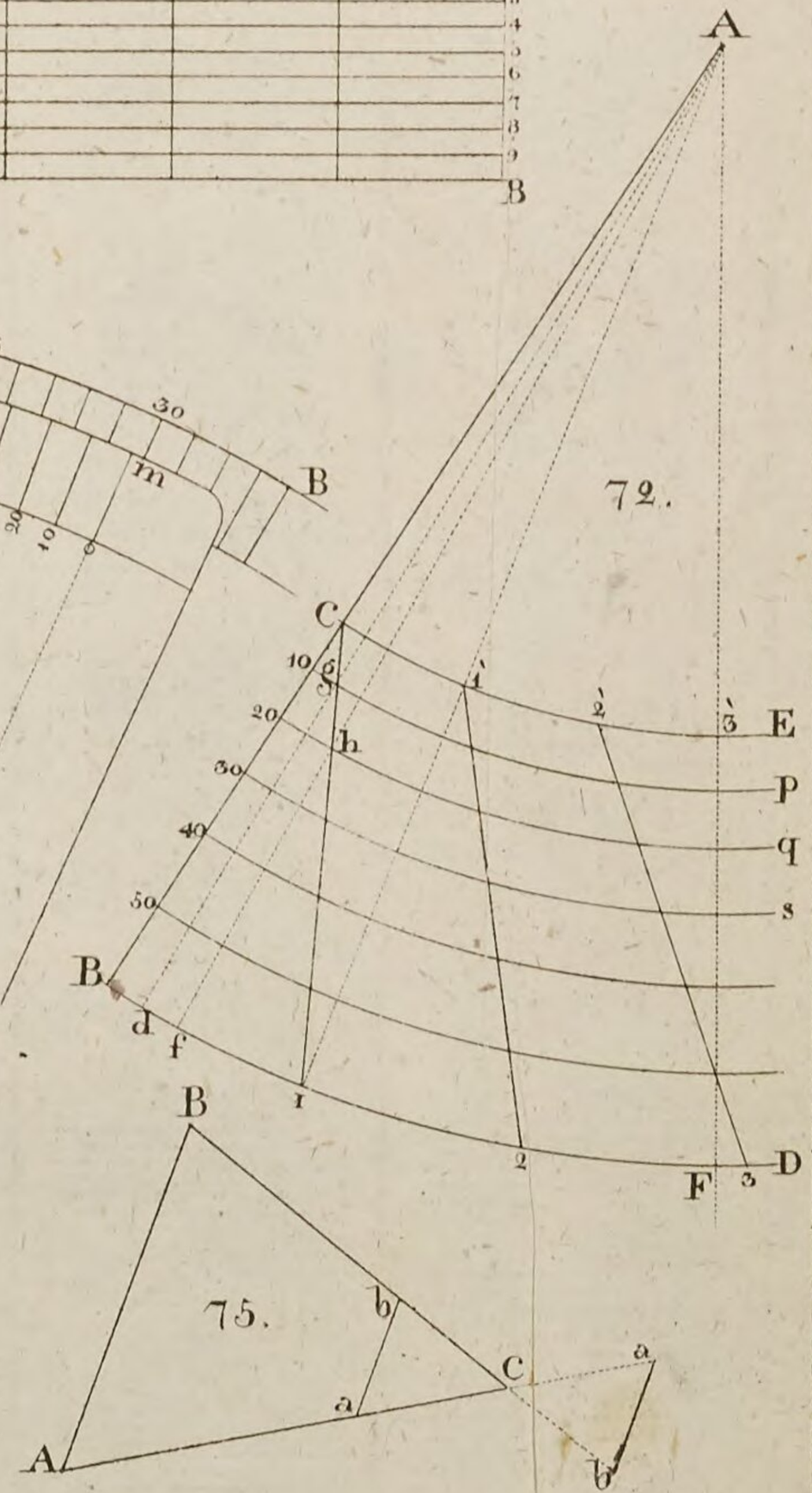


73.



74





72.

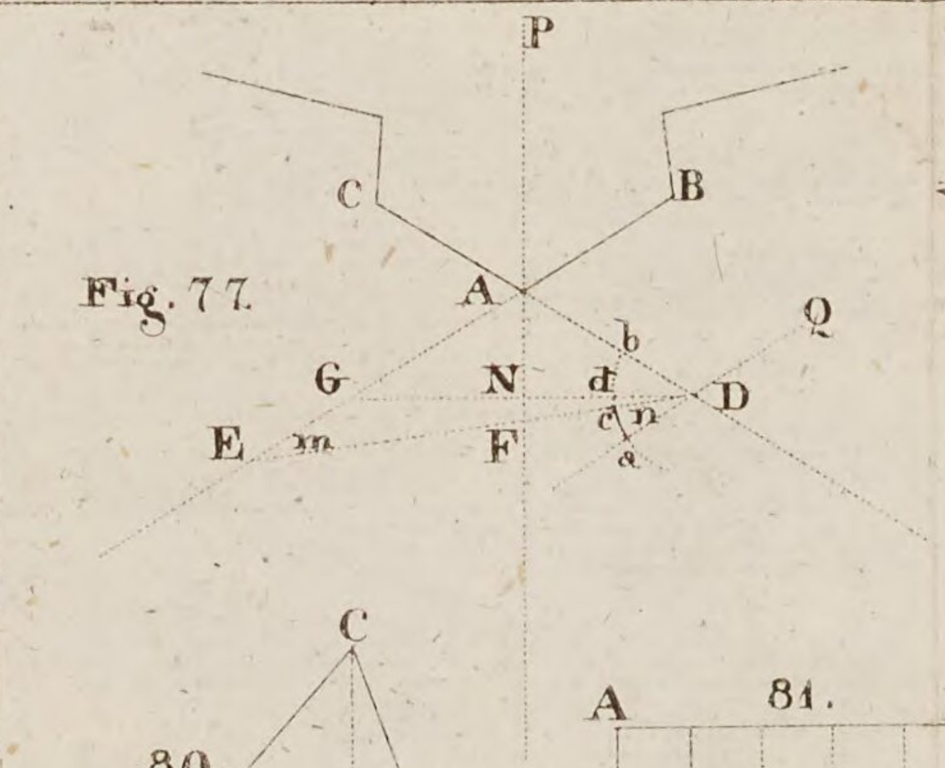
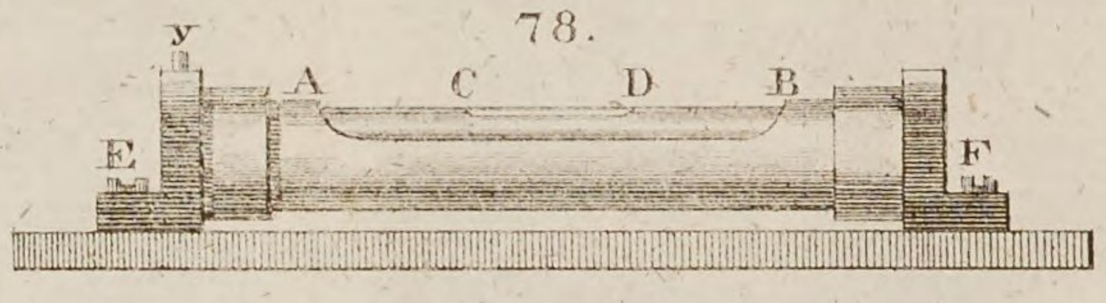
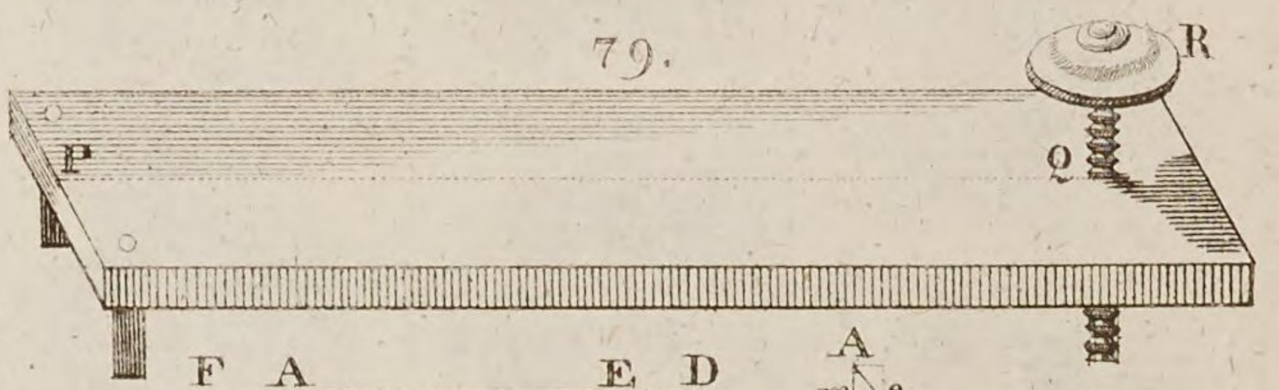


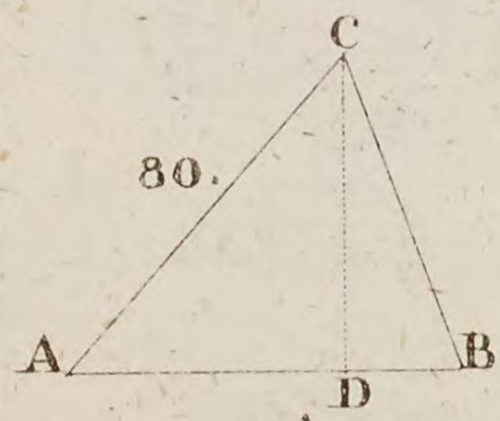
Fig. 77.



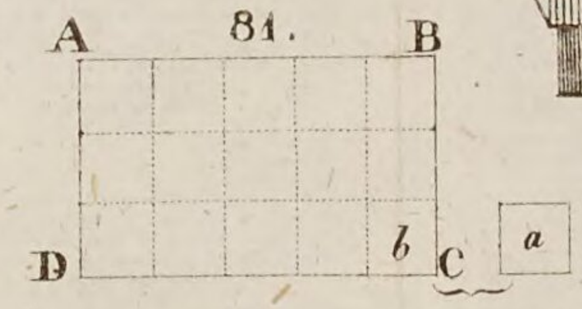
78.



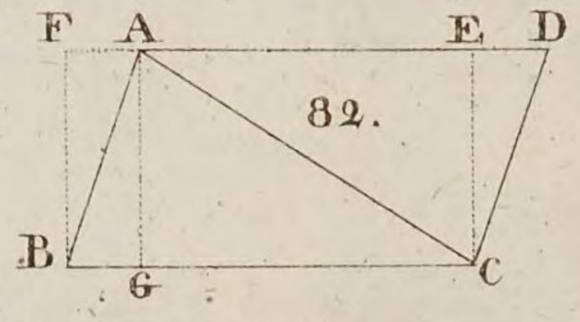
79.



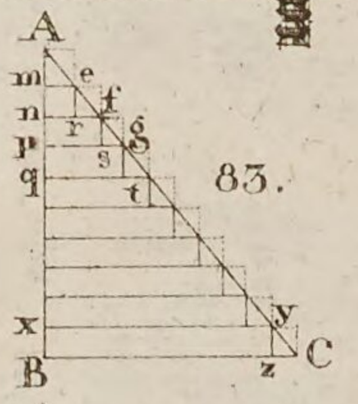
80.



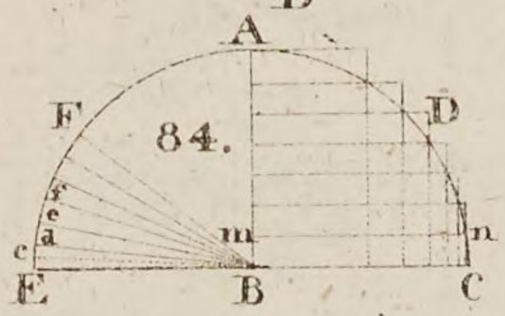
81.



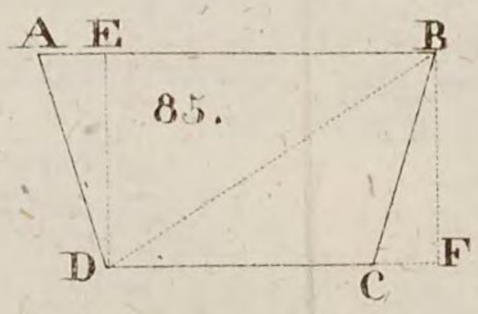
82.



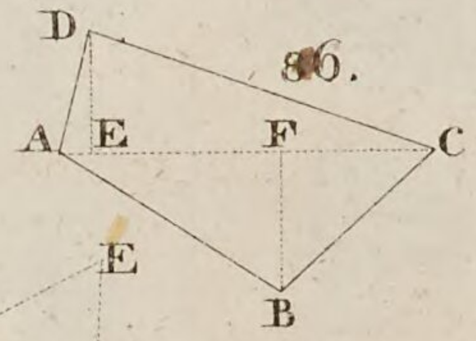
83.



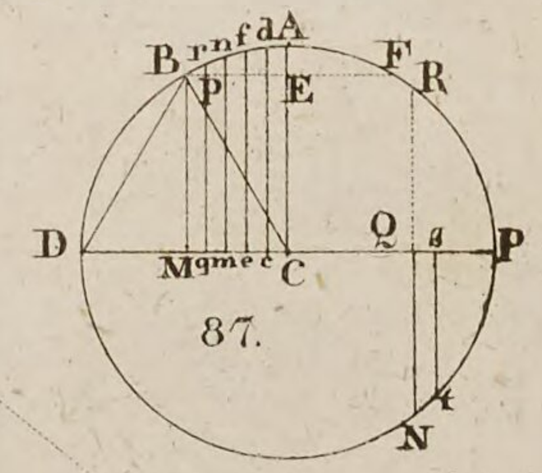
84.



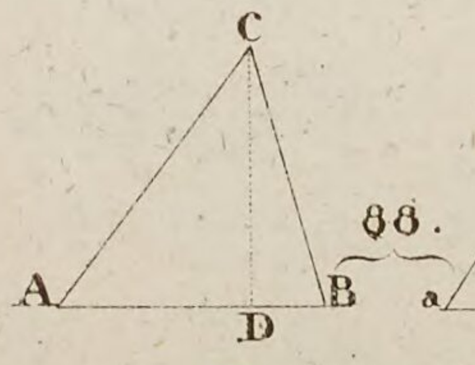
85.



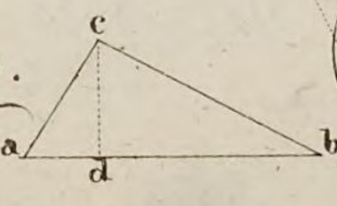
86.

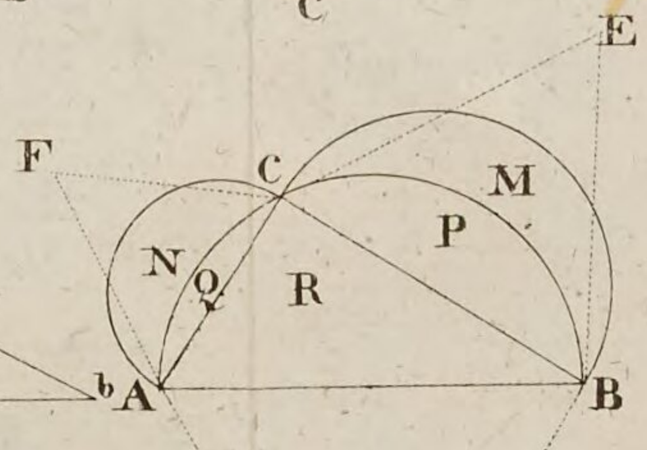


87.

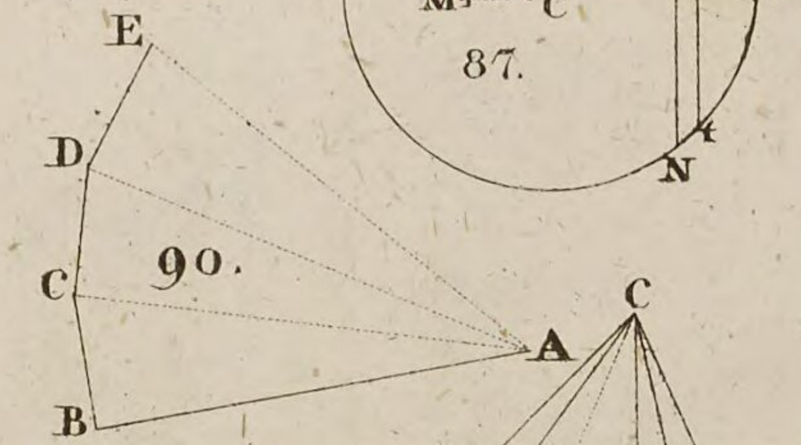


88.

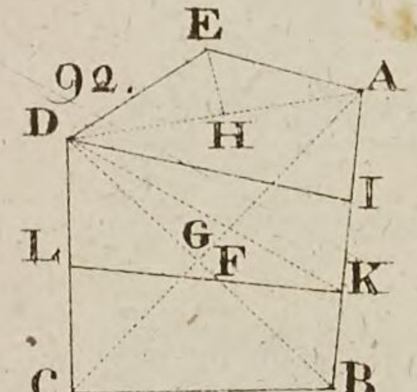




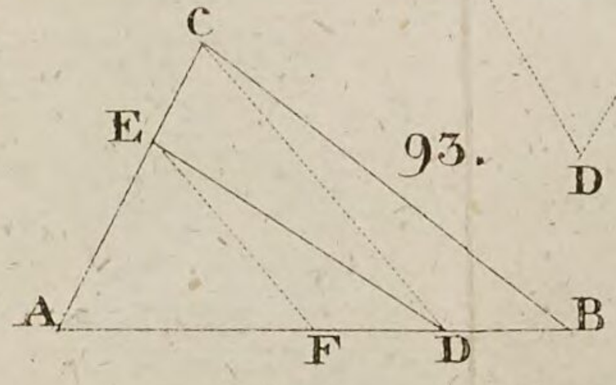
89.



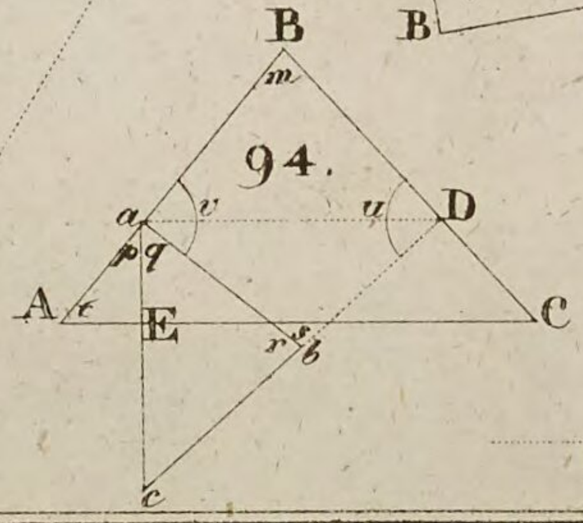
90.

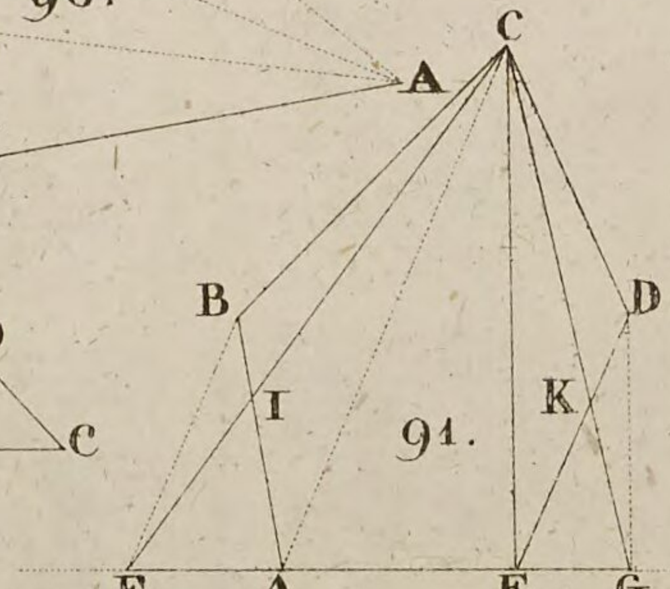


92.



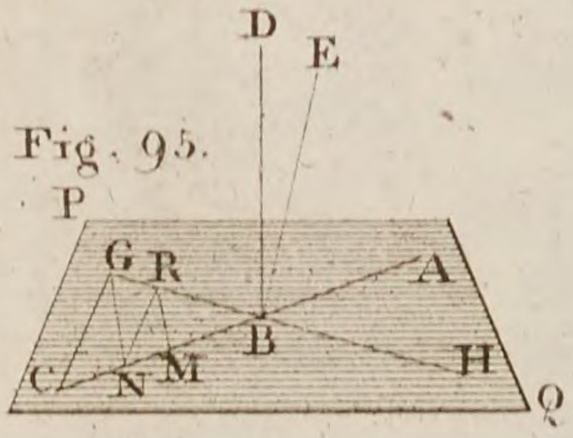
93.



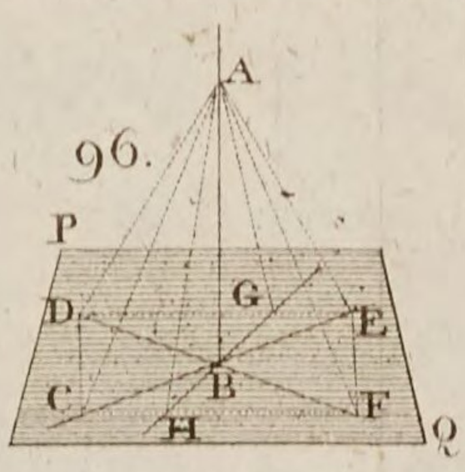


91.

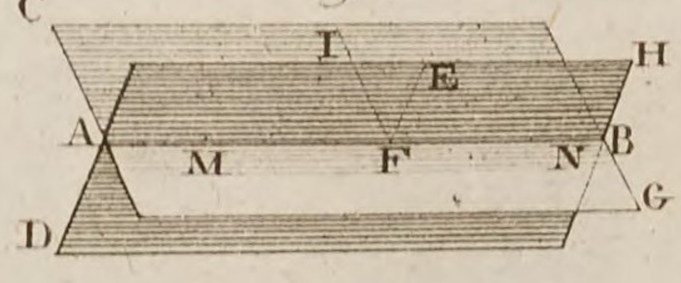
Fig. 95.



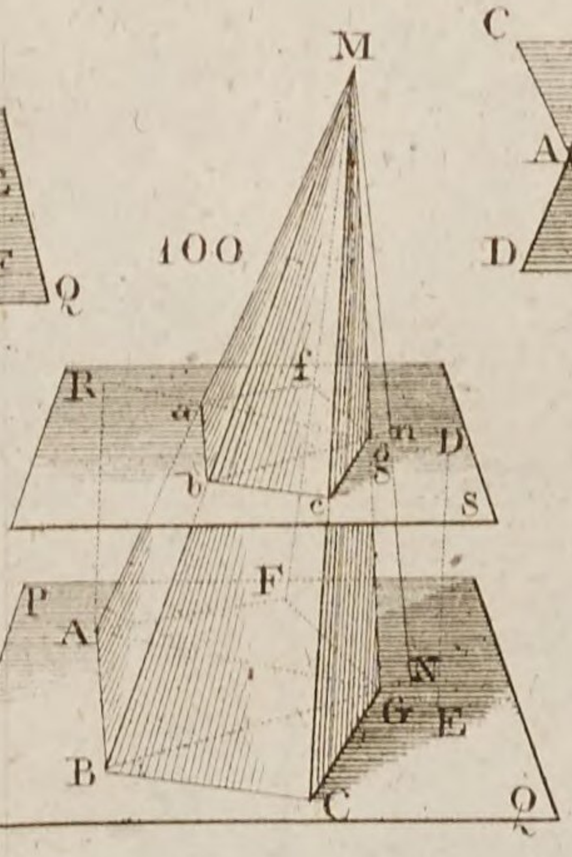
96.



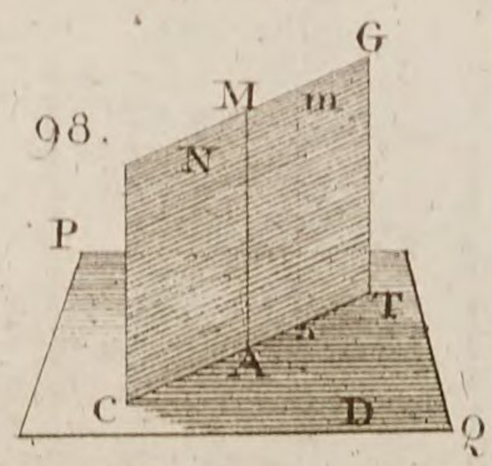
97.



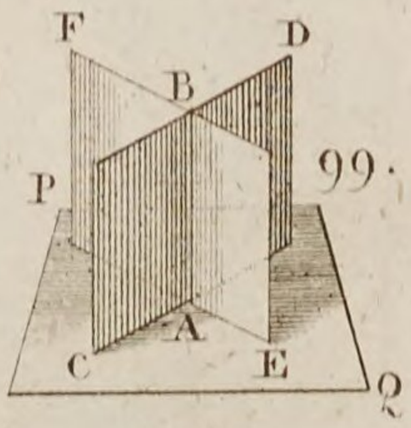
100



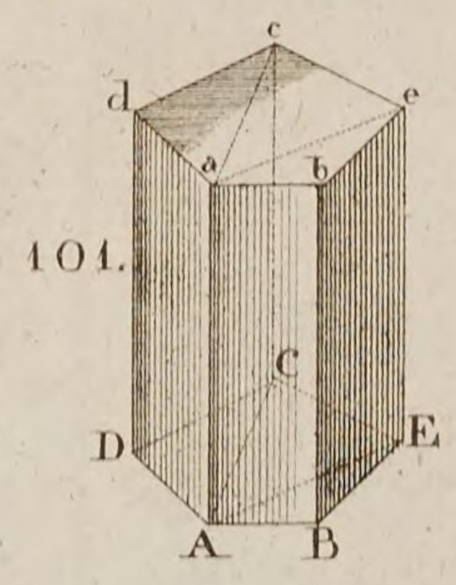
98.



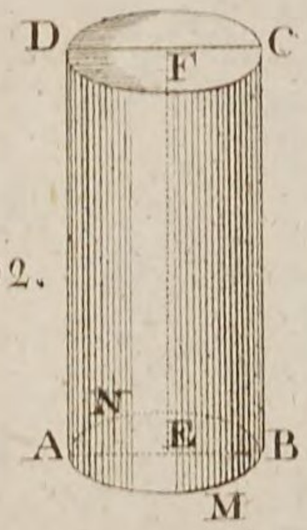
99.



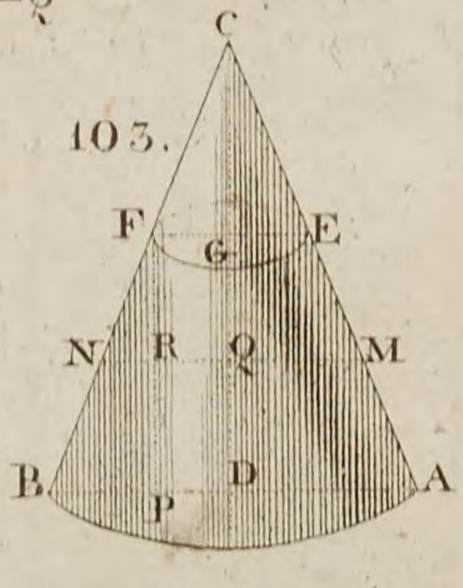
101.



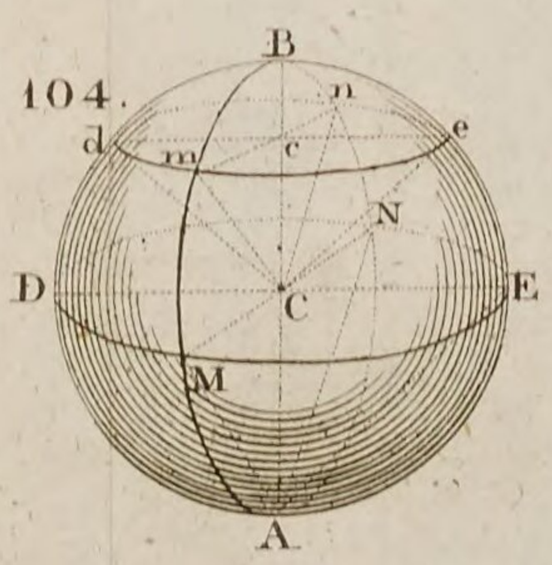
102.



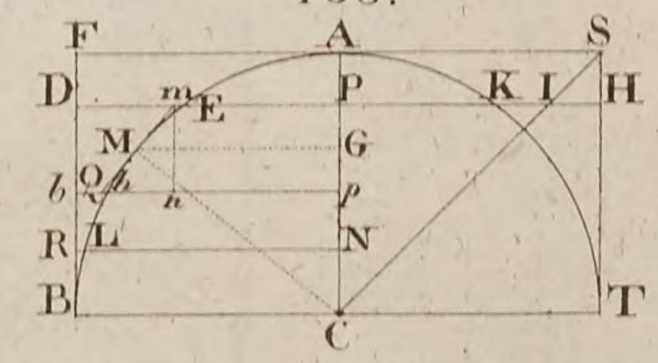
103.



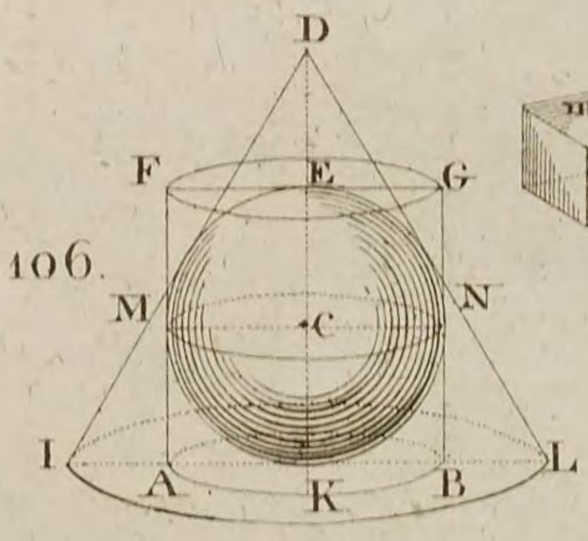
104.



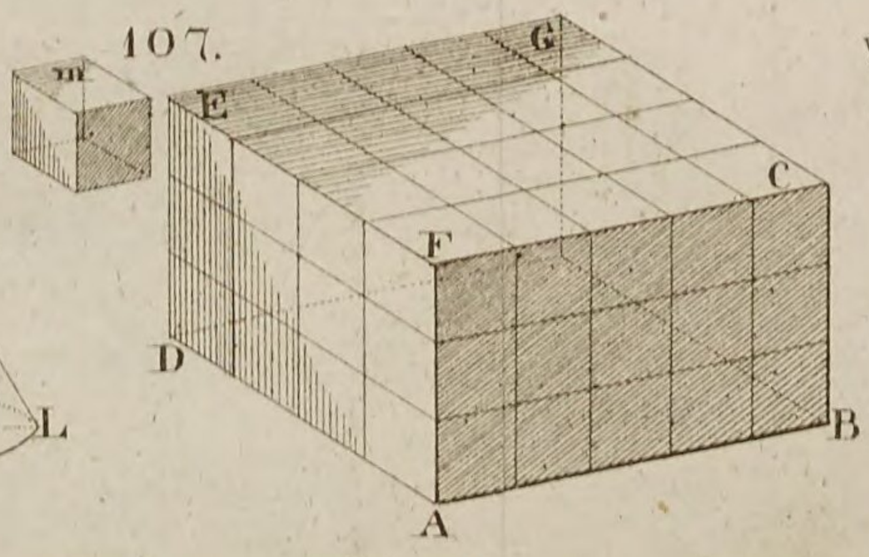
105.



106.



107.



108.

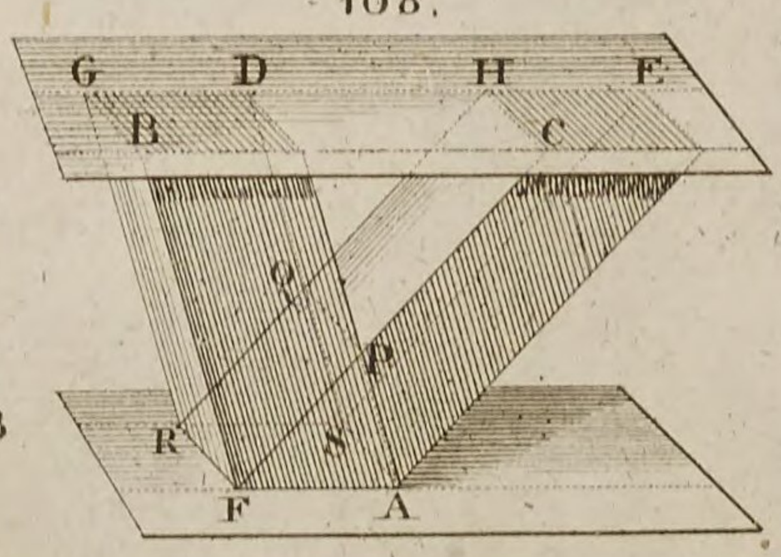
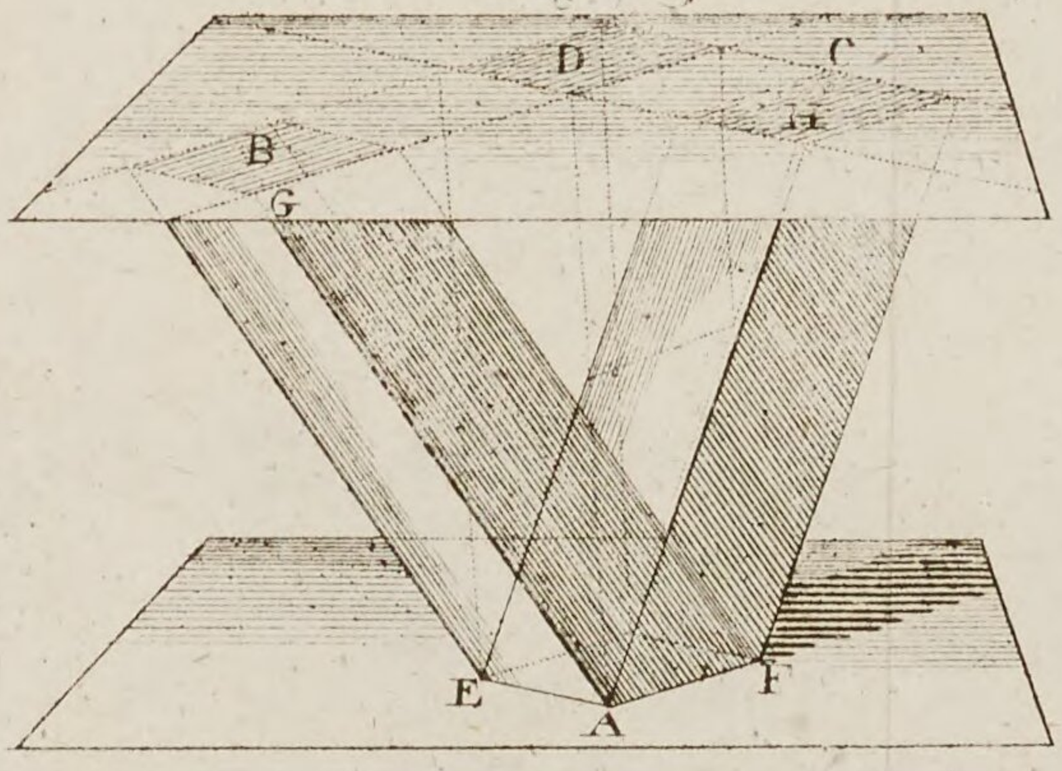
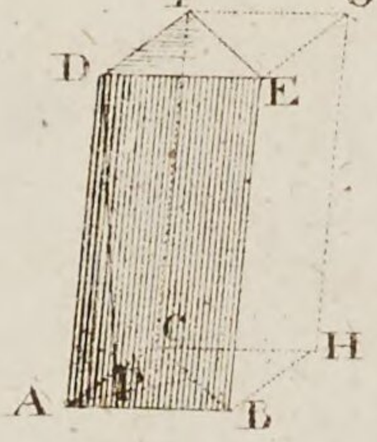


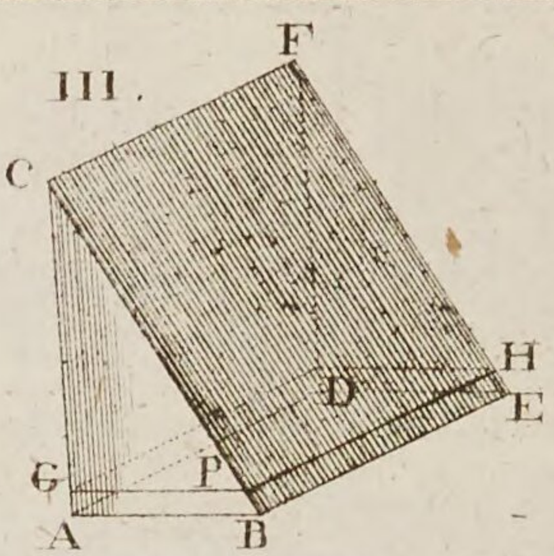
Fig: 109.



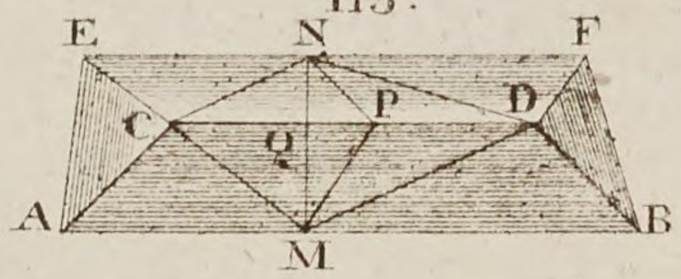
110.

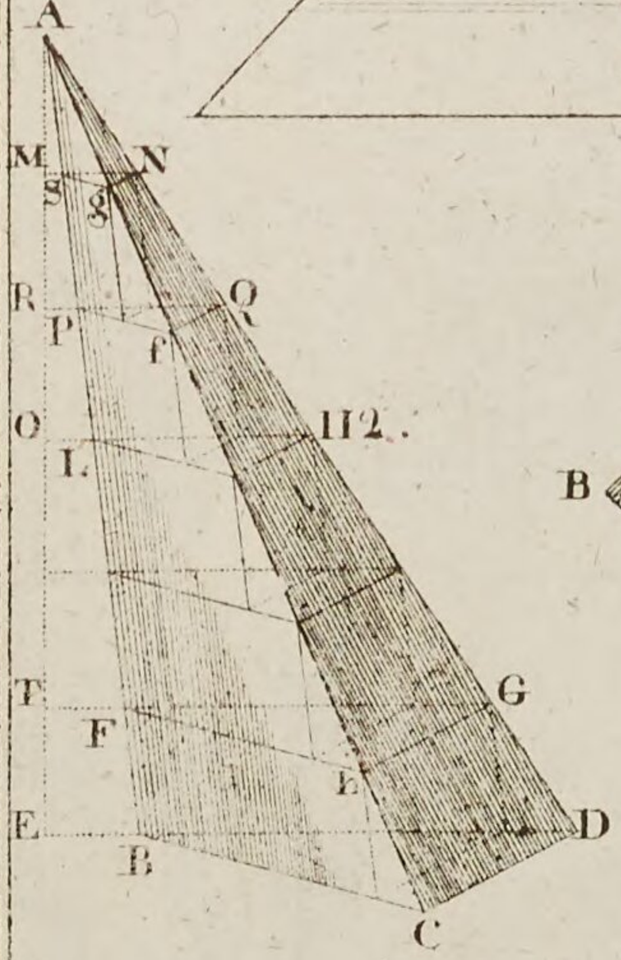


111.



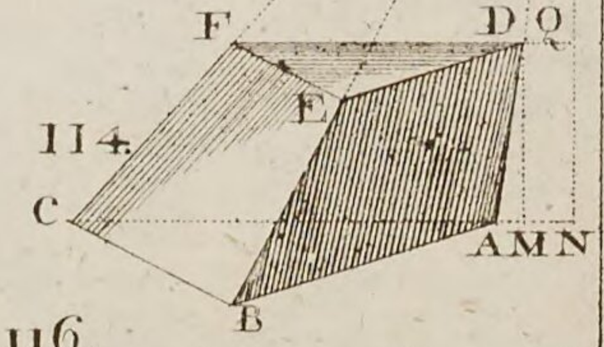
115.





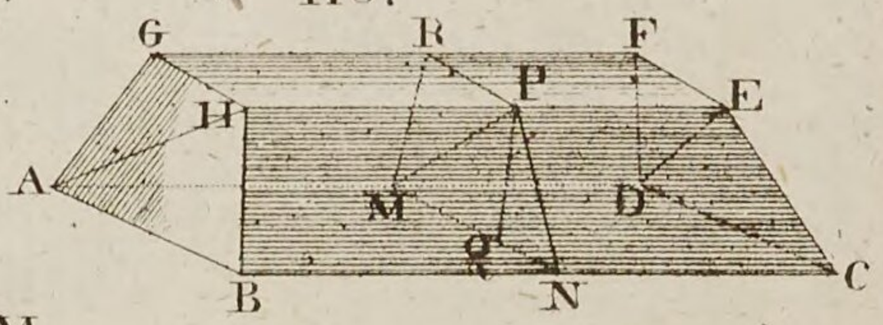
112.

113.

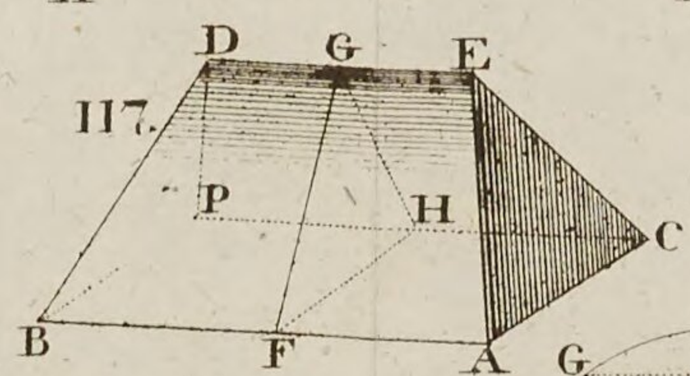


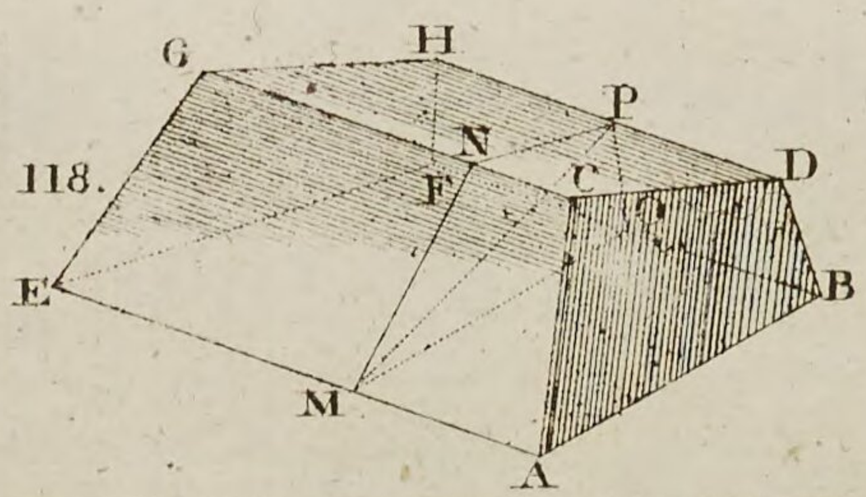
114.

116.

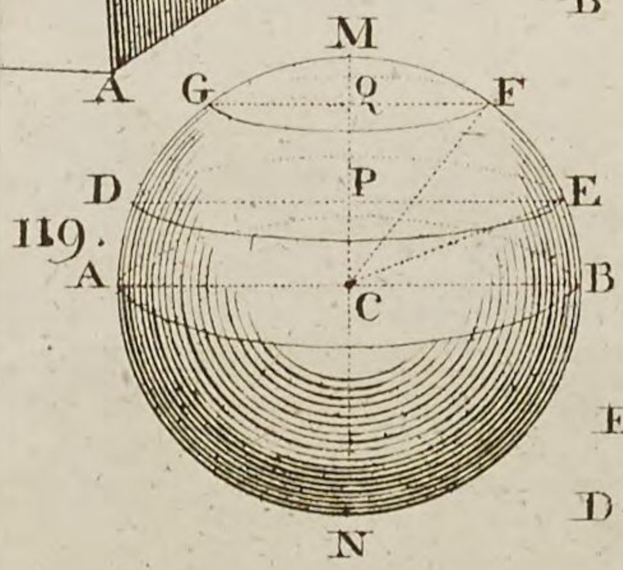


117.

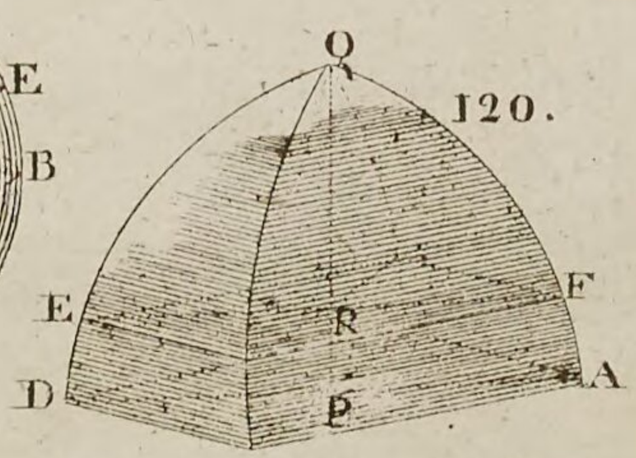




118.

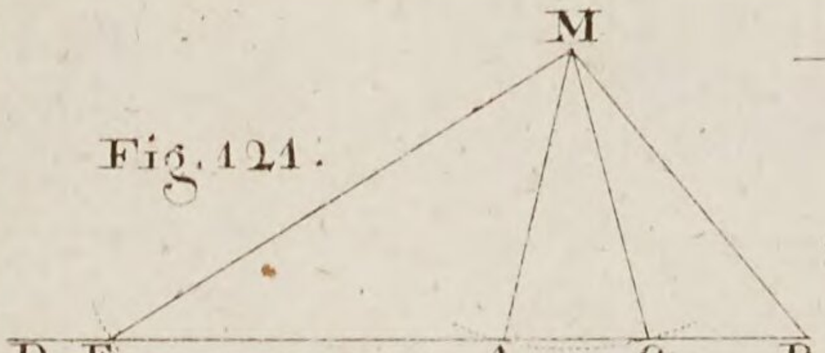


119.

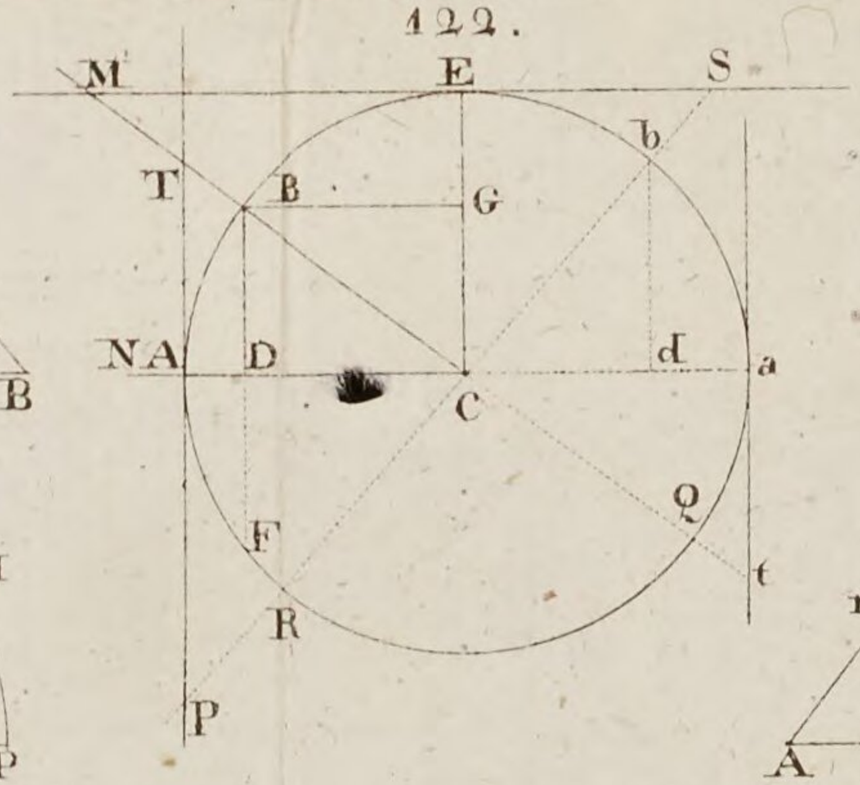


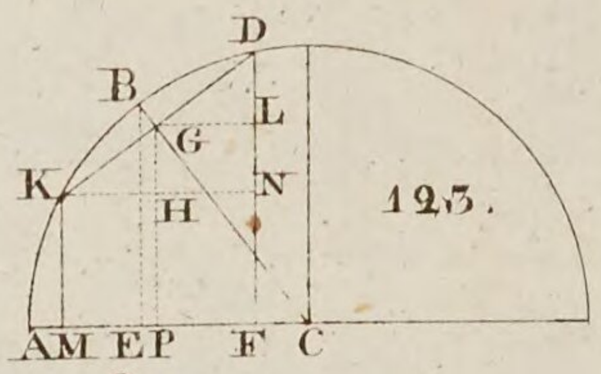
120.

Fig. 121.



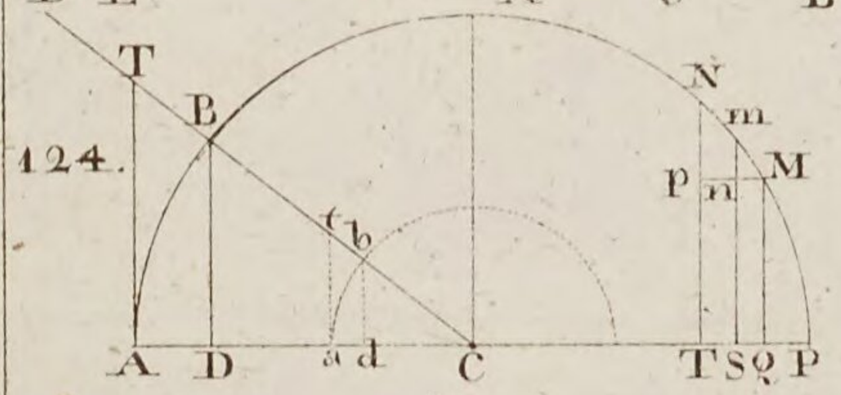
122.

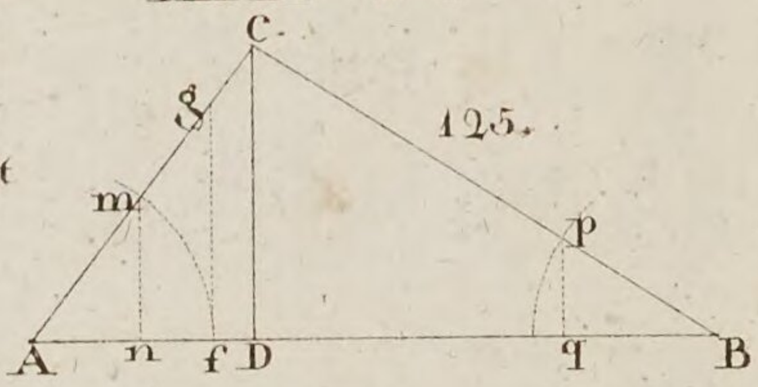




123.

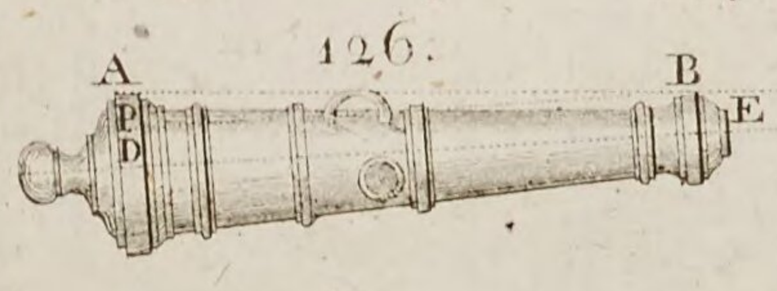
124.

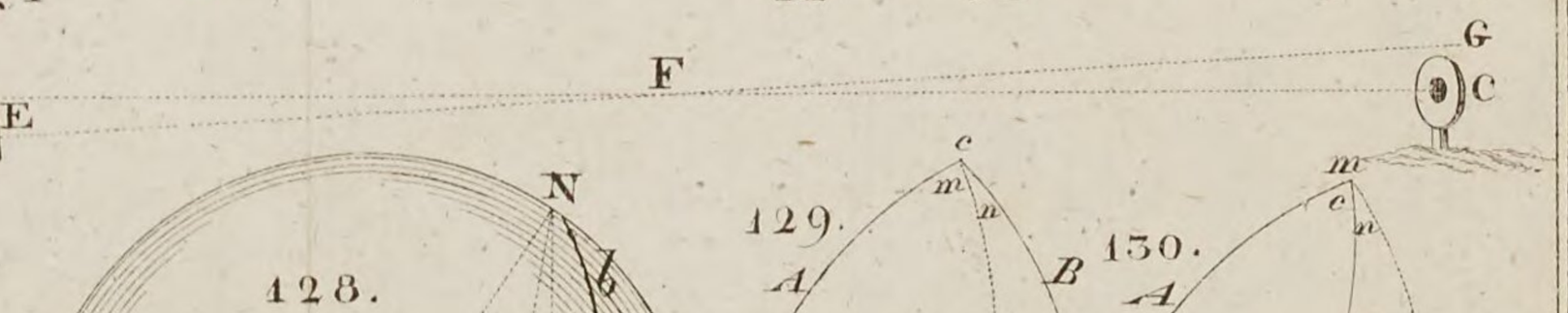




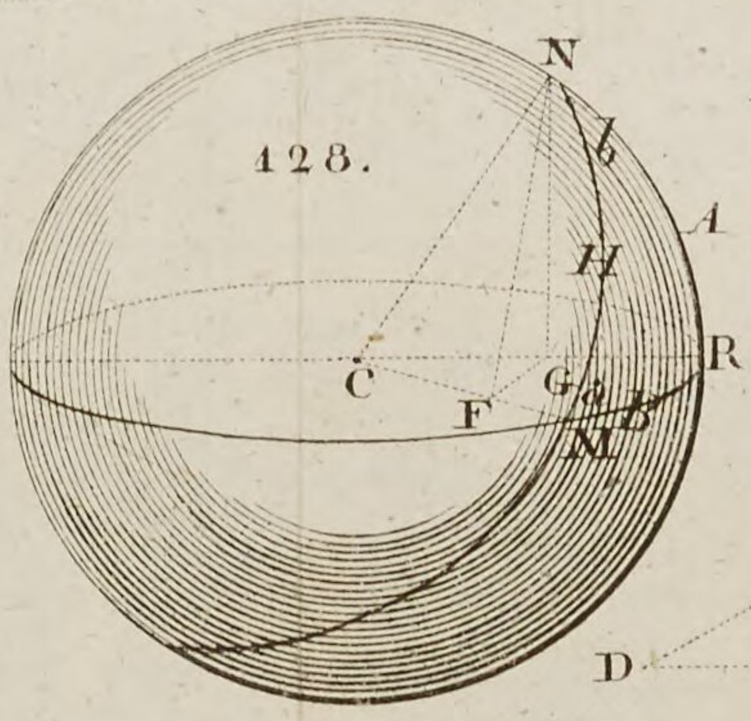
125.

126.

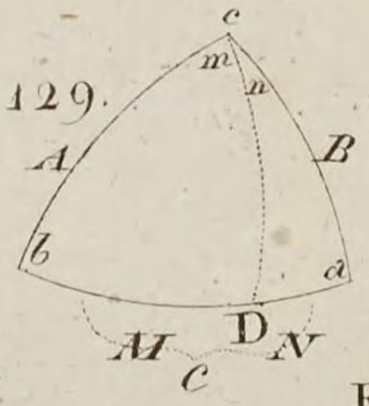




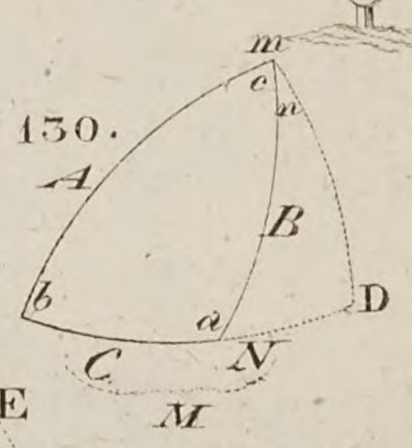
128.



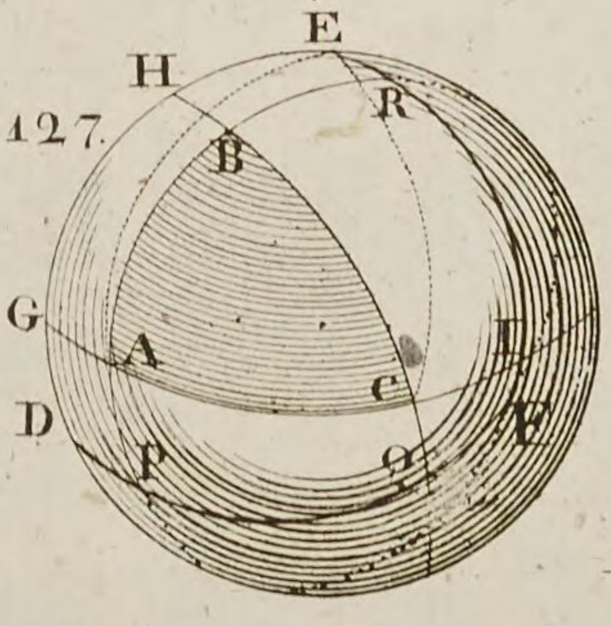
129.

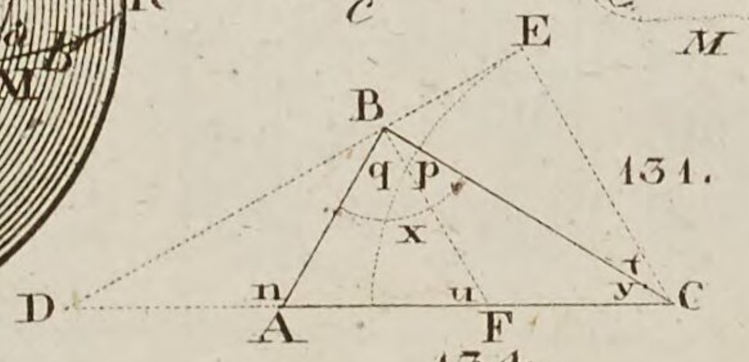


130.

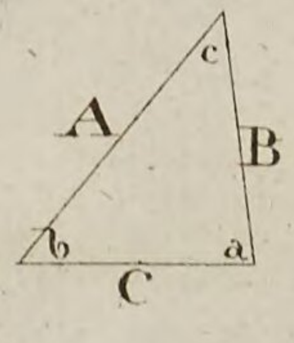


127.

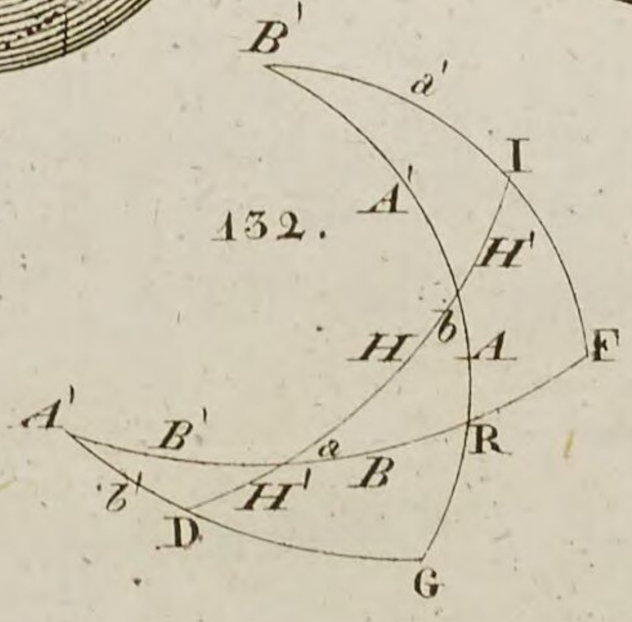




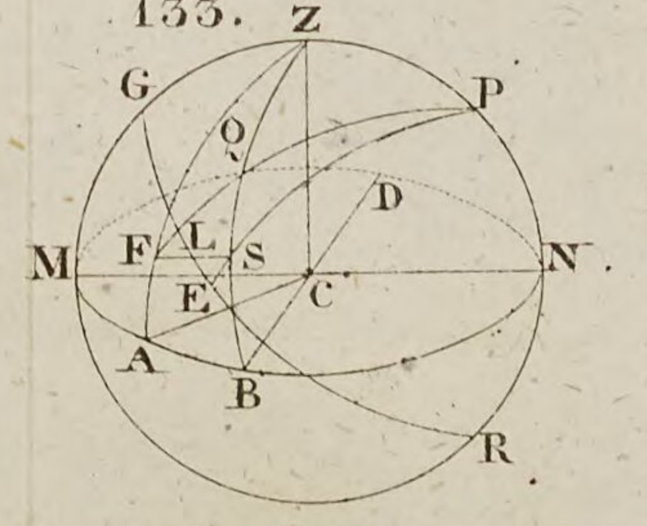
131.



132.



133.



134.

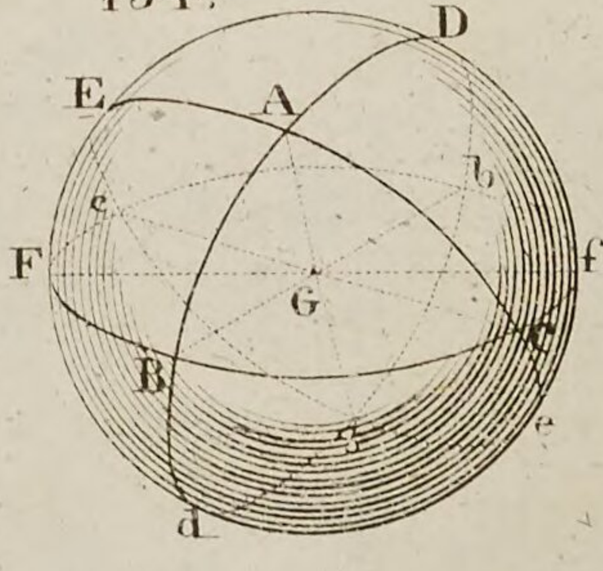
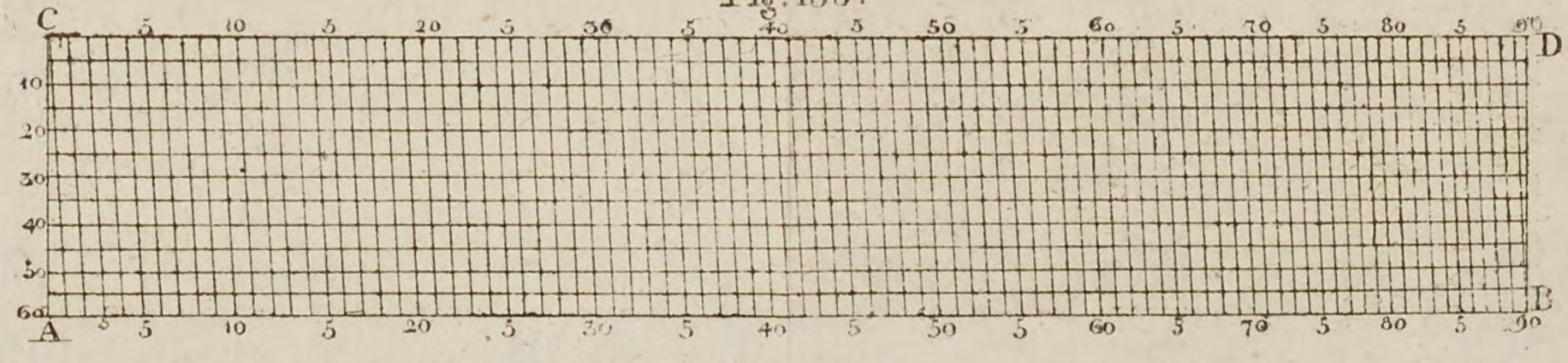
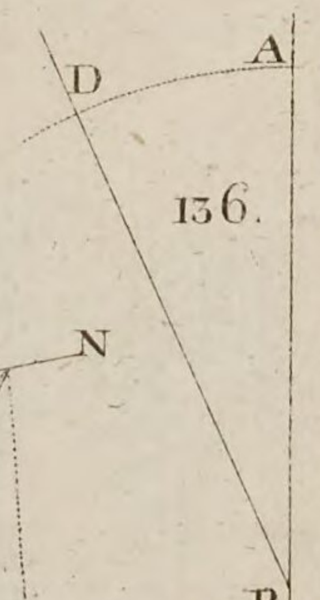
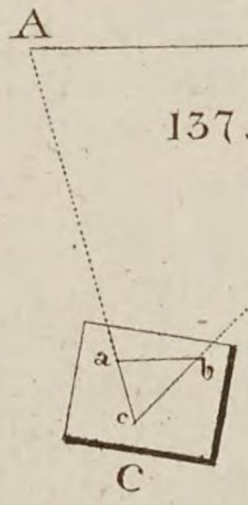
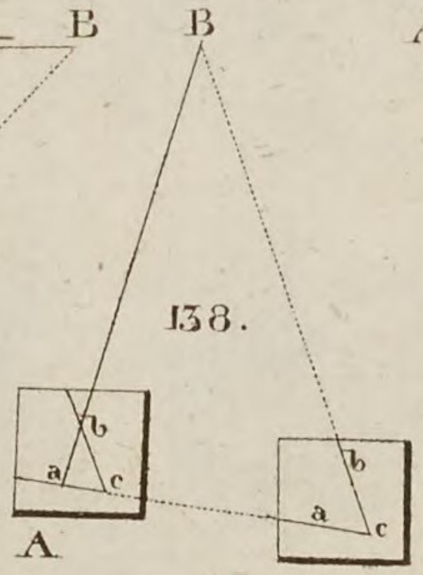


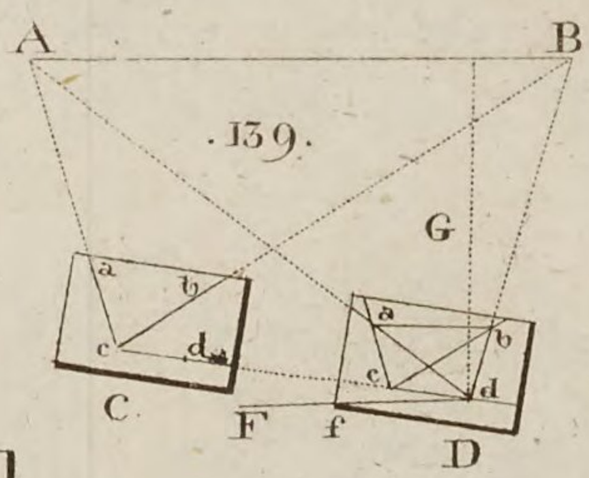
Fig. 135.

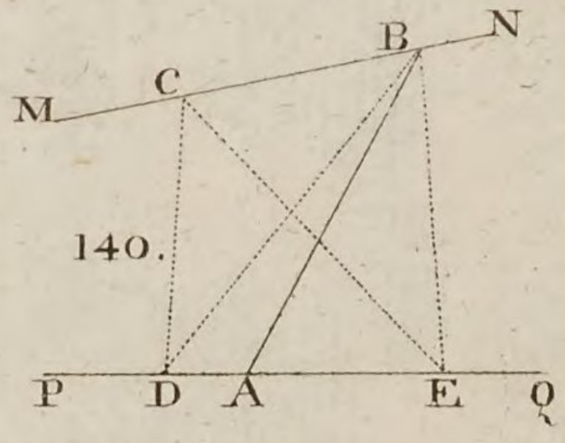

C
D
A
B
5 10 5 20 5 30 5 40 5 50 5 60 5 70 5 80 5 90
10
20
30
40
50
60

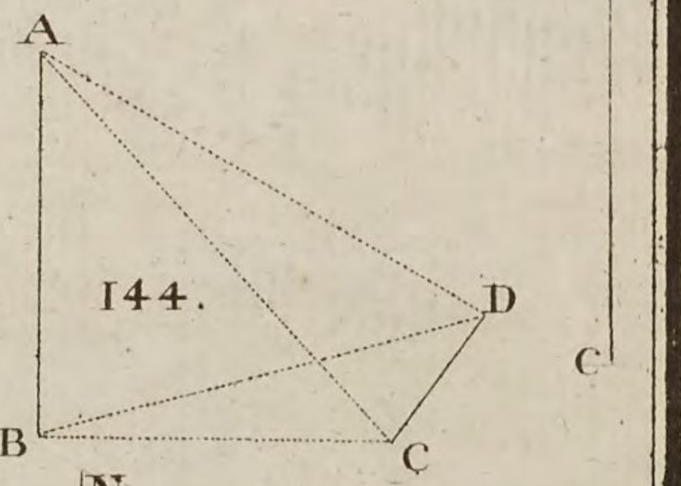

D
A
136.
B

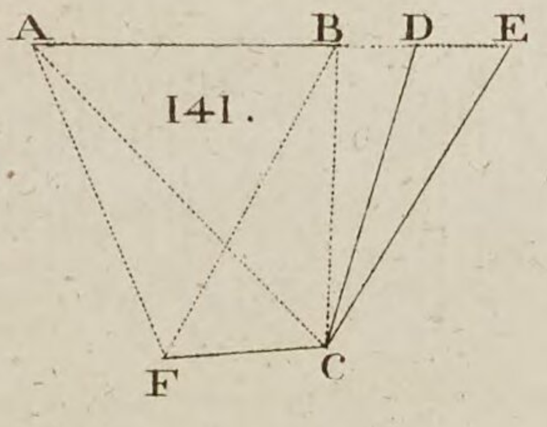

A
B
137.
a
b
c
C

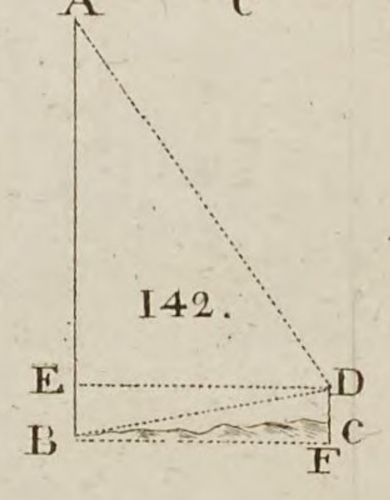

B
138.
b
a
c
A
b
a
c
A
C

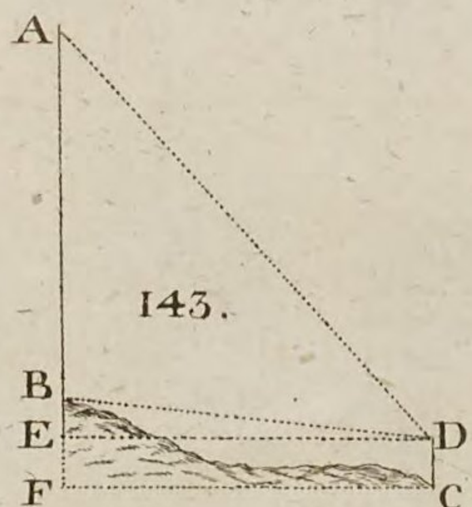

A
B
139.
G
a
b
c
d
C
F
f
D
a
b
c
d

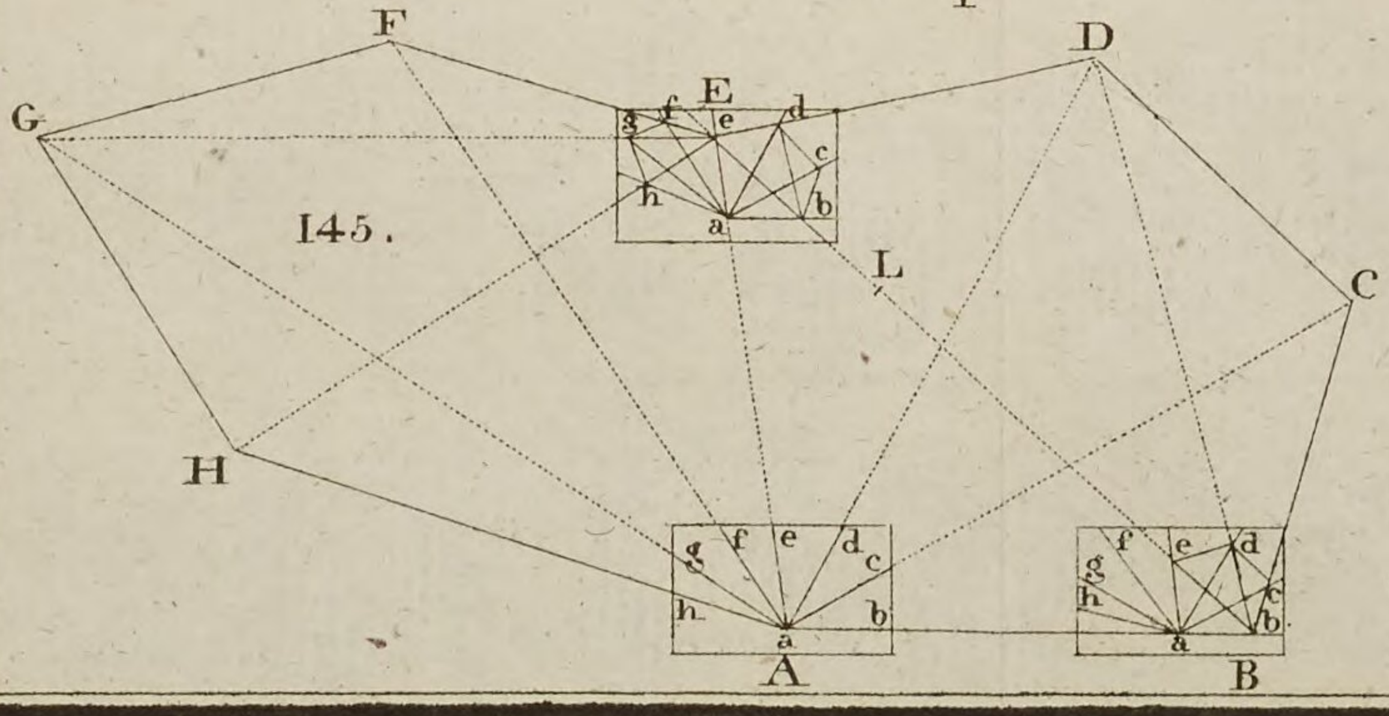

B
N
C
M
140.
P
D
A
E
Q


A
144.
D
C
B
C


A
B
D
E
141.
F
C


A
142.
E
D
B
C
F


A
143.
B
E
D
F
C


F
D
G
E
145.
H
L
C
A
B

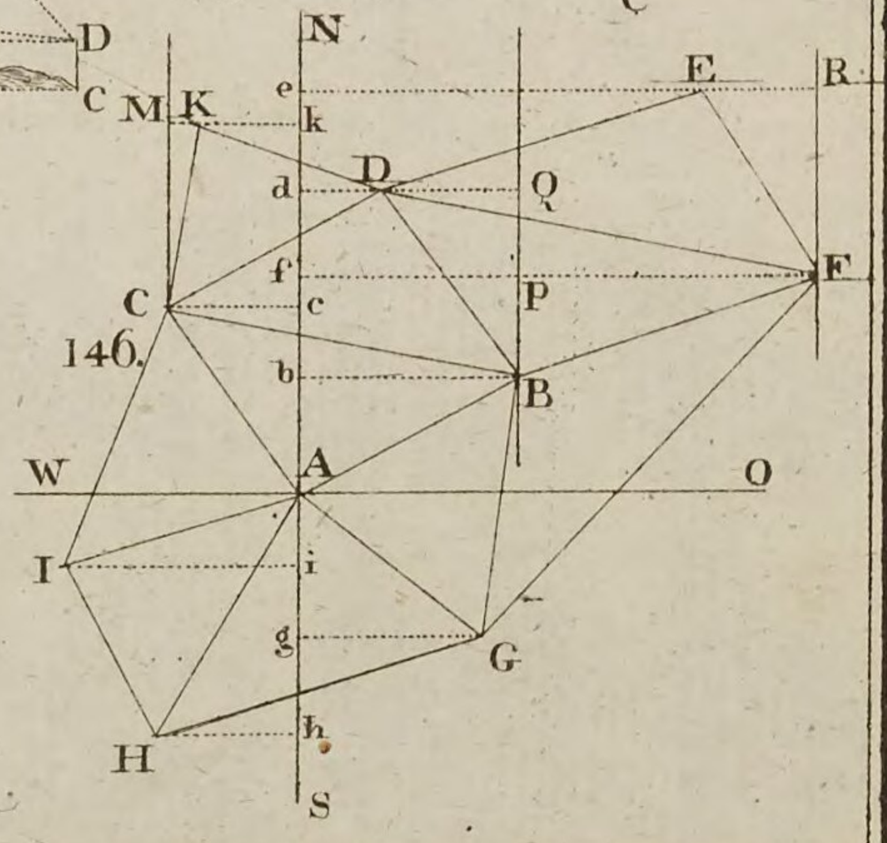
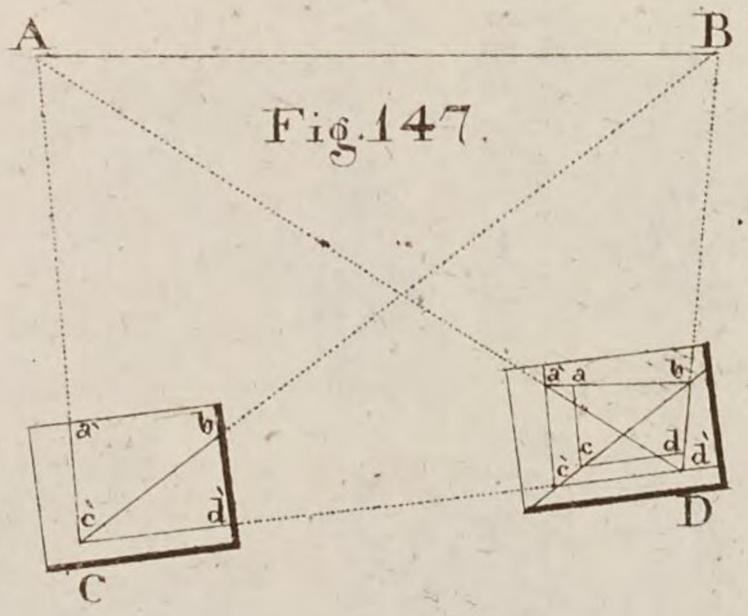
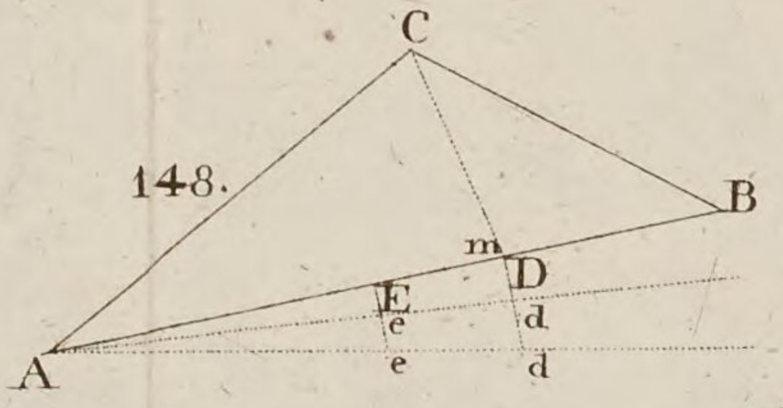

N
E
R
M
K
146.
Q
F
C
P
B
W
A
O
I
G
H
S

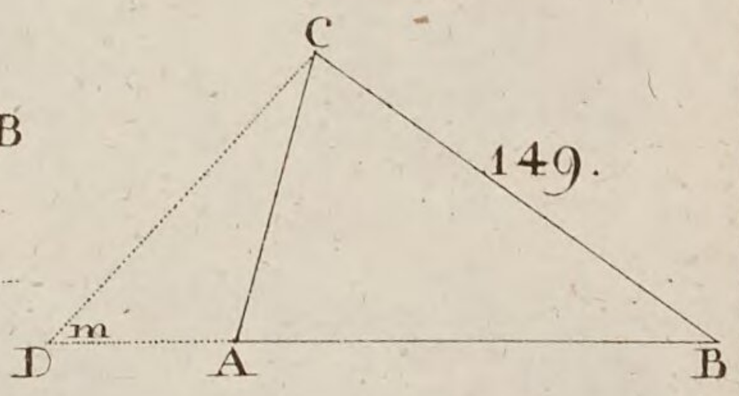
Fig. 147.



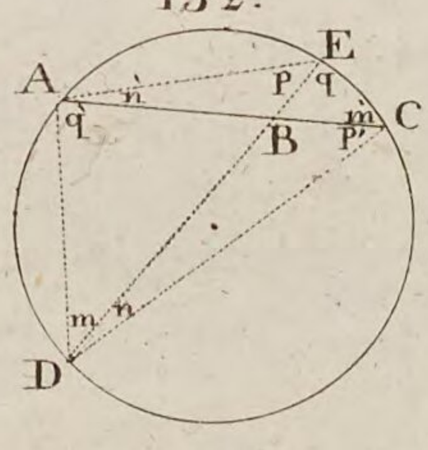
148.



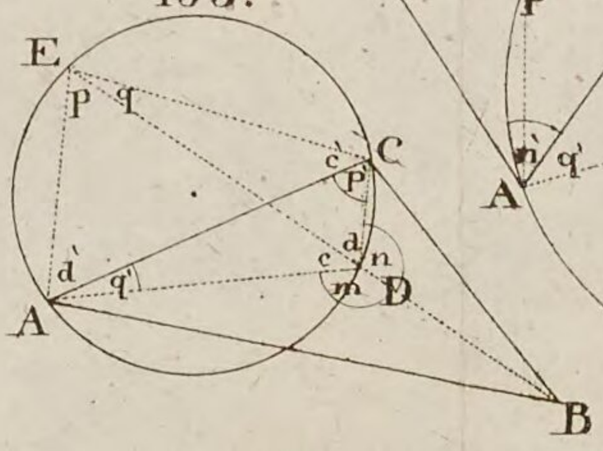
149.

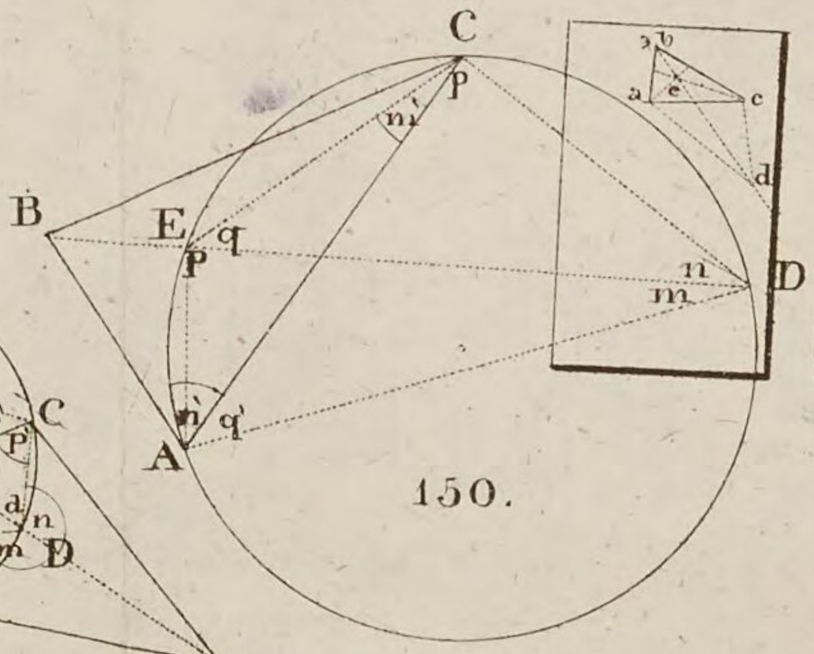


152.

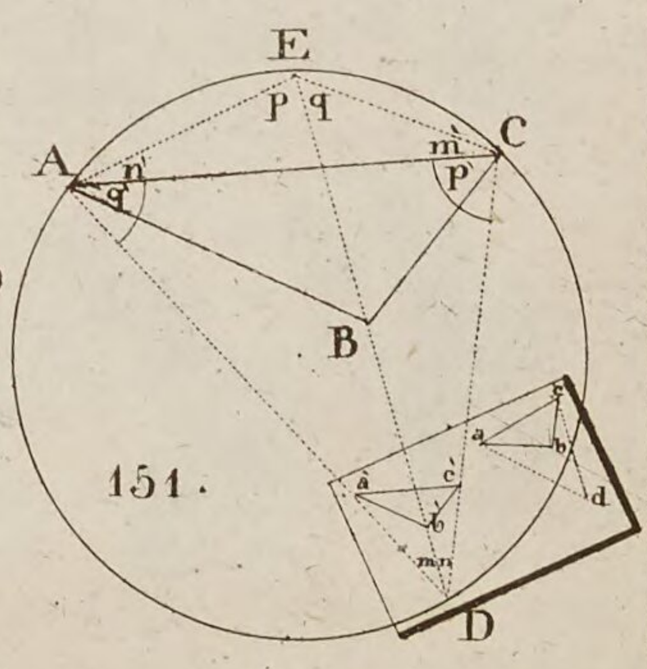


153.



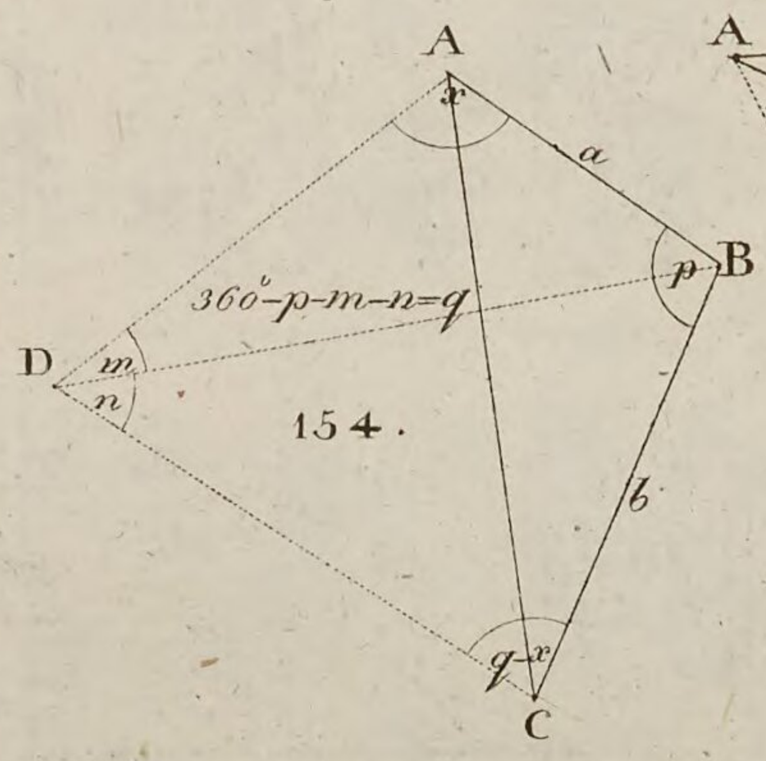


150.

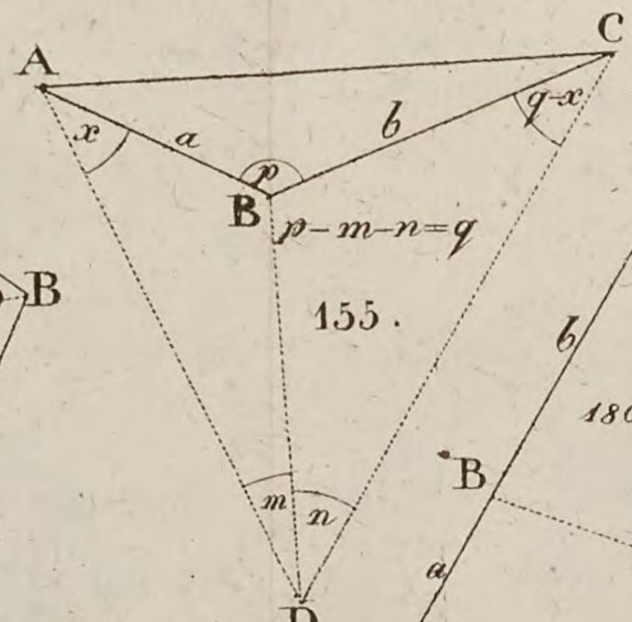


151.

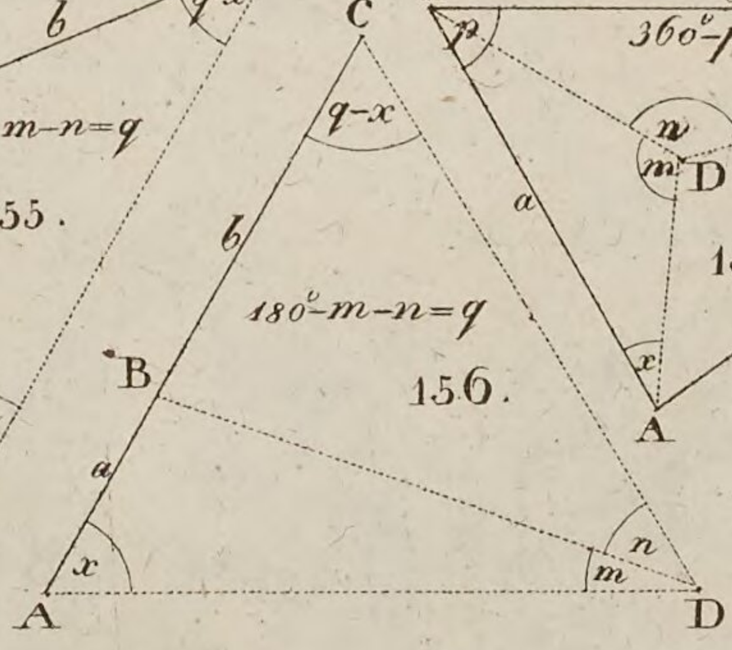
154.



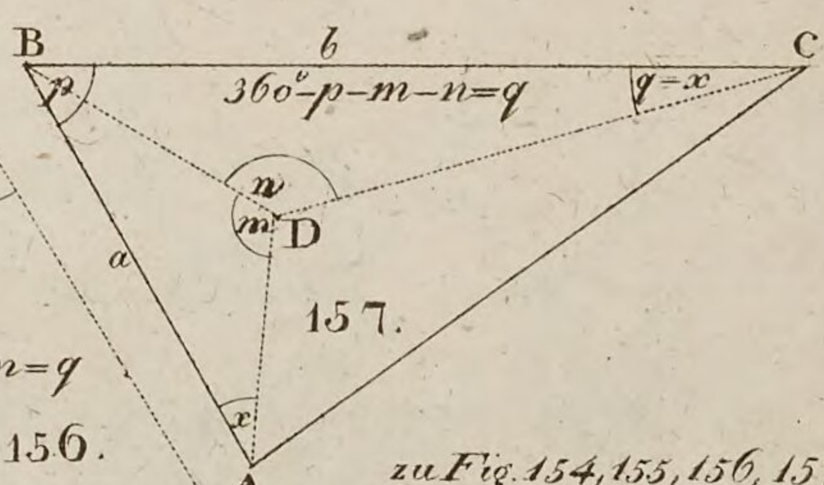
155.



156.



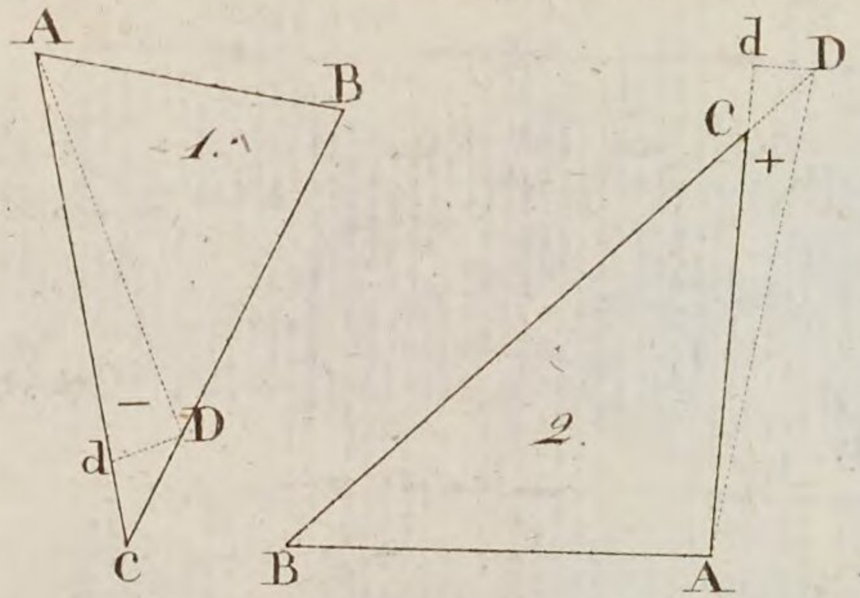
157.

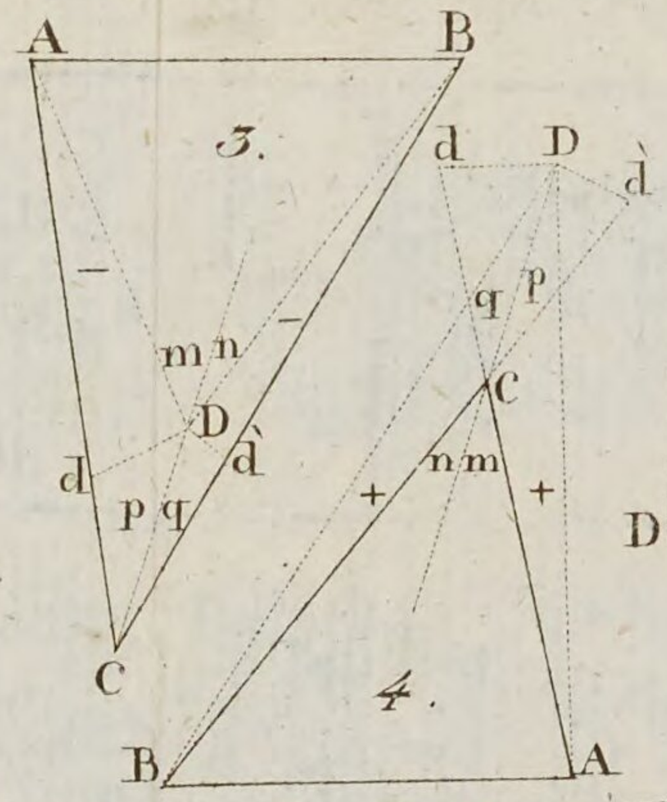


zu Fig. 154, 155, 156, 157.

$$\cot x = \frac{a.r^2 \sin n}{b.\sin m \sin q} + \cot q$$

A
B





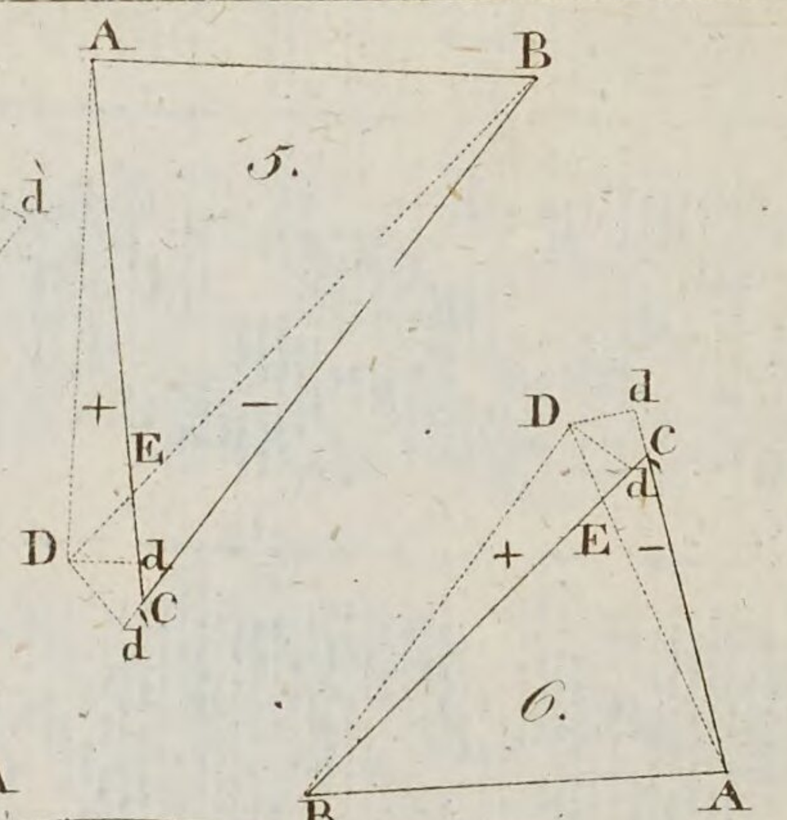
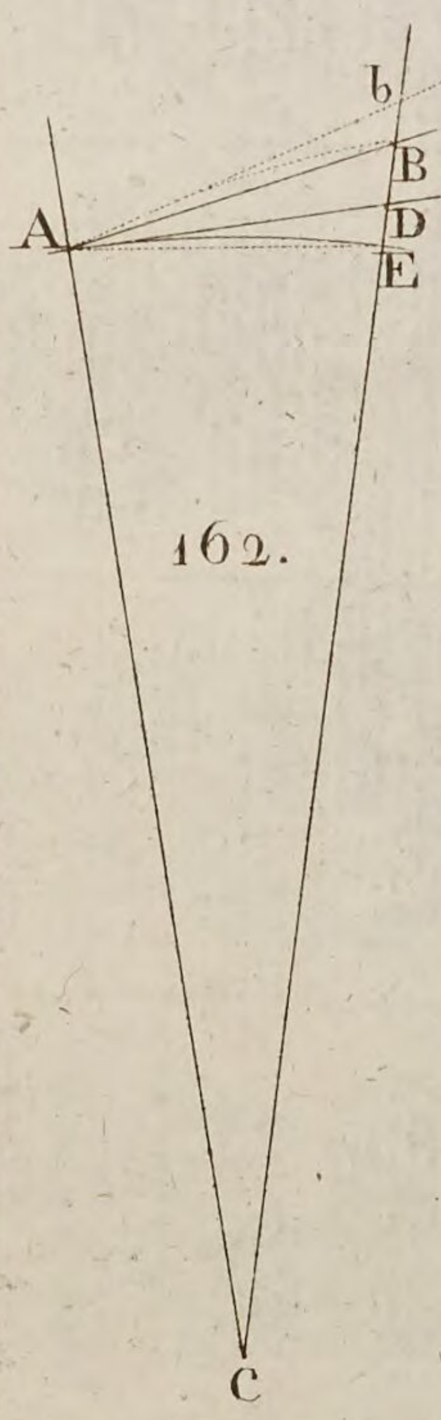
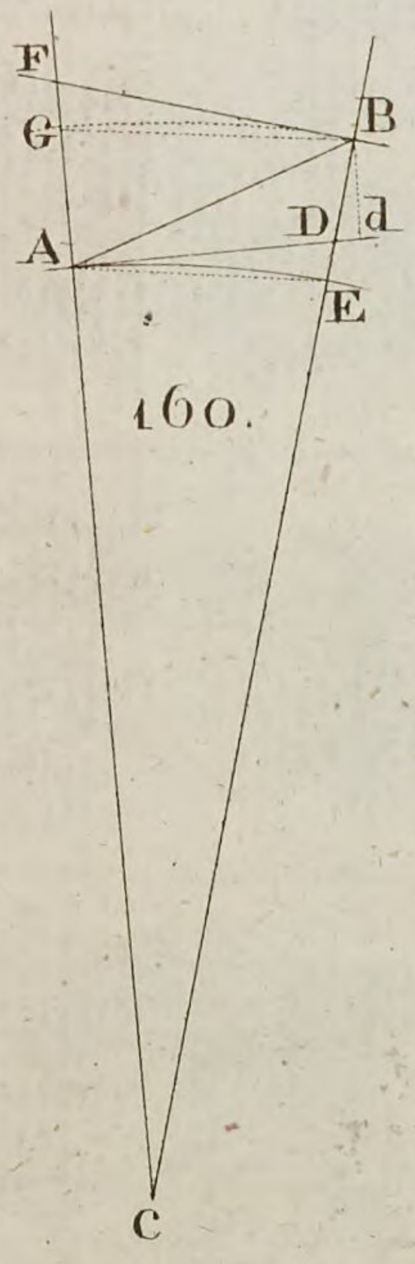


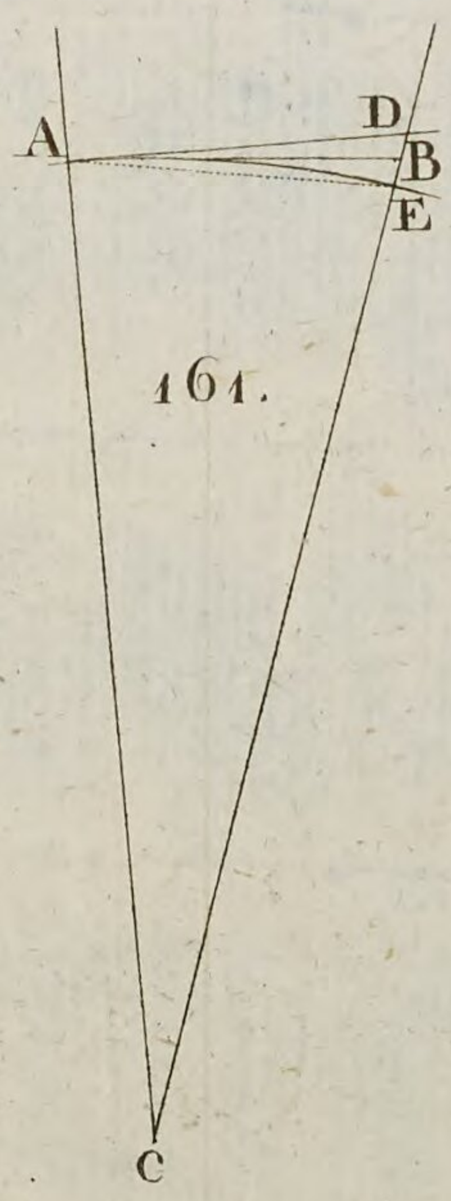
Fig 158 Nº 1.2.3.4.5.6.



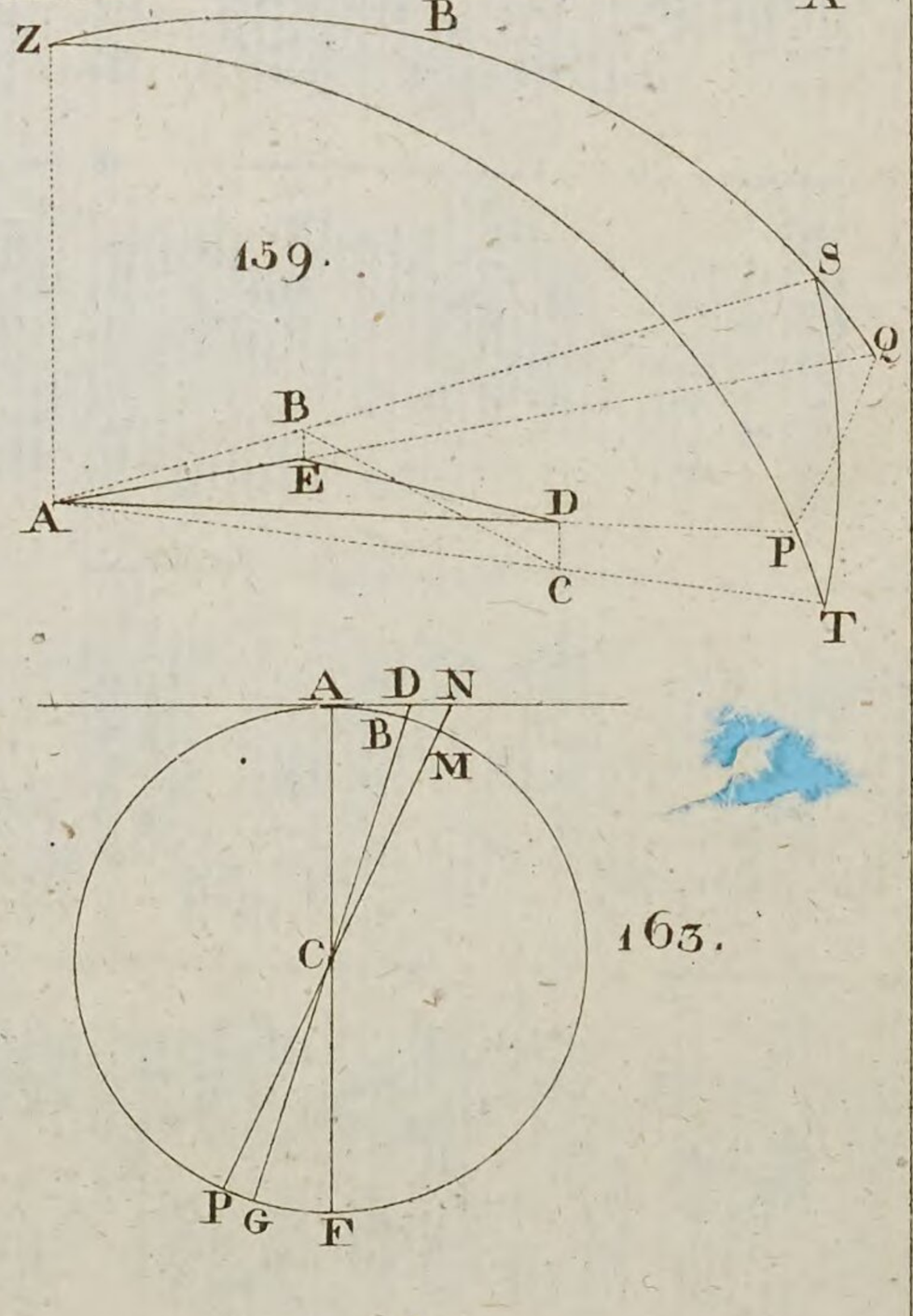
162.



160.



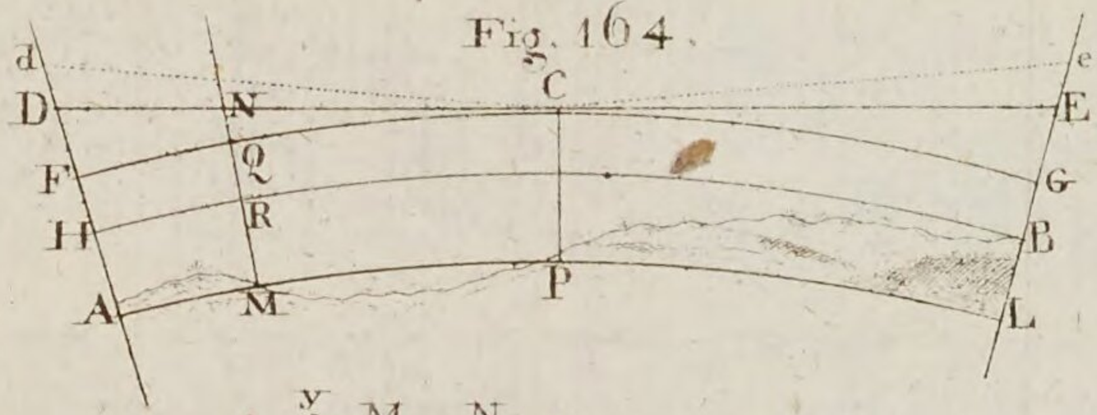
161.



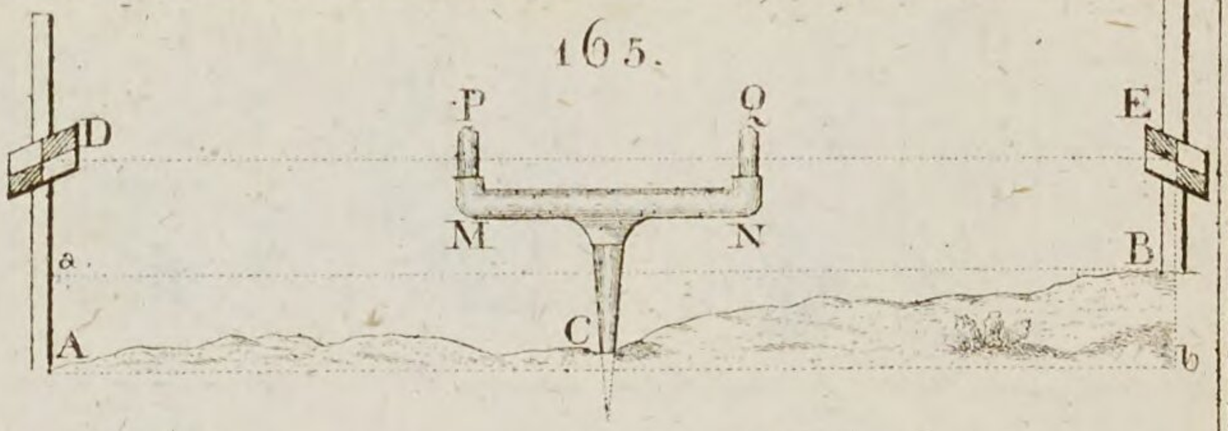
159.

163.

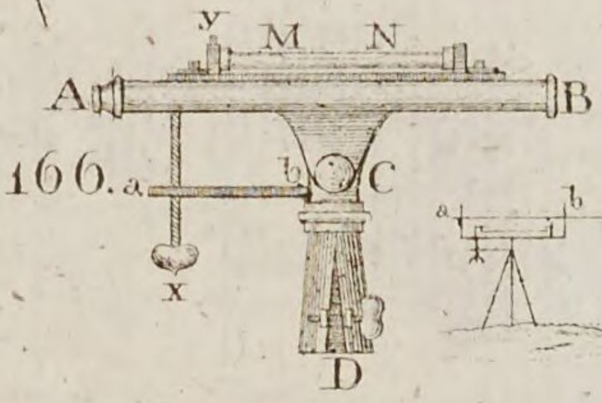
Fig. 164.



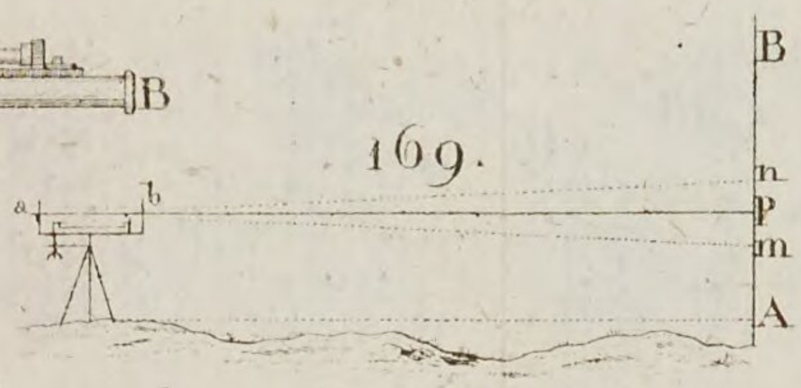
165.



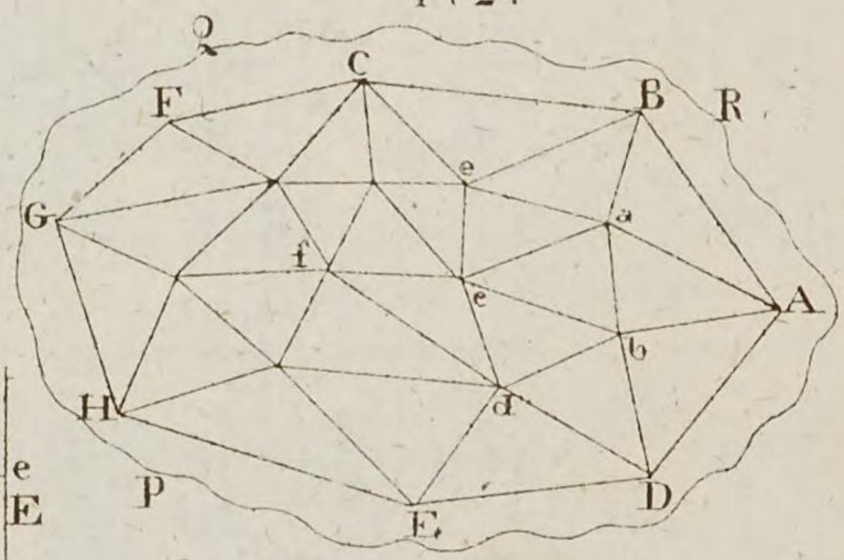
166.



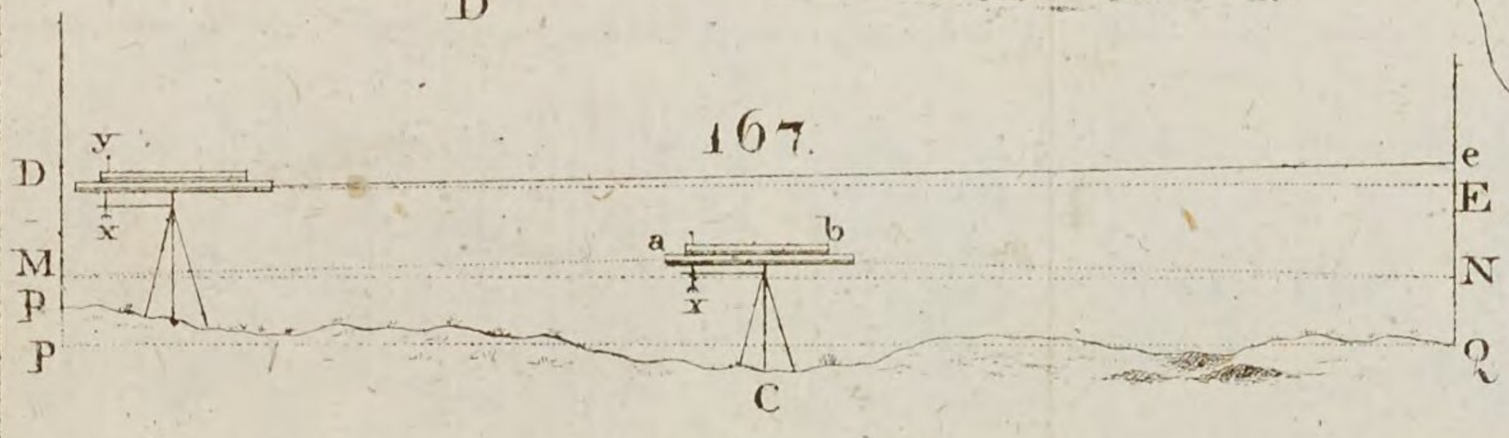
169.



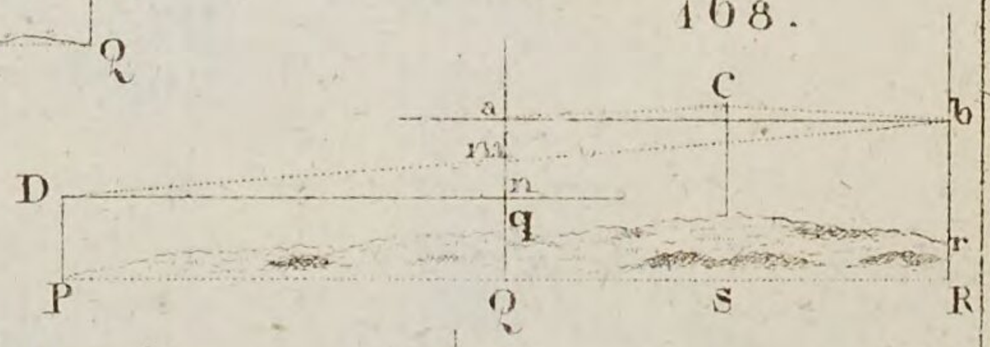
172.



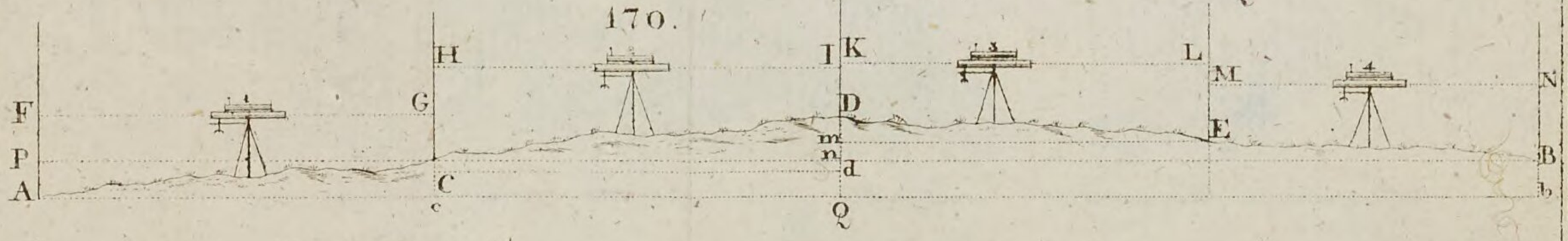
167.



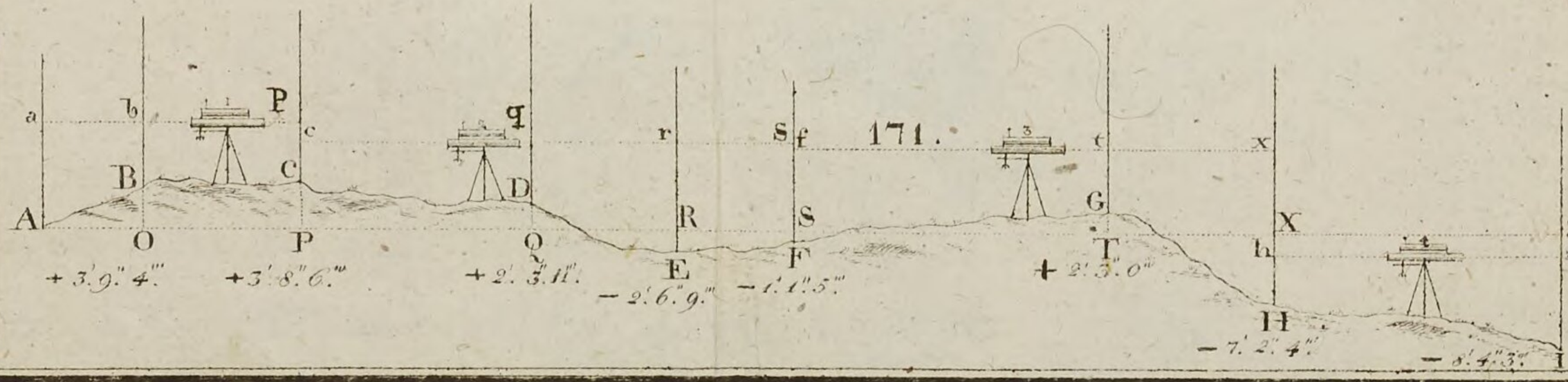
168.

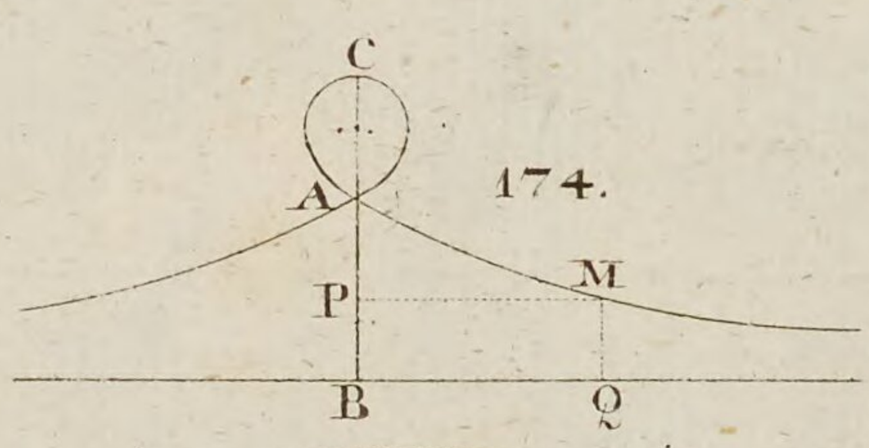


170.

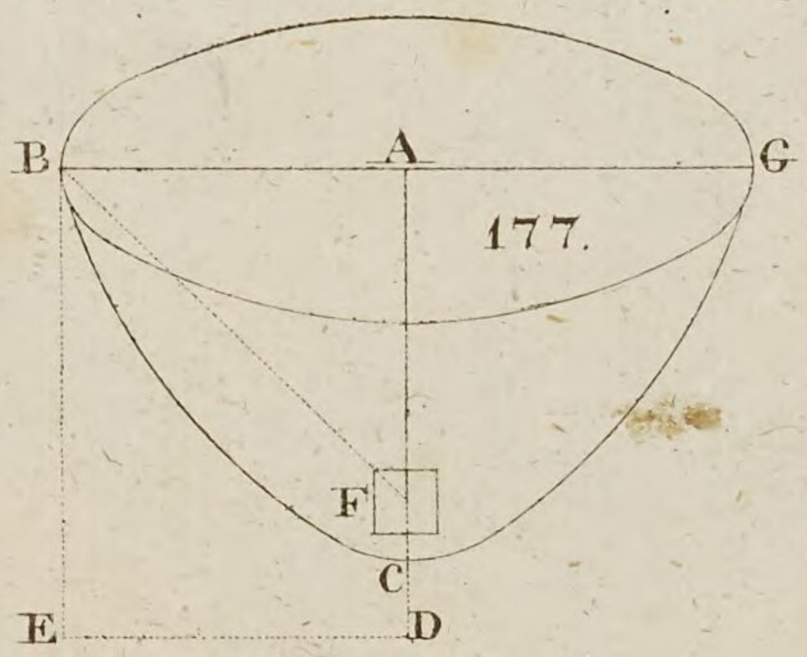


171.





174.



177.

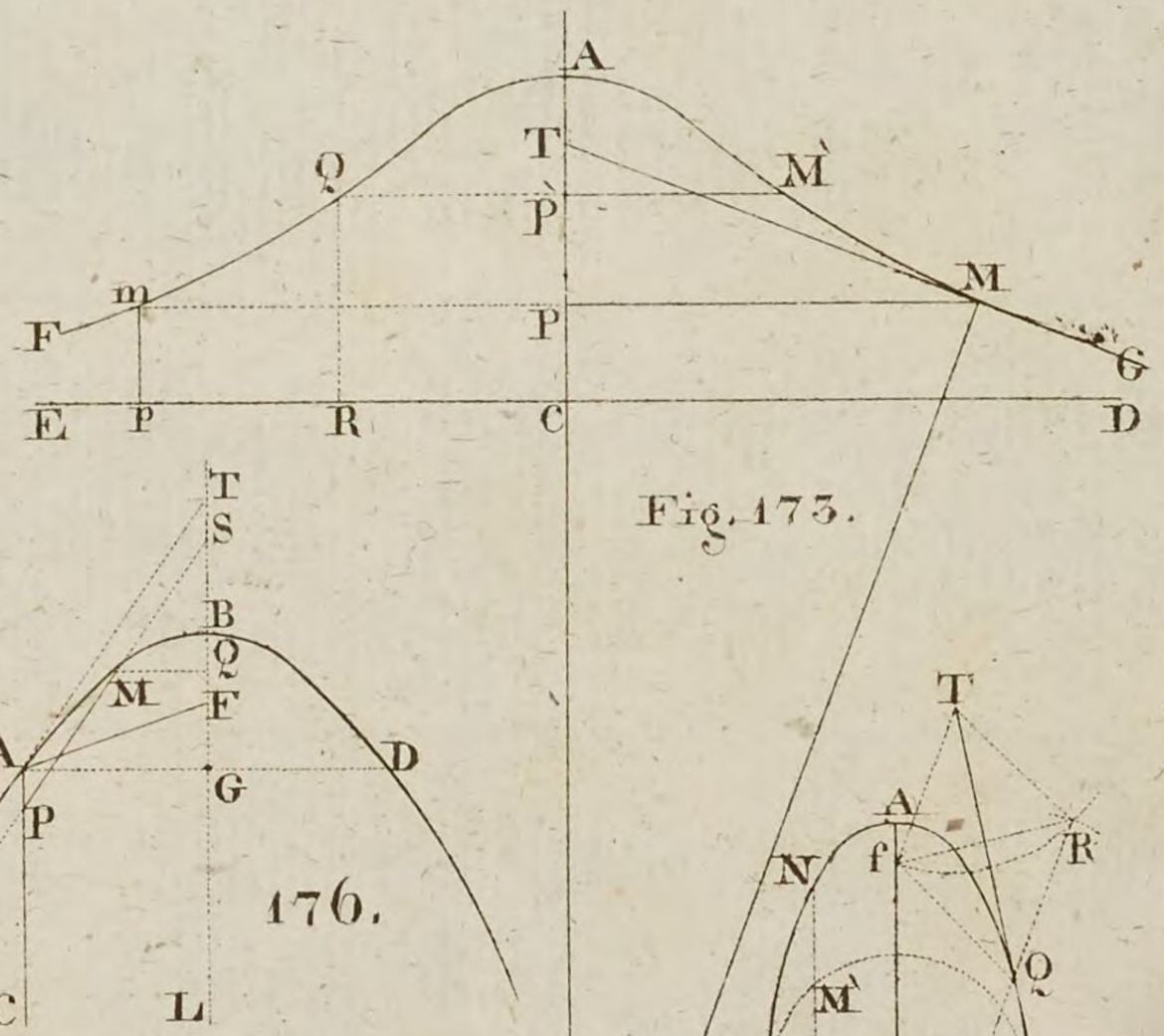
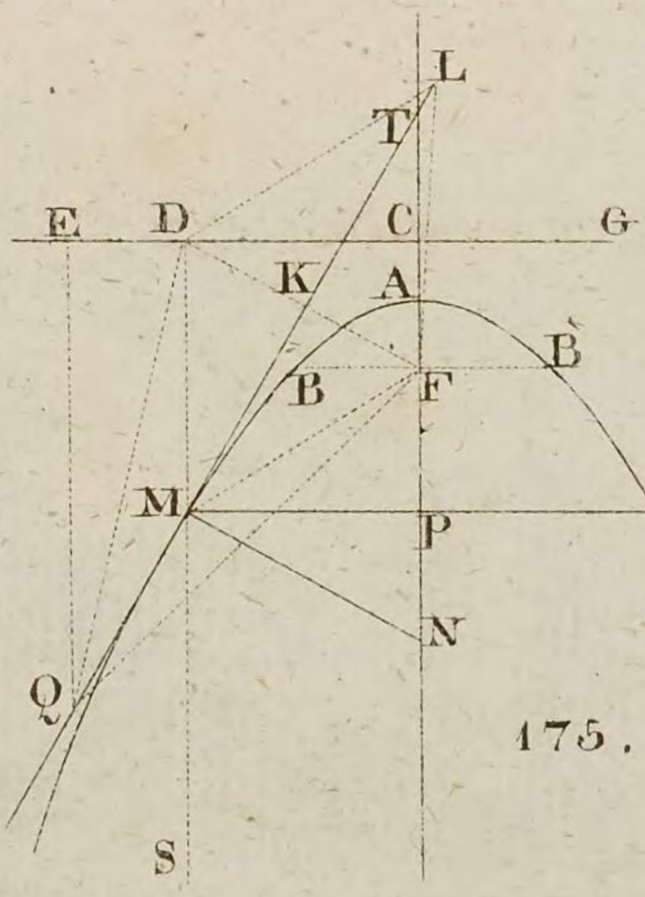
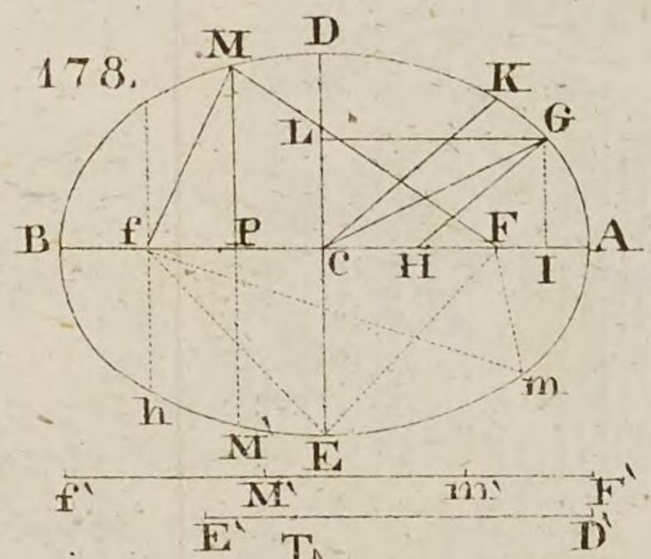


Fig. 173.

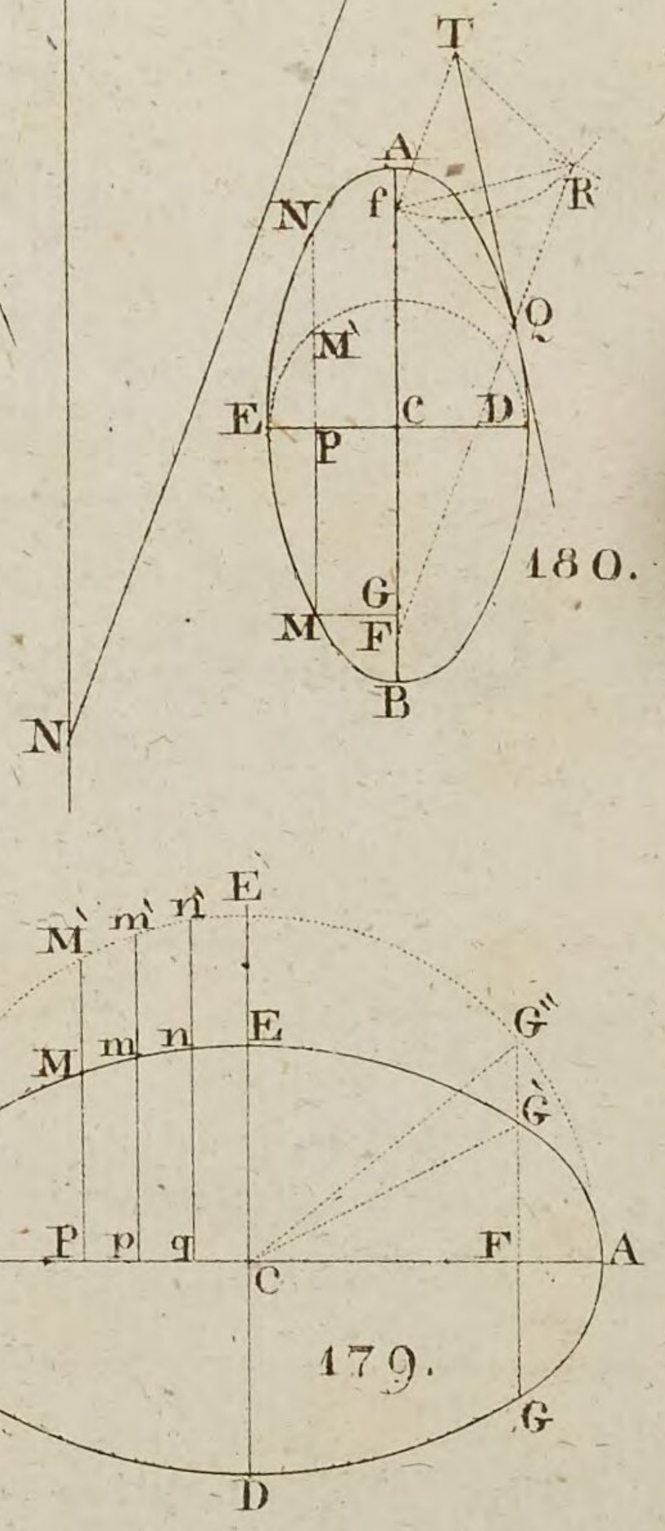
176.



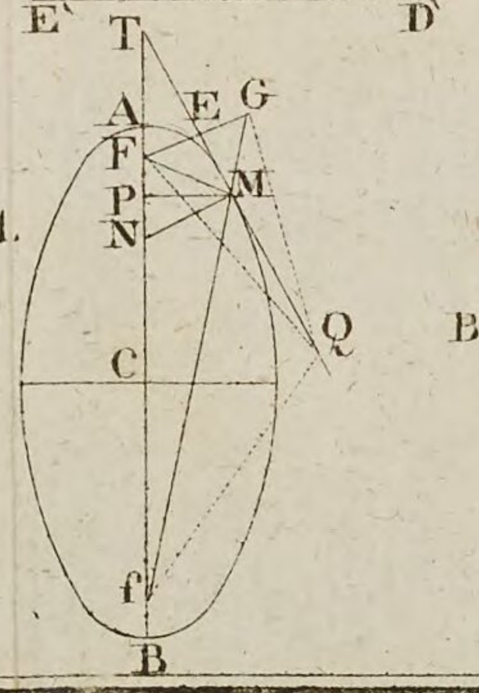
175.



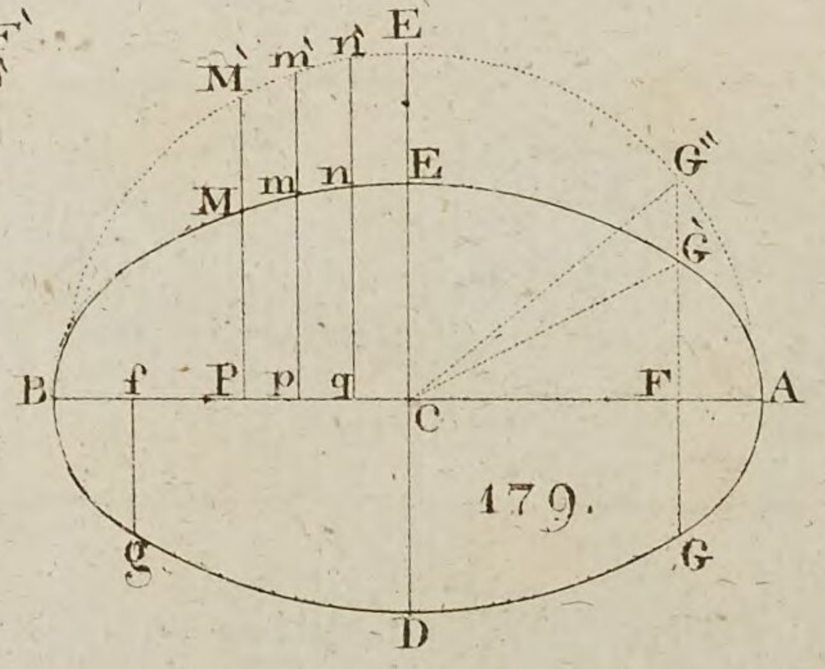
178.



180.



181.



179.

183.

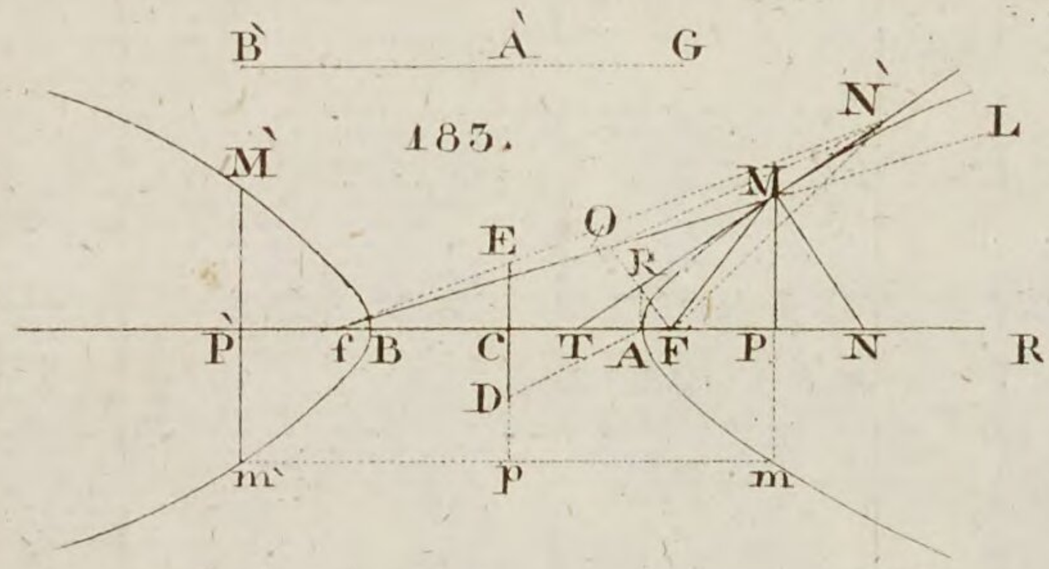
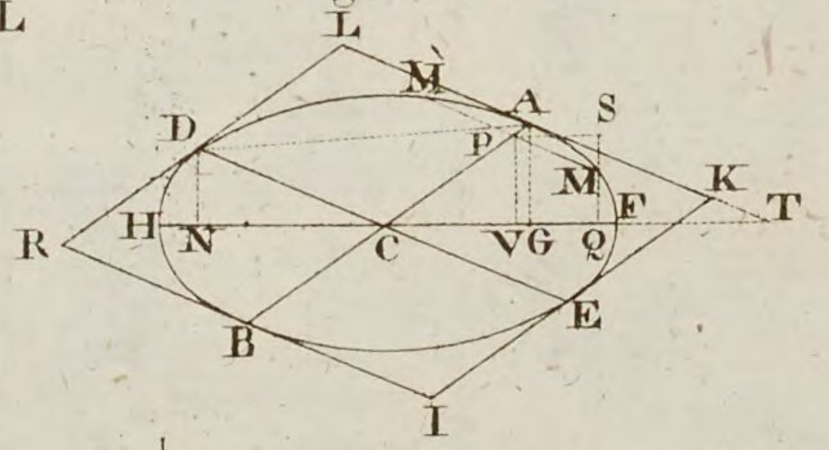
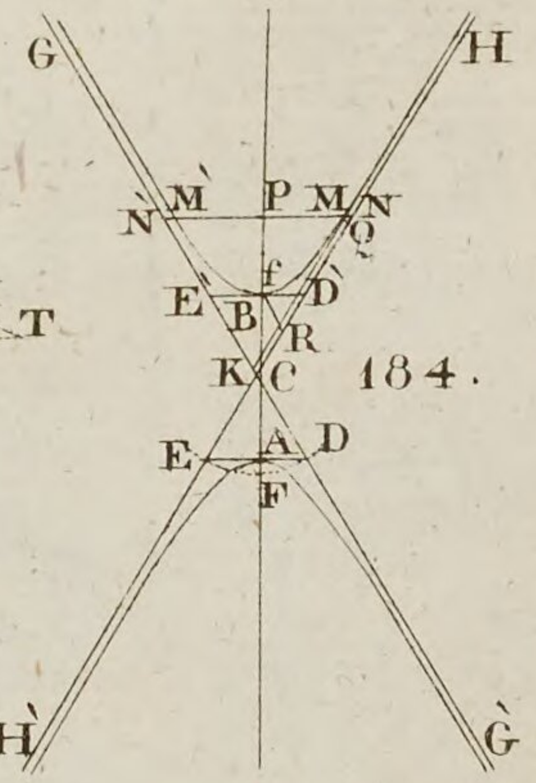


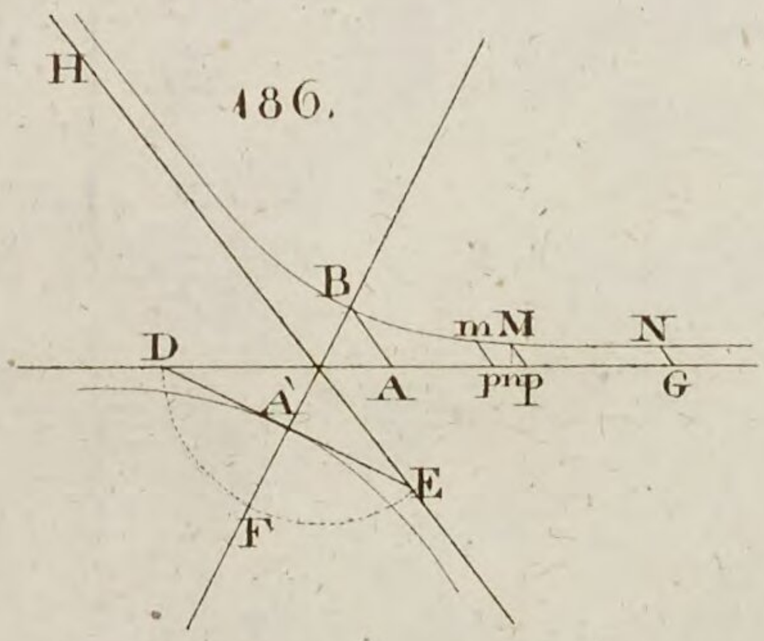
Fig. 182.



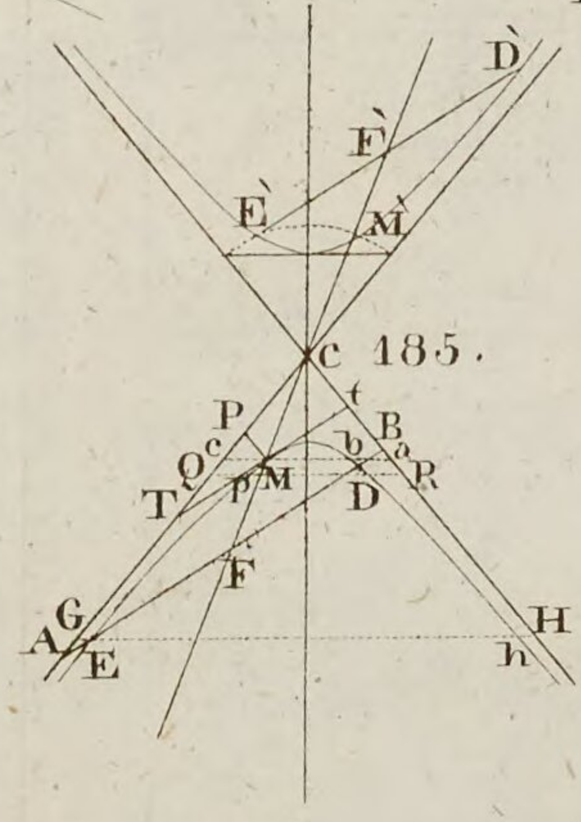
184.



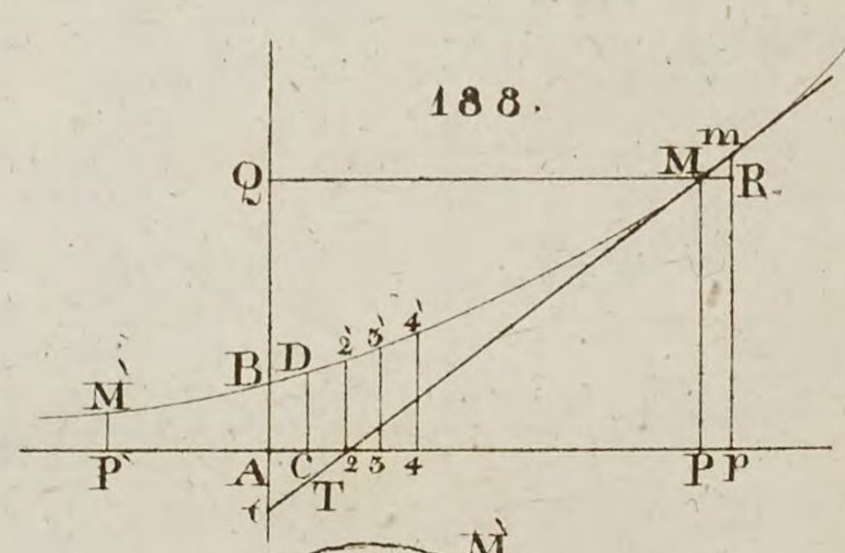
186.



185.

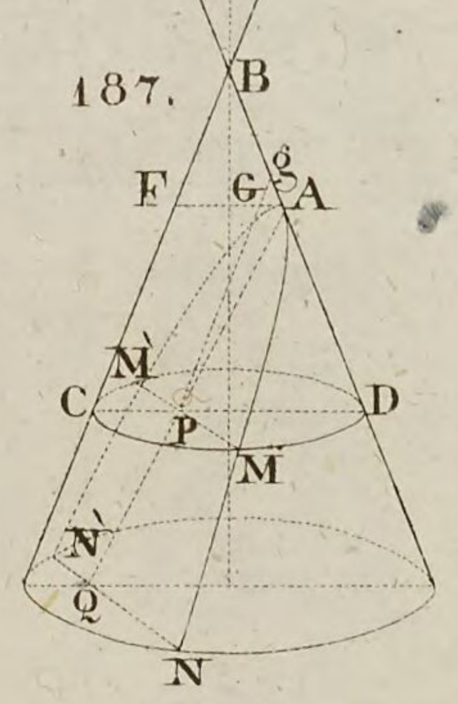


188.

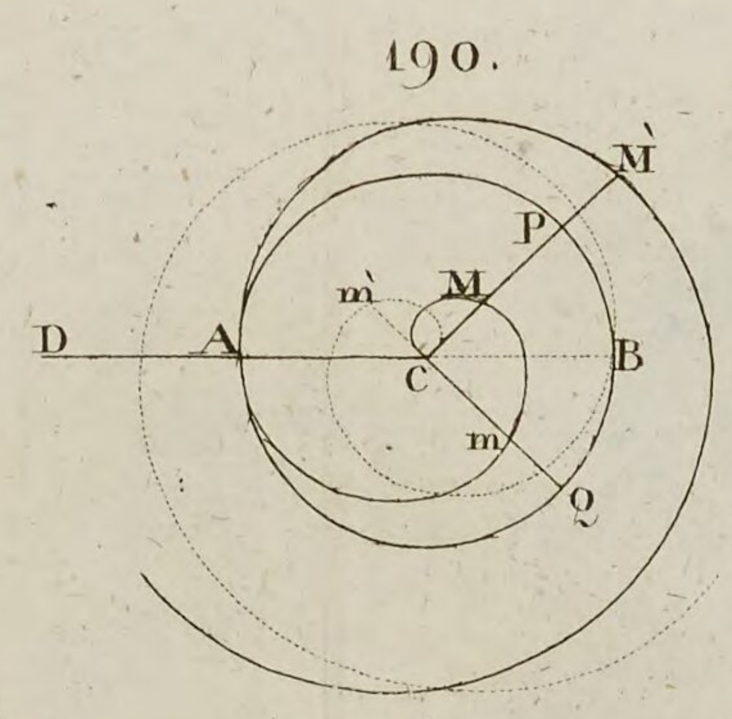


c d

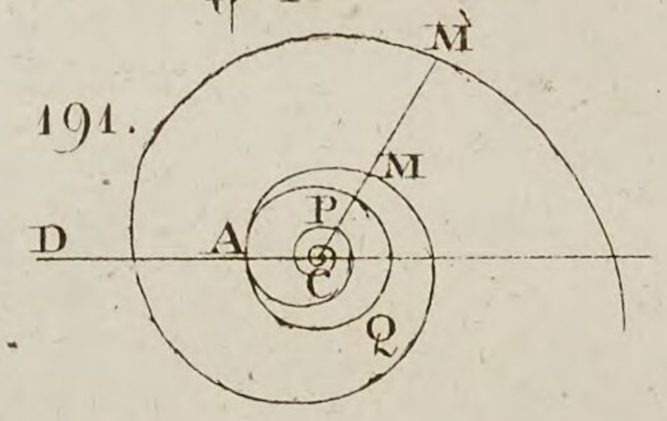
187.



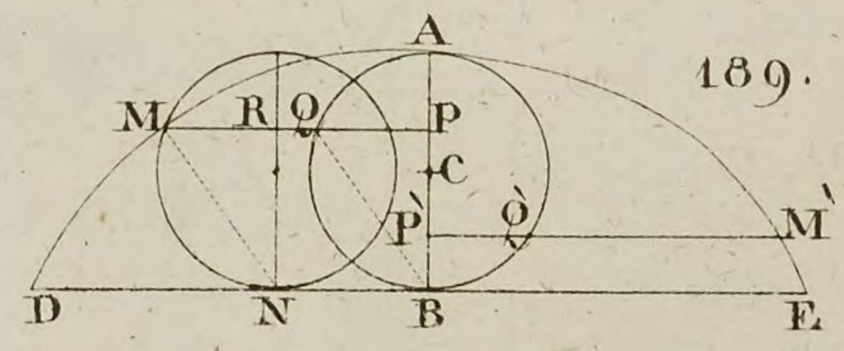
190.



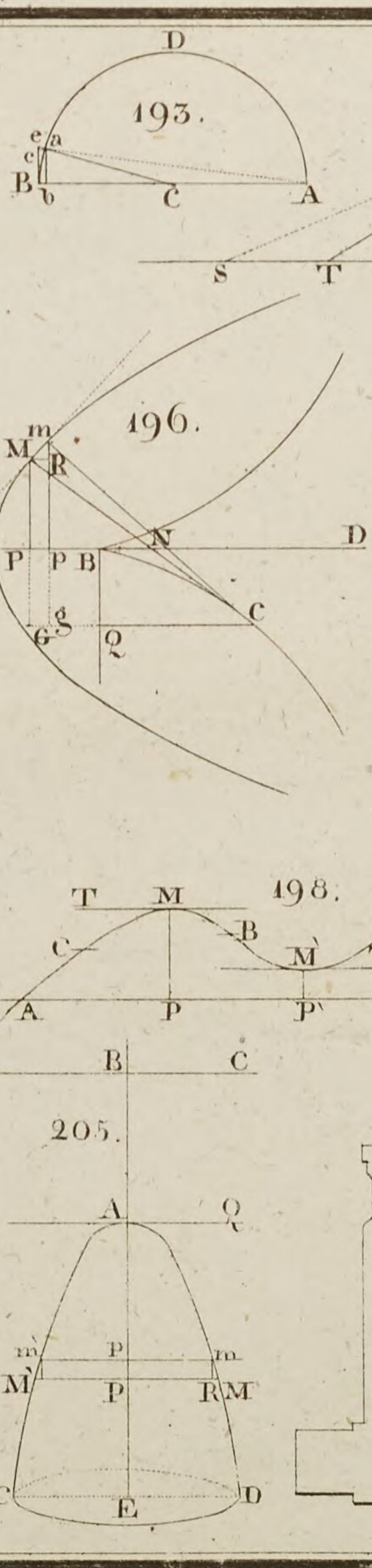
191.



189.



P
Q
192.
g
S
a
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
32
34
36
38
40
42
44
46
48
50
52
54
56
58
60
62
64
66
68
70
72
74
76
78
80
82
84
86
88
90
92
94
96
98
100
102
104
106
108
110
112
114
116
118
120
122
124
126
128
130
132
134
136
138
140
142
144
146
148
150
152
154
156
158
160
162
164
166
168
170
172
174
176
178
180
182
184
186
188
190
192
194
196
198
200
202
204
206
208
210
212
214
216
218
220
222
224
226
228
230
232
234
236
238
240
242
244
246
248
250
252
254
256
258
260
262
264
266
268
270
272
274
276
278
280
282
284
286
288
290
292
294
296
298
300
302
304
306
308
310
312
314
316
318
320
322
324
326
328
330
332
334
336
338
340
342
344
346
348
350
352
354
356
358
360
362
364
366
368
370
372
374
376
378
380
382
384
386
388
390
392
394
396
398
400
402
404
406
408
410
412
414
416
418
420
422
424
426
428
430
432
434
436
438
440
442
444
446
448
450
452
454
456
458
460
462
464
466
468
470
472
474
476
478
480
482
484
486
488
490
492
494
496
498
500
502
504
506
508
510
512
514
516
518
520
522
524
526
528
530
532
534
536
538
540
542
544
546
548
550
552
554
556
558
560
562
564
566
568
570
572
574
576
578
580
582
584
586
588
590
592
594
596
598
600
602
604
606
608
610
612
614
616
618
620
622
624
626
628
630
632
634
636
638
640
642
644
646
648
650
652
654
656
658
660
662
664
666
668
670
672
674
676
678
680
682
684
686
688
690
692
694
696
698
700
702
704
706
708
710
712
714
716
718
720
722
724
726
728
730
732
734
736
738
740
742
744
746
748
750
752
754
756
758
760
762
764
766
768
770
772
774
776
778
780
782
784
786
788
790
792
794
796
798
800
802
804
806
808
810
812
814
816
818
820
822
824
826
828
830
832
834
836
838
840
842
844
846
848
850
852
854
856
858
860
862
864
866
868
870
872
874
876
878
880
882
884
886
888
890
892
894
896
898
900
902
904
906
908
910
912
914
916
918
920
922
924
926
928
930
932
934
936
938
940
942
944
946
948
950
952
954
956
958
960
962
964
966
968
970
972
974
976
978
980
982
984
986
988
990
992
994
996
998
1000


193.
D
e
a
c
B
b
C
A
194.
C
m
M
R
G
B
S
T
A
P'
P
PN
196.
m
M
R
A
P
P
B
N
D
G
g
Q
C
203.
C
D
E
B
A
205.
A
Q
R
m'
p
m
M'
P
R
M
C
E
D
d
r
d'
s
c'
c
p
q
b'
b
m
n
a'
a
M
N
204.
G
c
R
A
q
m
p
F
D
E
195.
T
m
R
P
G
P
g
A
B
C
N
206.
B
D
E
P'
Q
M'
A'
B
D
C
Q
P
M
A
T
199
M
A
P
B
T
198.
T
M
C
B
C'
M'
T'
A
P
P'
Q
N
200
B
C
P'
M
A
P
201.
Q
M
T
A
P
202.
A
B
C
D
G
Q
E
H
F
P

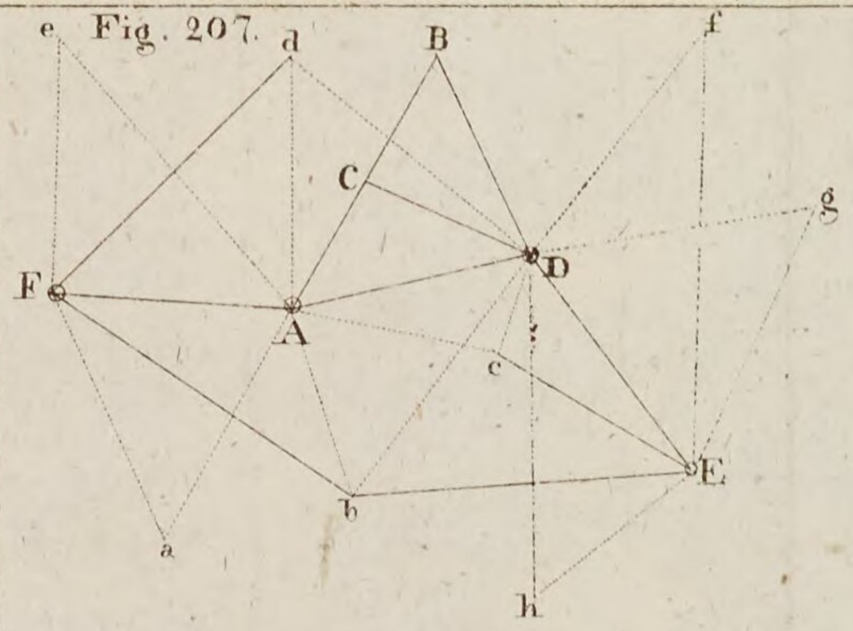
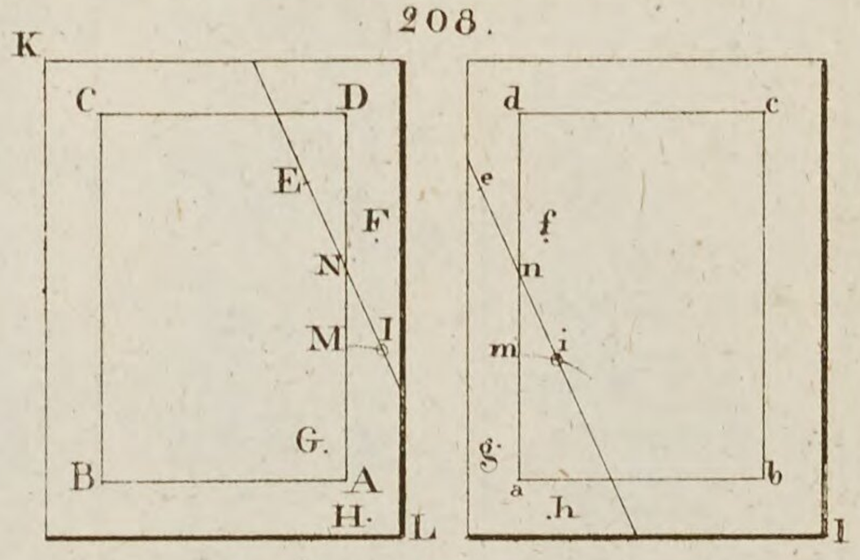

e
d
B
f
C
g
D
F
A
c
E
b
a
h

Fig. 207.


K
C
D
E
F
N
M
I
G.
B
A
H.
L
d
c
e
f
n
m
i
g
a
b
h
I

208.

Maßstab von 10 Grad oder 150 Meilen
0 15 30 45 60 75 90 105 120 135 150
60 40 20 1 2 3 4 5 6 7 8 9

H
NORD
h
G
WEST
OST
SÜD
L
I
E
F
C
C
d
d'
d''
h''
ENGLAND
Dublin
Cork
Chester
London
Plymouth
Dover
Portsmouth
Calais
Lille
Rouen
Brest
Rennes
Nantes
Orleans
Paris
Luxemburg
Amsterdam
Bremen
Hamburg
Rostock
Stettin
Osnabrück
Berlin
Braunschweig
Cassel
Göttingen
Leipzig
Dresden
Frankfurt
Cöln
Coblenz
Mainz
Trier
Metz
Strasburg
Nancy
Würzburg
Nürnberg
Prag
Ulm
München
Donau F.
Passau
Salzburg
Innspruck
Basel
Zürich
Gent
Antwerpen
Namur
PREUSSEN
Cüstrin
Posen
Glogau
Breslau
Thorn
Warschau
Weichsel F.
Königsberg
Grodno
Minsk
Pinsk
Luck
Kiow
RUSSLAND
Orel
Tula
Moskau
Smolensk
Wilna
Mitau
Riga
Petersburg
Archangel
Ladoga See
Finnland
Schweden
Stockholm
Upsal
Carlscrona
Gothenburg
Christiania
Norwegen
Drontheim
Bergen
Island
Hekla
Grönland
Nordcap
Lappland
Tornea
Wasa
Abo
Revel
Dorpat
Pleskow
Narwa
Ingermanland
Livland
Kurland
Litthauen
Volhynien
Podolien
Bessarabien
Moldau
Wallachei
Transylvanien
Siebenbürgen
Ungarn
Pesth
Ofen
Gratz
Wien
Linz
Salzburg
Klagenfurth
Laybach
Agram
Triest
Hermanstadt
Temeswar
Belgrad
Bukarest
Widdin
Donau F.
Semlin
Sau F.
Kamieniec
Lemberg
Krakau
Olmütz
Kreutz
Brixen
Mayland
Mantua
Turin
Lyon
Rhone F.
Genua
Parma
Ferrara
Florenz
Ancona
Livorna
Rom
Neapel
Manfredonia
Brindisi
Durazzo
Salerno
Tarento
Scutari
Adrianopel
Constantinopel
Salonichi
Smirna
Athen
Morea
Adana
Alexandrette
Cypern
Candia
Sardinien
Cagliari
Sicilien
Palermo
Messina
Siracusa
Malta
Valetta
Bastia
S. Bonifacio
Corsica
Porto Vecchio
Ajaccio
C. Finisterre
Corunna
Portugal
Porto
Lissabon
Coimbra
Evora
Alcantara
Toledo
Madrid
Salamanca
Leon
Burgos
Bilbao
Bayonne
Toulouse
Bordeaux
Rochelle
Tulles
Moulins
Avignon
Marseille
Toulon
Barcelona
Tortosa
Alicante
Ainza
Spanien
Sevilla
Carthagena
Cadix
C. St. Vincent
Gibraltar
Ceuta
Tanger
Algier
Tunis
Marzarca
Türkey
Asien
Africa
Th. von
Mittel Ländisches Meer
Schwarzes Meer
Atlantisches Weltmeer

8. Month.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Vega, Georg <<von>>,

Georg Freyherrn von Vega ... Vorlesungen über die Mathematik sowohl ü berhaupt zu mehrerer Verbreitung mathematischer Kenntnisse in den k.k. Staaten, als auch insbesondere zum Gebrauche des k.k. Artillerie-Corps

Bd.: 2

Wien 1817

Augsburg, Staats- und Stadtbibliothek -- Math 907 -2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11267747-2